УДК 512.552.8

В. В. Бавула (Нац. ун-т, Киев)

КЛАССИФИКАЦИЯ МОДУЛЕЙ n И КРАТНОСТИ 1 НАД АЛГЕБРОЙ ВЕЙЛЯ A_n

Modules of the Gelfand – Kirillov dimension n and the multiplicity 1 over the Weyl algebra A_n are classified.

Класифікуються модулі над алгеброю Вейля A_n розмірності Гельфанда – Кирилова n і кратності 1.

Введение. Описание модулей над алгеброй Вейля $A_n = A_n(K)$ (K — поле характеристики 0) представляет собой очень сложную задачу. Однако классификация (с точностью до неразложимых элементов некоторого некоммутативного евклидового кольца) простых A_1-модулей получена Р. Блоком [1, 2] и автором [3, 4] в случае одного класса обобщенных алгебр Вейля, включающего алгебру Вейля A_1. Алгебра Вейля A_n является нетеровой простой некоммутативной бесконечномерной алгеброй, она имеет естественную возрастающую фильтрацию (Бернштейна) $B = \{B_i\}$ линейными конечномерными пространствами, причем ассоциированная градуированная алгебра является кольцом многочленов от $2n$ переменных ([5], см. п. 1.2). Именно этот факт позволил И. Н. Бернштейну применить алгебро-геометрические методы и понятия коммутативной алгебры такие как размерность и кратность к изучению A_n-модулей. Остановимся на этом несколько подробнее. По фильтрации Бернштейна на конечно порожденном A_n-модуле $M \neq 0$ строится возрастающая фильтрация $\{\Gamma_i = B_i V\}$, где V — конечномерное порождающее пространство модуля M. Тогда целочисленная функция $\dim \Gamma_i$ при достаточно больших i ведет себя как некоторый полином $H(t) = a_d t^d + \ldots + a_0 \in \mathbb{Q}[t]$ с рациональными коэффициентами, т. е. $\dim \Gamma_i = H(t)$ при $i >> 0$ [6].

Полином $H(t)$ называется *полиномом Гильберта* модуля M, его степень $d = d(M)$ — *размерностью,* натуральное чило $e(M) = d!\,a_d$ — *кратностью* модуля M. Причем константы $d(M)$ и $e(M)$ не зависят от выбора фильтрации $\{\Gamma_i\}$ на M. В [6] показано, что *для любого конечно порожденного A_n-модуля $M \neq 0$: $d(M) \geq n$ (неравенство Бернштейна).* В связи с неравенством Бернштейна естественно возникает задача о классификации самых „маленьких" A_n-модулей, т. е. ненулевых конечно порожденных A_n-модулей, имеющих минимально возможную размерность $d(M) = n$ и кратность $e(M) = 1$. Решение этой задачи и составляет цель настоящей работы, а именно: в работе доказывается следующая теорема.

Теорема A. *Конечно порожденный A_n-модуль M имеет размерность $d(M) = n$ и кратность $e(M) = 1$ тогда и только тогда, когда он изоморфный $M \simeq {}^{\tau}W_n$ подкрученному на автоморфизм алгебры Вейля $\tau \in \mathrm{Aut}_B(A_n)$ модулю $W_n = A_n / A_n(\partial_1, \ldots, \partial_n)$, где $\mathrm{Aut}_B(A_n)$ — группа автоморфизмов алгебры Вейля A_n, сохраняющих фильтрацию Бернштейна.*

Все недостающие определения даны в п. 1. Теорема А анонсирована в [7].

Теорема B [8]. *Пусть $M_1, \ldots, M_n$ — простые A_1-модули. Тогда их тензорное произведение $M_1 \otimes \ldots \otimes M_n$ является простым A_n-модулем (размерности n и кратности $e(M_1) \ldots e(M_n)$). Верно и обратное.*

Таким образом, имея классификации простых A_1-модулей, по теореме В можно построить „достаточно много" простых A_n-модулей. Но оказывается, при этом получаются далеко не все простые A_n-модули. Стаффорд [9] привел пример простого A_2-модуля

$$M = A_2 / A_2 P, \quad P = X_1 + X_2 + \partial_1 + X_1 \partial_1 \partial_2,$$

размерность которого $d(M) = 3 \neq 2$. Другие примеры приведены И. Н. Бернштейном и В. Лунцем.

Остановимся кратко на структуре работы. В п. 1 приводятся необходимые сведения, касающиеся алгебр Вейля (заинтересованного читателя отсылаем к [5]). Устанавливается структура подмодулей тензорного произведения модулей над алгебрами Вейля (теорема 1.6). П. 2 посвящен доказательству теоремы А. В п. 3 изучаются простые голономные A_n-модули. Напомним, что A_n-модуль M называется *голономным*, если его размерность равна $d(M) = n$. В теореме 3.1 доказывается существование для каждого простого голономного A_n-модуля M кратности $e(M)$ такого автоморфизма $\tau \in \mathrm{Aut}_B(A_n)$, что (подкрученный на автоморфизм τ) A_n-модуль ${}^{\tau}M$ является A_n-подмодулем конечномерного векторного L-пространства $L \otimes_S {}^{\tau}M$ размерности $\leq e(M)$, где L — поле частных кольца многочленов $S = K[X_1, \ldots, X_n]$. В доказательстве теоремы А существенно используется теорема 3.2, которая доказывается в конце работы.

Автор выражает благодарность Ю. А. Дрозду за полезные обсуждения.

1. Алгебра Вейля A_n.

1.1. *Определение алгебры Вейля* A_n. На протяжении всей работы K — поле характеристики нуль. *Алгеброй Вейля* $A_n = A_n(K)$ называется алгебра с $2n$ образующими $X_1, \ldots, X_n, \partial_1, \ldots, \partial_n$, удовлетворяющими соотношениям

$$[X_i, X_j] = [\partial_i, \partial_j] = [\partial_i, X_j] = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j, \quad [\partial_i, X_i] = 1.$$

Непосредственно из соотношений видно, что любой элемент $u \in A_n$ однозначно записывается в виде конечной суммы

$$u = \sum \lambda_{\alpha\beta} X^{\alpha} \partial^{\beta}, \tag{1}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ — мультииндексы,

$$X^{\alpha} = X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n}, \quad \partial^{\beta} = \partial_1^{\beta_1} \ldots \partial_n^{\beta_n}, \quad \lambda_{\alpha\beta} \in K.$$

Перечислим основные свойства A_n (многие из которых нам в дальнейшем не понадобятся): 1) A_n — простая алгебра; 2) A_n право- и левонетерова; 3) A_n имеет глобальную размерность [10] и размерность Крулля n [11]; 4) каждый A_n-модуль конечной длины является циклическим (теорема Стаффорда); 5) отображение $X_i \to \partial_i$, $\partial_i \to X_i$ задает автоморфизм A_n (формальное преобразование Фурье), сохраняющий фильтрацию Бернштейна B из 1.2.

1.2. *Фильтрация Бернштейна.* На алгебре Вейля A_n существует следующая фильтрация (по степени) конечномерными линейными подпространствами:

Фильтрация Бернштейна B:

$$B_j = \sum_{\alpha, \beta} \{ \lambda_{\alpha\beta} X^{\alpha} \partial^{\beta} : |\alpha| + |\beta| \leq j \}, \quad j \leq 0,$$

где $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $\lambda_{\alpha\beta} \in K$. Очевидно, $A_n = UB_j$, $B_i B_j \subset B_{i+j}$ $\forall i, j$; и пространства B_i конечномерны. Ассоциированное градуированное кольцо $\mathrm{gr}(A_n) = \mathrm{gr}_B(A_n) = \oplus_{i=0}^{\infty} B_i / B_{i-1}$ (мы считаем $B_{-1} = 0$) является кольцом многочленов

$$\mathrm{gr}(A) = K\left[\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_n, \overline{\partial}_1, \ldots, \overline{\partial}_n\right]$$

от $2n$ переменных $\overline{X}_i$, $\overline{\partial}_j \in B_1/B_0$.

1.3. *Группа автоморфизмов, сохраняющих фильтрацию Бернштейна.* Обозначим через $G = \mathrm{Aut}_B(A_n)$ группу автоморфизмов $\tau = \mathrm{Aut}(A_n)$, сохраняющих фильтрацию Бернштейна: $\tau(B_i) \subset B_i$ $\forall i \geq 0$. Эта группа естественным образом отождествляется с подгруппой обратимых операторов $(2n+1)$-мерного пространства $B_1 = \langle 1, X_1, \ldots, X_n, \partial_1, \ldots, \partial_n \rangle$, сохраняющих (вырожденную) кососимметрическую форму $[*, *]: B_1 x B_1 \to K$, $[u, v] = uv - vu$. Очевидно, G содержит полную линейную группу $\mathrm{GL}(V_1)$ подпространства $V_1 = \langle X_1, \ldots, X_n \rangle$. Формальное преобразование Фурье $(X_i \to \partial_i, \partial_i \to -X_i)$ принадлежит G.

Группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(A_n)$ алгебры Вейля A_n описана только в случае [12].

1.4. *Размерность и кратность модуля.* Доказательства проводимых ниже утверждений можно найти в [5]. Фильтрация $\Gamma = \{\Gamma_i\}$ A_n-модуля M $(B_i \Gamma_j \subset \Gamma_{i+j}$ $\forall i, j)$ называется *хорошей*, если ассоциированный градуированный $\mathrm{gr}(A_n)$-модуль $\mathrm{gr}(M) = \oplus_{i \geq 0} \Gamma_1 / \Gamma_{i-1}$ конечно порожден. Каждый конечно порожденный A_n-модуль имеет хорошую фильтрацию; верно и обратное. Пусть $\Gamma = \{\Gamma_i\}$ и $\Omega = \{\Omega_i\}$ — две хорошие фильтрации на M, тогда существует такое k, что $\Gamma_{i-k} \subset \Omega_i \subset \Gamma_{i+k}$ для всех i.

Теорема 1 [5]. *Пусть Γ — хорошая фильтрация на конечно порожденном A_n-модуле M. Тогда существует целое $d \geq 0$ и рациональные числа $a_0, \ldots$ $\ldots, a_d$ такие, что*

$$\dim(\Gamma_i) = a_d i^d + \ldots + a_0 \quad \text{для всех } i >> 0.$$

Числа $d = d(M)$ и $e = e(M) := d! a_d \in \mathbb{Z}$ не зависят от хорошей фильтрации на M и называются соответственно *размерностью* и *кратностью* модуля M.

Лемма 1 [8]. *Пусть M и N являются A_n- и A_m-модулями соответственно. Тогда их тензорное произведение $M \otimes N$ является A_{n+m}-модулем размерности $d(M \otimes N) = d(M) + d(N)$ и кратности $e(M \otimes N) = e(M)\, e(N)$.*

Как отмечалось во введении, И. Н. Бернштейн [6] показал, что *размерность ненулевого конечно порожденного A_n-модуля не меньше n.* Поэтому естественно рассмотреть самые „маленькие" ненулевые A_n-модули.

1.5. *Крайние A_n-модули.* A_n-модуль называется *крайним,* если он имеет размерность $d(M) = n$ и кратность $e(M) = 1$. Совокупность крайних A_n-модулей обозначим через K_n, это самые „маленькие" (ненулевые) A_n-модули.

Лемма 2. 1) *Крайний A_n-модуль всегда прост.*

2) *$K_n \otimes K_m \subset K_{n+m}$ для всех $n, m \in \mathbb{N}$.*

3) *Если $M \in K_n, \tau \in \mathrm{Aut}_B(A_n)$, то ${}^{\tau}M \in K_n$, где ${}^{\tau}M$ — модуль, подкрученный на автоморфизм τ.*

4) *A_n-модуль $W_n := A_n / A_n(\partial_1, \ldots, \partial_n) = (K[X_1, \ldots, X_n], \partial_j(F) = \partial F / \partial X_j$ — формальная производная, $X_j(F) = X_j F$ — умножение на X_j).*

Доказательство. 1) Простота крайнего модуля непосредственно следует из следующего свойства размерности и кратности (предложение 3.6 [5]): *пусть $0 \to N \to M \to L \to 0$ — точная последовательность конечно порожденных A_n-модулей. Тогда $d(M) = \{d(N), d(L)\}$ и если $d(N) = d(L) = d(M)$, то $e(M) = e(N) + e(L)$.*

2) Следует из леммы 1.

3) Очевидно.

4) A-модуль W_n является тензорным произведением n экземпляров A_1-модуля W_1. Очевидно, $d(W_1)=e(W_1)=1$, теперь осталось применить лемму 1. Лемма доказана.

Другим примером крайнего A_n-модуля является $V_n := A_n / A_n(X_1, \ldots, X_n)$.

1.6. *Свойства тензорных произведений модулей.*

Теорема 2. *Пусть A_n-модуль $M = \otimes_{i=1}^n M_i$ является тензорным произведением простых A_1-модулей, N — произвольный A_m-модуль. Тогда любой A_{n+m}-подмодуль $L \subset M \otimes N$ имеет вид $L = M \otimes N_1$ для некоторого A_m-подмодуля $N_1 \subset N$.*

Доказательство. Очевидно, достаточно рассмотреть случай $n=1$. В доказательстве теоремы В из [8] (формулировка во введении) установлено, что для любого $u \neq 0 \in M = M_1 \otimes N$ существует $d \in A_1$ такое, что $du = m \otimes n \neq 0$ для некоторых $m \in M_1, n \in N$. Т. е. каждый ненулевой подмодуль L из M содержит ненулевой подмодуль вида $M_1 \otimes N_2$ для некоторого A_m-подмодуля $N_2 \subset N$. Пусть

$$N_1 := \sum \{ N_2 \mid M \otimes N_2 \subset L \text{ — } A_{m+1}\text{-подмодуль} \},$$

тогда $L_1 := M_1 \otimes N_1 \subset L$. Покажем, что $L_1 = L$. Предположим противное, тогда $0 \neq \overline{L} = L / L_1$ является подмодулем в $M / L_1 \simeq M_1 \otimes N / N_1$ и, по доказанному выше, $\overline{L}$ содержит ненулевой подмодуль вида $M_1 \otimes N_3 / N_1$ для некоторого A_m-подмодуля $N_3 \subset N$ такого, что $N_1 \underset{\neq}{\subset} N_3$. Отсюда $L \supset M \otimes N_3$, это противоречит выбору N_1, следовательно, $L = L_1$, что и завершает доказательство теоремы.

В дальнейшем эта теорема понадобится только в случае A_n-модуля $M = W_n$ (в этом случае доказательство теоремы 2 несложно провести непосредственно).

Гипотеза. Теорема 2 справедлива для произвольного простого A_n-модуля M.

2. Доказательство теоремы А. *Достаточность* теоремы А очевидна в силу леммы 2 (п. 3).

Необходимость. Пусть M — крайний A_n-модуль, тогда в силу теоремы 4 существует автоморфизм $\tau \in \mathrm{Aut}_B(A_n)$ и левый идеал I алгебры A_n такие, что ${}^\tau M = A_n / I$ и $I_1 = I \cap B_1 \neq 0$, где $B_1 = \langle 1, X_1, \ldots, X_n, \partial_1, \ldots, \partial_n \rangle$. Обозначим через $v = 1 + I$ образующий модуля M. Выберем произвольный ненулевой элемент $u \in I_1$, тогда u — не скаляр, так как в противном случае $i \in I$ и $M = 0$ (противоречие). Подкручивая модуль ${}^\tau M$ на подходящий автоморфизм $\sigma \in \mathrm{Aut}_B(A_n)$, мы можем считать, что $u = \partial_1$ (доказательство этого факта приведено в конце доказательства теоремы 4). Поскольку $\partial_1 v = 0$ в ${}^{\sigma\tau}M$, то $A_1 = K[X_1, \partial_1]$ — подмодуль $A_1 v$ в ${}^{\sigma\tau}M$, изоморфный A_1-модулю $A_1 v = W_1$ (и теорема в случае $n = 1$ доказана).

Поскольку алгебра Вейля A_n является тензорным произведением алгебр Вейля $A_n = A_n \otimes A_{n-1}$, то в модуле ${}^{\sigma\tau}M$ содержится A_{n-1}-подмодуль $N = A_{n-1} v$. Тогда в силу теоремы 2 (примененной в случае $M = A_1 v$, $N = A_{n-1} v$ в обозначениях теоремы 2 и простоты A_n-модуля ${}^{\sigma\tau}M$ следует, что A_n-модуль ${}^{\sigma\tau}M = W_1 \otimes N$ является тензорным произведением A_1-модуля W_1 и A_{n-1}-модуля N, причем A_{n-1}-модуль N-прост. Тогда в силу леммы 1. A_{n-1}-модуль N является кратным и доказательство завершаем индукцией по n. Теорема доказана.

3. Доказательство теорем 3 и 4, простые голономные модули.

3.1. Ненулевой A_n-модуль M называется *голономным,* если его размерность равна $d(M) = n$. Пусть $S = K[X_1, \dots, X_n]$ — кольцо многочленов от n переменных и $L = K(X_1, \dots, X_n)$ — поле рациональных функций (= поле частных кольца S).

Теорема 3. *Пусть M — простой голономный A_n-модуль кратности $e(M)$. Тогда существует автоморфизм $\tau \in \mathrm{Aut}_B(A_n)$ такой, что подкрученный на автоморфизм τ A_n-модуль ${}^{\tau}M$ является A_n-подмодулем в $L \otimes {}^{\tau}_{S}M$ и $\dim_L\left(L \otimes {}^{\tau}_{S}M\right) \le e(M)$.*

Доказательство. Пусть $v \in M$ — образующий A_n-модуля M $(M = A_n v)$. На модуле M рассмотрим хорошую фильтрацию $\Gamma = \{\Gamma_i = B_i v\}$, тогда ассоциированный градуированный модуль $\mathrm{gr}(M)$ является циклическим модулем над кольцом многочленов $S_{2n} = \mathrm{gr}(A_n) = K[\overline{X}_1, \dots, \overline{\partial}_n]$ от $2n$ независимых переменных и имеет размерность n и кратность $e(M)$.

Очевидно, $\mathrm{gr}(M) \cong S_{2n}/J$ для некоторого однородного идеала J кольца S_{2n} и, поскольку $d(\mathrm{gr}(M)) = n$, среди образующих $\tilde{X}_1 = \overline{X}_1 + J, \dots, \tilde{\partial}_n = \overline{\partial}_n + J$ кольца S_{2n}/J существует ровно n алгебраически независимых элементов над полем K.

Если $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n$ алгебраически независимы над K, то M содержит свободный S-подмодуль $Sv \cong S$ ранга 1. Тогда в силу простоты A_n-модуль M вкладывается в A_n-модуль $L \otimes_S M$, который является локализацией $T^{-1}M = L \otimes_S M$ A_n-модуля M по мультипликативно замкнутому множеству $T = S - \{0\}$ из A_n. Неравенство $\dim_L(L \otimes_S M) \le e(M)$ очевидно.

Подкручивая A_n-модуль M на автоморфизм из $\mathrm{Aut}_B(A_n)$ вида $\omega_i : X_i \to \partial_i$, $\partial_i \to X_i$ (остальные символы не изменяются), с точностью до нумерации переменных считаем, что элементы из множества $H = \left\{\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_t, \tilde{\partial}_1, \dots, \tilde{\partial}_s\right\}$ являются алгебраически независимыми над K для некоторых $s \le t$, $s + t = n$, и $s \ge 0$ минимально возможное. Покажем, что $s = 0$. Предположим, что это не так, т. е. $s \ge 1$. Пусть $H_1 = H - \{\partial_1\}$, покажем, что среди элементов из $F = \left\{\tilde{X}_i, \tilde{\partial}_i : t < i \le n\right\}$ существует хотя бы один элемент $y \in F$ такой, что элементы из множества $H_2 = H_1 \cup \{y\}$ алгебраически независимы над K.

Пусть это не так, т. е. элементы из H_2 алгебраически зависимы для любого $y \in F$. Обозначим через C подалгебру в A_n, порожденную символами из $H_1 \cup F$, она изоморфна алгебре $C = D \otimes A_m$, где $D = K[X_1, X_{s+1}, \dots, X_t]$ и $m = n - t + s - 1$. Пусть $E = K(X_1, X_{s+1}, \dots, X_t)$ — поле частных кольца D, тогда модуль $N = E \otimes_D Cv$ является ненулевым $A_m(E)$-модулем (над полем E) размерности $d(n) = (n-1) - (t - s + 1) = m - 1$, что противоречит неравенству Бернштейна $d(n) \ge m$. Следовательно, существует хотя бы один элемент y такой, что элементы из H_2 алгебраически независимы.

Если $y = \tilde{\partial}_j$ (соответственно $y = \tilde{X}_j$), то в случае подкрученного A_n-модуля ${}^{\omega_j}M$ (соответственно модуля M) множество H_2 имеет $s - 1$ дифференциалов, что противоречит выбору $s \ge 1$. Теорема доказана.

3.2. Основная цель этого пункта — доказательство следующей теоремы.

Теорема 4. *Пусть* M — *крайний* A_n-*модуль. Тогда существует автоморфизм* $\tau \in \mathrm{Aut}_B(A_n)$ *и левый идеал* I *алгебры* A_n *такие, что* ${}^{\tau}M \cong A_n/I$ *и* $I_1 := I \bigcap B_1 \neq 0$, *где* $B_1 = \langle 1, X_1, \ldots, X_n, \partial_1, \ldots, \partial_n \rangle$.

Доказательство. Поскольку крайний модуль является простым и голономным, то в силу теоремы 3 существует автоморфизм $\tau \in \mathrm{Aut}_B(A_n)$ такой, что ${}^{\tau}M$ является A_n-подмодулем в $L \otimes {}^{\tau}_{S} M = L$ (ибо $e(M) = 1$). Для простоты записи положим $\tau = id$, сохраним все обозначения и определения из 3.1 и доказательства теоремы 3. Отождествим модуль M со своим вложением в L и пусть, как и раньше, v — образующий A_n-модуля M. Тогда для любого $k \geq 1$: $\partial_1^k v = \gamma_k v$ для некоторого $\gamma_k \in L$. Кроме того, последовательность $\{\gamma_k\}$ подчиняется следующим рекуррентным соотношениям:

$$\gamma_k = \gamma'_{k-1} + \gamma_{k-1}\gamma_1, \tag{2}$$

где штрих означает частную производную по X_1.

Для каждой рациональной функции $\gamma = f/g \in L$ $(f, g \in S)$ определим ее *степень*

$$\deg(\gamma) = \deg(f) - \deg(g).$$

Если $\gamma, \delta \in L$, то

$$\deg(\gamma\delta) = \deg(\gamma) - \deg(\delta), \quad \deg(\gamma + \delta) \leq \sup\{\deg(\gamma), \deg(\delta)\},$$
$$\deg(\partial\gamma/\partial X_1) < \deg(\gamma).$$

На кольце многочленов $S = K[X_1, \ldots, X_n]$ рассмотрим обычную фильтрацию по степеням $\{S_i\}$. Пусть $\gamma_1 = f/g$ — несократимая дробь из L. Если $\gamma_1 \in K$, то все доказано, ибо $(\partial_1 - \gamma_1)v = 0$, следовательно, $\partial_1 - \gamma_1 \in I_1$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $\gamma \notin K$.

Случай 1, $\deg(\gamma_1) > 0$. Тогда в силу (2) имеем $\deg(\gamma_k) = k\deg(\gamma_1)$ для любого $k \geq 1$. Покажем, что при $i = [k/\deg(\gamma_1)] + 1$ выполняется равенство

$$S_k v \bigcap S_{k-1}\partial_1^i v = 0 \quad \forall k \geq 1, \tag{3}$$

где $[a]$ — целая часть числа a. Ввиду вложения $M \subset L$ (3) равносильно равенству $S_k g_i \bigcap S_{k-1} f_i = 0$ в кольце S $(\gamma_i = f_i/g_i, f_i, g_i \in S)$, которое очевидно, ибо степень ненулевого элемента из $S_{k-1} f_i$ не меньше $\deg(f_i)$, а степень любого элемента из $S_k g_i$ не превышает $K + \deg(g_i)$. Но $\deg(f_i) - \deg(g_i) - k = i\deg(\gamma_1) - k > 0$ в силу выбора i, откуда следует (3).

Поскольку $\Gamma_k \supset S_k v \oplus S_{k-1}\partial_1^i v$, где $\{\Gamma_k = B_k v\}$ — хорошая фильтрация на M, то

$$\dim\Gamma_k \geq \dim S_k + \dim S_{k-1} = \{k^n + (k - [k/\deg(\gamma_1)] - 1)^n\}/n! + \ldots,$$

где тремя точками обозначены члены меньшего порядка. Так как $\deg(\gamma_1) \geq 2$, то кратность модуля M $e(M) \geq (1 + 1/2^n) > 1$, что противоречит $e(M) = 1$ и, следовательно, случай 1 невозможен.

Случай 2, $\deg(\gamma_1) < 0$. Покажем, что этот случай тоже невозможен. Действительно, в силу рекуррентного соотношения (2) $\deg(\gamma_k) \leq -k$ для любого $k \geq 1$. Докажем, что при $i = [k/2] + 1$

$$S_k v \cap S_{k-1}\partial_1^i v = 0. \tag{4}$$

Это равносильно равенству $S_k g_i \cap S_{k-1} f_i = 0$ в кольце S. Тогда степень ненулевого многочлена из $S_k g_i$ (соответственно, $S_{k-1} f_i$) не меньше $\deg(g_i)$ (соответственно, не больше $\deg(f_i) + k - i$). Поскольку $\deg(g_i) - \deg(f_i) - k + i \geq$ $\geq 2i - k > 0$ в силу выбора i, то (4) очевидно. Отсюда, как и в случае 1, имеем $e(M) \geq (1 + 1/2^n) > 1$ (противоречие).

Случай 3, $\deg(\gamma_1) = 0$ *либо* 1. Поскольку характеристика поля K равна нулю, то при подходящем выборе скаляров $\lambda_i \in K$ с помощью автоморфизма $\tau \in \operatorname{Aut}_B(A_n)$ вида

$$X_i \to X_i + \lambda_i X_1 \ (i = 2, \ldots, n), \ \partial_1 \to \partial_1 - \lambda_2\partial_2 - \ldots - \lambda_n\partial_n$$

мы можем привести f и g к виду

$$f = \mu X_1^m + \alpha_{m-1}X_1^{m-1} + \ldots + \alpha_0, \ \deg(f) = m,$$

$$g = X_1^n + \beta_{n-1}X_1^{n-1} + \ldots + \beta_0, \ \deg(g) = n,$$

где $\alpha_i, \beta_j \in K[X_2, \ldots, X_n]$, $\mu \neq 0 \in K$ и $n = m$ ($\deg(\gamma_1) = 0$) либо $n = m - 1$ ($\deg(\gamma_1) = 1$). И, кроме того, в разложении $g = q_1^{n(1)} \ldots q_t^{n(t)}$ на неразложимые в кольце многочленов S каждый неразложимый многочлен q_i содержит в своей записи переменную X_1, т. е. $q_i \notin K[X_2, \ldots, X_n]$. Поэтому, заменяя модуль M на подкрученный ${}^{\tau}M$, будем считать, что f и g имеют приведенный выше вид.

i) g *имеет кратные сомножители*. Для определенности положим $n(i) \geq 2$ при $i = 1, \ldots, s$; в остальных случаях $n(i) = 1$. Пусть $h = q_1^{n(1)} \ldots q_s^{n(s)}$, тогда $l = \deg(h) \geq 1$, так как $s \geq 1$. Пусть $\gamma_k = f_k / g_k$ — несократимая дробь f_k, $g_k \in S$, $a = q_1, \ldots, q_t$, тогда, записывая рекуррентное соотношение (2) более подробно:

$$\gamma_k = \frac{\left(f'_{k-1}a - f_{k-1}\sum_{i=1}^{t} n_i q_1 \ldots q'_i \ldots q_t\right)}{g_{k-1}a} + \frac{f_{k-1}f}{g_{k-1}g}, \tag{5}$$

видим, что $g_k = h^k b_k$ для некоторого $b_k \in S$. Следовательно, $\deg(g_k) = kl +$ $+ \deg(b_k)$. Покажем, что при $i = [m/2] + 1$

$$S_m v \cap S_{m-1}\partial_1^i v = 0 \quad \forall\, m \geq 1. \tag{6}$$

Очевидно, это равенство равносильно $S_m \cap S_{m-i}\gamma_i = 0$ в L.

Пусть вначале $\deg(\gamma_1) = 0$ и $\alpha = \beta\gamma_i \in S_m \cap S_{m-i}\gamma_i$ для некоторых $\alpha \in$ $\in S_m$, $\beta \in S_{m-1}$, тогда $\deg(\alpha) = \deg(\beta) + \deg(\gamma_i) \leq \deg(\beta)$ (из (2) следует, что $\deg(\gamma_i) = 0 \ \forall\, i \geq 1$) т. е. $\alpha \in S_{m-i}$. Из равенства $\alpha g_i = \beta f_i$, однозначности разложения на неразложимые в кольце многочленов S и несократимости дроби f_i / g_i следует, что $\alpha = c f_i$ для некоторого $c \in S$. Тогда, учитывая, что $\deg(f_i) = \deg(g_i)$ и $l \geq 1$, имеем

$$\deg(c) = \deg(\alpha) - \deg(f_i) = \deg(\alpha) - \deg(g_i) \leq$$
$$\leq m - i - il - \deg(b_i) \leq m - 2i < 0,$$

что доказывает (6). Пусть теперь $\deg(\gamma_1)=1$, тогда в силу (2) $\deg(\gamma_i)=i$ $\forall\, i\geq 1$. Пусть α и β те же, тогда из $\alpha g_i=\beta f_i$ следует, что $\alpha=cf_i$ для некоторого $c\in S$. Тогда, учитывая, что $\deg(\gamma_i)=i$ и $l\geq 1$, имеем

$$\deg(c) = \deg(\alpha)-\deg(f_i) \leq m-i-\deg(g_i) \leq$$

$$\leq m-i-il-\deg(b_i) \leq m-2i < 0,$$

что доказывает (6). Поскольку $\Gamma_k\supset S_k v\oplus S_{k-1}\partial_1^i v$, то

$$\dim(\Gamma_k) \geq \dim(S_k)+\dim(S_{k-i}) = (1+1/2^n)\,k^n/n!+\ldots,$$

следовательно, $e(M)\geq 1+1/2^n>1$, что противоречит $e(M)=1$. Поэтому g не может иметь кратных сомножителей.

ii) *g не имеет кратных сомножителей.* Тогда $g=q_1\ldots q_t$. Пусть, как и раньше, $\gamma_k=f_k/g_k$ — несократимая дробь, причем в силу (5) g_k содержит в своем разложении только сомножители q_i с некоторыми степенями $n(k,i)\geq 0$. Пусть до некоторого момента $\nu>1$ все $g_k=g^k$ при $k=1,\ldots,\nu-1$ и $g_\nu\neq g^\nu$, т. е. числитель и знаменатель дроби γ_ν из (5) сократились на некоторый элемент q_j. Но из (5) следует, что тогда

$$-q_1\ldots q_j'\ldots q_t+f = q_j\alpha_j \quad \text{для некоторого} \quad \alpha_j\in S$$

и это условие не зависит от шага ν, следовательно, сокращение произойдет уже в случае γ_2 ($\nu=2$).

Если (с точностью до перенумерации q_i-х) $g_2=q_1^2\ldots q_s^2 q_{s+1}\ldots q_t$ (т. е. сократятся не все q_i-е), то $g_k=(q_1\ldots q_s)^k q_{s+1}\ldots q_t\ \forall\, k\geq 1$, и поступая так же, как в случае i), придем к противоречию ($e(M)>1$).

Осталась единственная возможность, когда все буквы q_i в g_2 сократятся, т. е. $g_2=g$. В силу (5) это возможно тогда и только тогда, когда

$$-g'+f = \theta g \quad \text{для некоторого} \quad \theta\in S_1,$$

т. е. $\deg(\theta)=0$, если $\deg(\gamma_1)=0$; $\deg(\theta)=1$, если $\deg(\gamma_1)=1$. Отсюда

$$-g'/g+f/g = \theta. \tag{7}$$

Из рекуррентных соотношений следует

$$\gamma_n = g^{-1}(\partial/\partial X_1+\theta)^{n-1}f \quad \forall\, n\geq 1. \tag{8}$$

Расписывая более подробно, имеем

$$\gamma_n = f^{(n-1)}/g+\sum_{i=0}^{n-2}\varphi_{n,i}f^{(i)}/g \quad \text{для некоторых} \quad \varphi_{n,i}\in S, \tag{8}$$

где $f^{(i)}=\partial^i f/\partial X_1^i$. Отсюда, применяя индукцию по n, получаем

$$f^{(n-1)}/g = \sum_{i=1}^{n}\psi_{n-1,i}\gamma_i \quad \text{для некоторых} \quad \varphi_{n-1,i}\in S.$$

Следовательно,

$$0 \neq g^{-1}v = (\mu m!)^{-1} f^{(m)}/gv = (\mu m!)^{-1} \sum_{i=1}^{m+1} \psi_{m,i} \partial_1^i v \in M,$$

где $m = \deg(f)$. Тогда

$$(\partial_1 - \theta)(g^{-1}v) = (-g'/g + f/g - \theta)(g^{-1}v) = 0.$$

Поскольку A_n-модуль M-простой, то, изменяя образующий модуля M с v на $g^{-1}v$, получаем, что $\partial_1 - \theta \in I_1$. Теорема доказана.

1. *Block R. E.* Classification of the irreducible representations of sl (2, ℂ) // Bull. Amer. Math. Soc. – 1979. – **1**, № 1. – P. 247–250.
2. *Block R. E.* The irreducible representations of the Lie algebra sl (2) and of the Weyl algebra// Adv. Math. – 1981. – **39.** – P. 69–110.
3. *Бавула В. В.* Обобщенные алгебры Вейля и их представления // Алгебра и анализ. – 1992. – **4**, вып. 1. – С. 74–95.
4. *Бавула В. В.* Простые $D[X, Y; \sigma, a]$-модули // Укр. мат. журн. – 1992. – **44,** № 12. – С. 1628–1644.
5. *Björk J. E.* Rings of differential operator. – Amsterdam: North Holland, 1979. – 374 p.
6. *Бернштейн И. Н.* Модули над кольцом дифференциальных операторов. Изучение фундаментальных решений уравнений с постоянными коэффициентами // Функцион. анализ и его прил. – 1971. – **5**, № 2. – С. 1–16.
7. *Бавула В. В.* Крайние модули над алгеброй Вейля A_n // 14 Всесоюз. шк. по теории операторов в функцион. пространствах: Тез. докл. – Нижний Новгород, 1991. – С. 16.
8. *Bavula V. V.* Generalized Weyl algebras. – Preprint. – Bielefeld, 1994.
9. *Stafford J. T.* Non-holonomic modules over Weyl algebras and enveloping algebras // Invent. Math. – 1985. – **92–93**. – P. 619–638.
10. *Roos J. E.* Sur les foncteurs derives de lim. Applications // S. R. Acad. Sci. – 1961. – **252**, № 24. – P. 3702–3704.
11. *Gabriel P., Rentschler R.* Sur la dimension des anneaux et ensembles ordonnes // C. R. Acad. Sci. – 1967. – **265**. – P. 712–715.
12. *Dixmier J.* Sur les algebres de Weyl // Bull. Soc. Math. France. – 1968. – **96**. – P. 209–242.

Получено 28.11.94