УДК 517. 926

А. А. Бойчук (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
Е. В. Чуйко, С. М. Чуйко (Славян. пед. ин-т)

ОБОБЩЕННЫЙ ОПЕРАТОР ГРИНА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ВЫРОЖДЕННЫМ ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

We find necessary and sufficient conditions for solvability of nonhomogeneous linear boundary-value problems for systems of ordinary differential equations with impulsive force in a general case where the number of boundary-value conditions in not equal to the order of the differential systems (Noetherian problems). We construct a generalized Greens's operator for boundary-value problems, not every solution of which can be extended from the left end point to the right end point of the interval where the solution is defined.

Одержані необхідні і достатні умови розв'язності лінійних неоднорідних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь з імпульсною дією у випадку, коли кількість крайових умов не співпадає з порядком диференціальної системи (нетерові задачі). Побудовано узагальнений оператор Гріна крайових задач, для яких не всі розв'язки можуть бути продовжені з лівого до правого кінця проміжку, на якому вони будуються.

1. Задача Коши. Исследуем задачу о нахождении условий существования и построении решений

$$z(\cdot) \in C^1\{[a,b]\setminus\{\tau_i\}_I\}$$

системы

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z + f(t), \quad t \in [a,b], \quad t \neq \tau_i, \tag{1}$$

с вырожденным $(\operatorname{rank}(I_n + S_i) = \rho_i \leq n)$ импульсным воздействием в фиксированные моменты времени $t = \tau_i$:

$$\Delta z(\tau_i) = S_i z(\tau_i - 0) + a_i. \tag{2}$$

Здесь $A(t)$ — $(n \times n)$-мерная матрица и $f(t)$ — n-мерная вектор-функция из класса непрерывных по $t \in [a,b]$, $t \neq \tau_i$, при $t = \tau_i$ имеющих разрывы первого рода, a_i — постоянные вектор-столбцы из $\mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \ldots, p$, I_n — единичная $(n \times n)$-мерная матрица.

В отличие от задачи с невырожденным $(\det(I_n + S_i) \neq 0)$ импульсным воздействием [1–3] в случае, когда $\rho_i \leq n$, нормальная $(X(a) = I_n)$ фундаментальная матрица однородной части системы (1), (2), как будет показано ниже, вырождается на полуинтервале $[\tau_i, \tau_{i+1}[\subset [a,b]$, что затрудняет построение частного решения системы (1), (2) методом из [1].

***Пример* 1.** Нормальная $(X(0) = 1)$ фундаментальная матрица системы

$$\frac{dz}{dt} = 0, \quad t \in [0,2], \quad t \neq 1, \quad \Delta z(1) = -z(1-0)$$

имеет вид

$$X(t) = \begin{cases} 1, & t \in [\,0,1\,[, \\ 0, & t \in [\,1,2\,], \end{cases}$$

и обращается в нуль после первого вырожденного $(I_n + S_1 = 0)$ импульса в точке $t = 1$.

Лемма. *Решение задачи Коши*

$$z(a) = c \tag{3}$$

для системы (1), (2) *с вырожденным импульсным воздействием единственно и представимо в виде*

$$z(t,c) = X(t)c + K[f, a_i](t), \tag{4}$$

где $X(t)$ — *нормальная* $(X(a) = I_n)$ *фундаментальная матрица системы* (1), (2), $K[f, a_i](t)$ — *обобщенный оператор Грина задачи Коши* (1)–(3).

Доказательство. Пусть $X_0(t)$ — нормальная $(X_0(t) = I_n)$ фундаментальная матрица однородной дифференциальной системы (1). Тогда фундаментальную матрицу $X(t)$ однородной системы (1), (2) с импульсами ищем в виде

$$X(t) = \begin{cases} X_0(t), & t \in [\, a, \tau_1 [, \\ \dots\dots\dots & \\ X_0(t)Y_i, & t \in [\, \tau_i, \tau_{i+1} [, \\ \dots\dots\dots & \\ X_0(t)Y_p, & t \in [\, \tau_p, b \,]. \end{cases}$$

Для нахождения неизвестных постоянных $(n \times n)$-мерных матриц $Y_1, \dots, Y_p$ имеем равенство

$$\operatorname{diag}\{X_0(\tau_1), \dots, X_0(\tau_p)\} \operatorname{col}(Y_1, \dots, Y_p) =$$
$$= \operatorname{diag}\{(I_n + S_1)X_0(\tau_1), \dots, (I_n + S_p)X_0(\tau_p)\} \operatorname{col}(I_n, Y_1, \dots, Y_{p-1}).$$

В силу невырожденности $(n \cdot p \times n \cdot p)$-мерной матрицы $\operatorname{diag}\{X_0(\tau_1), \dots$ $\dots, X_0(\tau_p)\}$ получаем процедуру построения искомых матриц:

$$Y_1 = X_0^{-1}(\tau_1)(I_n + S_1)X_0(\tau_1),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$Y_i = X_0^{-1}(\tau_i)(I_n + S_i)X_0(\tau_i)Y_{i-1}, \quad i = 2, \dots, p-1, \tag{5}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$Y_p = X_0^{-1}(\tau_p)(I_n + S_p)X_0(\tau_p)Y_{p-1},$$

а следовательно, процедуру построения

$$X(t) = \begin{cases} X_0(t), & t \in [\, a, \tau_1 [, \\ \dots\dots\dots & \\ X_i(t) = X_0(t)X_0^{-1}(\tau_i)(I_n + S_i)X_{i-1}(\tau_i), & i = 2, \dots, p-1, \ t \in [\, \tau_i, \tau_{i+1} [, \\ \dots\dots\dots & \\ X_p(t) = X_0(t)X_0^{-1}(\tau_p)(I_n + S_p)X_{p-1}(\tau_p), & t \in [\, \tau_p, b \,]. \end{cases} \tag{6}$$

В отличие от нормальной фундаментальной матрицы однородной части системы (1), (2) с невырожденными импульсами полученная матрица (6) не сохраняет свой ранг на $[a, b]$, а именно: ранг $X(t)$ вдоль отрезка $[a, b]$ не возрастает. Действительно, после первого вырожденного импульса в момент $t = \tau_j$ $\operatorname{rank} X(t) \le \rho_j = \operatorname{rank}(I_n + S_j)$.

Покажем, что через $X(t)$ выражаются все решения однородной системы (1), (2). Предположим обратное: пусть $\overline{X}(t)$ — еще одна система решений однородной системы (1), (2) и τ_1 — момент вырожденного импульсного воздействия, причем

$$\overline{X}(t) = \begin{cases} X_0(t)W_1, & t \in [\, a, \tau_1 [, \\ X_0(t)W_2, & t \in [\, \tau_1, \tau_2 [, \dots, \end{cases}$$

где W_1, W_2 — некоторые постоянные $(n\times n)$-мерные матрицы. Так как $\overline{X}(t)$ более полная, чем $X(t)$, система решений, $\operatorname{rank} W_2 > \rho_1$, $\det W_1 \neq 0$. Очевидно,

$$X_0(\tau_1)W_2 = (I_n + S_1)X_0(\tau_1)W_1.$$

В силу вырожденности нормальной фундаментальной матрицы $X_0(t)$ однородной части системы (1) и согласно предположению ранг левой части больше ρ_1, в то время как ранг правой равен ρ_1. Полученное противоречие показыает, что через $X(t)$ выражаются все решения однородной системы (1), (2) на $[a, \tau_2[$. Аналогично можно показать, что через $X(t)$ выражаются все решения однородной системы (1), (2) на $[\tau_2, \tau_3[, \ldots, [\tau_p, b]$.

Решение неоднородной задачи Коши (1), (3) на $[a, \tau_1[$ непрерывно и выражается формулой

$$z(t, c) = X_0(t)c + \int_a^t X_0(t)\,X_0^{-1}(s)f(s)\,ds.$$

Решение неоднородной задачи Коши (1), (3) на $[\tau_1, \tau_2[$ ищем в виде

$$z(t, \gamma_1) = X_0(t)\gamma_1 + \int_a^t X_0(t)\,X_0^{-1}(s)f(s)\,ds.$$

Учитывая (2), имеем $\gamma_1 = Y_1 c + \overline{\gamma}_1$, где

$$\overline{\gamma}_1 = X_0^{-1}(\tau_1)\left\{S_1X_0(\tau_1)\int_a^{\tau_1} X_0^{-1}(s)f(s)ds + a_1\right\}.$$

Следовательно, решение неоднородной задачи Коши (1)–(3) на $[\tau_1, \tau_2[$ имеет вид

$$z(t, c) = X(t)c + K_1[f, a_1](t),$$

где

$$K_1[f, a_1](t) = X_0(t)\overline{\gamma}_1 + X_0(t)\int_a^t X_0^{-1}(s)f(s)\,ds.$$

Полагая, что на $[\tau_{i-1}, \tau_i[$, $i = 2, \ldots, p$, решение задачи Коши (1)–(3) имеет вид

$$z(t, c) = X(t)c + K_{i-1}[f, a_{i-1}](t), \quad \gamma_{i-1} = Y_{i-1}c + \overline{\gamma}_{i-1},$$

$$K_{i-1}[f, a_{i-1}](t) = X_0(t)\overline{\gamma}_{i-1} + X_0(t)\int_a^t X_0^{-1}(s)f(s)\,ds,$$

решение неоднородной задачи Коши (1), (3) на $[\tau_i, \tau_{i+1}[$ ищем в виде

$$z(t, \gamma_i) = X_0(t)\gamma_i + \int_a^t X_0(t)\,X_0^{-1}(s)f(s)\,ds.$$

Учитывая (2), имеем $\gamma_i = Y_i c + \overline{\gamma}_i$, где

$$\overline{\gamma}_i = X_0^{-1}(\tau_i)\left\{(I_n + S_i)X_0(\tau_i)\overline{\gamma}_{i-1} + S_iX_0(\tau_i)\int_a^{\tau_i} X_0^{-1}(s)f(s)ds + a_i\right\}.$$

Таким образом, решение неоднородной задачи Коши (1)–(3) на $[\tau_i, \tau_{i+1}[$ имеет вид

$$z(t, c) = X(t)c + K_i[f, a_i](t), \quad \gamma_i = Y_i c + \bar{\gamma}_i,$$

$$K_i[f, a_i](t) = X_0(t)\bar{\gamma}_i + X_0(t)\int_a^t X_0^{-1}(s)f(s)\,ds.$$

Решение неоднородной задачи Коши (1)–(3) на $[a, b]$ при этом представимо в виде (4), где

$$K[f, a_i](t) = \begin{cases} X_0(t)\int_a^t X_0^{-1}(s)f(s)ds, & t \in [a, \tau_1[, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ K_i[f, a_i](t), & t \in [\tau_i, \tau_{i+1}[, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ K_p[f, a_p](t), & t \in [\tau_p, b], \end{cases} \tag{7}$$

— обобщенный оператор Грина задачи Коши (1)–(3). Лемма доказана.

В формулировке леммы требование $X(a) = I_n$ для фундаментальной матрицы системы (1)–(3) существенно, поскольку невозможно построить фундаментальную матрицу решений однородной системы (1), (2), нормированную вправо от момента первого вырожденного импульса.

Действительно: пусть

$$i = \min_j (j, \rho_j < n), \quad t_0 \in [\tau_i, \tau_{i+1}[,$$

$X_0(t)$ — нормированная в момент $t = t_0$ фундаментальная матрица решений однородной дифференциальной системы (1) и искомая нормальная $(X(t_0) = I_n)$ фундаментальная матрица однородной системы (1), (2) на промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1}[$ совпадает с $X_0(t)$. Очевидно, эта система решений продолжима вправо. Покажем невозможность продолжения ее влево от τ_i. Предположим обратное: пусть на промежутке $[\tau_{i-1}, \tau_i[$ $X(t) = X_0(t)W$, где W — неизвестная постоянная $(n \times n)$-мерная матрица, для нахождения которой имеем уравнение

$$X_0(\tau_i) = (I_n + S_1)X_0(\tau_i)W.$$

Это уравнение неразрешимо, поскольку даже при невырожденности W ранг левой части (n) больше ранга правой части $(\rho_i < n)$.

Непродолжимость влево от вырожденного импульса, например τ_1, всего семейства решений однородной дифференциальной системы (1), на $[\tau_1, \tau_2[$ представимого матрицей $X_0(t)$, не противоречит возможности построения фундаментального семейства решений, выраженного нормальной $(X(a) = I_n)$ фундаментальной матрицей $X(t)$. Действительно, $\rho_1 = \operatorname{rank}(I_n + S_1)$ — параметрическое семейство решений системы (1), (2), на $[\tau_1, \tau_2[$ представимое матрицей $X_0(t)X_0^{-1}(\tau_1)(I_n + S_1)X_0(\tau_i)$, продолжимо влево, поскольку, предполагая, что на $[a, \tau_1[$ фундаментальная матрица решений системы (1), (2) имеет вид $X_0(t)W$, для нахождения неизвестной $(n \times n)$-мерной матрицы W получаем уравнение

$$(I_n + S_1)X_0(\tau_1) = (I_n + S_1)X_0(\tau_1)W,$$

разрешимое относительно $(n \times n)$-мерной матрицы $X_0(\tau_1)W$, поскольку

$$P_{(I_n+S_1)^*}(I_n+S_1)X_0(\tau_1) = 0.$$

Решение последнего уравнения относительно W очевидно: $W = I_n$, следовательно, построенная нами на $[\tau_1, \tau_2[$ матрица решений $X(t)$ продолжается влево решением $X_0(t) \equiv X(t)$ при $t \in [a, \tau_1[$.

***Пример* 2.** Построим решение задачи Коши $(z(0) = c)$ вида

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt} = 1, \quad t \in [0, 2], \ t \neq \tau_i, \ \tau_i = 1/2, \ 3/2, \\ \Delta z(\tau_i) = -z(\tau_i - 0). \end{cases} \tag{8}$$

Согласно лемме $X(t) = 1$, $z(t, c) = c + t$, $t \in [0, 1/2[$. Далее, $\gamma_1 = -1/2$, поэтому $Y_1 = 0$, $\bar{\gamma}_1 = -1/2$, $X(t) = 0$, $z(t) = t - 1/2$ при $t \in [1/2, 3/2[$. Поскольку $\gamma_2 = \bar{\gamma}_2 = -3/2$,

$$X(t) = 0, \quad z(t) = t - 3/2, \quad t \in [3/2, 2[.$$

Таким образом, решение задачи Коши (8)

$$z(t, c) = \begin{cases} c + t, & t \in [0, 1/2[, \\ t - 1/2, & t \in [1/2, 3/2[, \\ t - 3/2, & t \in [3/2, 2], \end{cases}$$

на промежутке $[0, 1/2]$ однопараметрично и после первого вырожденного импульса становится единственным.

2. Линейная краевая задача (некритический случай). Найдем условия существования и представление решения системы (1), (2), удовлетворяющего краевому условию

$$lz(\cdot, c) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^m, \tag{9}$$

где $lz(\cdot)$ — линейный ограниченный векторный функционал

$$l: C\{[a, b] \setminus \{\tau_i\}_I\} \to \mathbb{R}^m.$$

Обозначим $Q = lX(\cdot)$. По аналогии с [5, 6] в случае $\det Q \neq 0$ будем говорить, что справедлив некритический случай, если же $\det Q = 0$ — критический.

Некритической, например, является задача Коши (1)–(3), поскольку $\det Q = \det X_0(a) = 1 \neq 0$.

Теорема 1. *Некритическая* $(\det Q \neq 0)$ *краевая задача* (1), (2), (9) *разрешима и имеет единственное решение*

$$z(t) = G_0[f, a_i](t),$$

где

$$G_0[f, a_i](t) = X(t)Q^{-1}\{\alpha - lK[f, a_i](\cdot)\} + K[f, a_i](t)$$

— *обобщенный оператор Грина некритической задачи* (1), (2), (9).

Доказательство теоремы аналогично [4, 5] и не представляет затруднений.

***Пример* 3.** Некритической является 2-периодическая задача для системы (8). Действительно, поскольку $X(0) = 1$, $X(2) = 0$, то $Q = 1$. Поэтому согласно теореме 1 система (8) имеет единственное 2-периодическое решение

$$z(t) = \begin{cases} 1/2 + t, & t \in [0, 1/2[, \\ t - 1/2, & t \in [1/2, 3/2[, \\ t - 3/2, & t \in [3/2, 2]. \end{cases}$$

3. Критический случай. Условия разрешимости и структуру решений краевой задачи (1), (2), (9) в критическом случае определяет следующая теорема.

Теорема 2. *В критическом* $(\operatorname{rank} Q = n - r)$ *случае система* (1), (2), (9) *разрешима тогда и только тогда, когда*

$$P_{Q_d^*}\{lK[f, a_i](\cdot) - \alpha\} = 0. \tag{10}$$

При этом система (1), (2), (9) *имеет r-параметрическое семейство решений*

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f, a_i](t),$$

где

$$G[f, a_i](t) = X(t)Q^+\{\alpha - lK[f, a_i](\cdot)\} + K[f, a_i](t) \tag{11}$$

— обобщенный оператор Грина задачи (1), (2), (9) *в критическом случае,* $X_r(t) = X(t)P_{Q_r}$ *—* $(n \times r)$*-мерная матрица-базис решений однородной краевой задачи* (1), (2), (9), P_Q *—* $(n \times n)$*-мерная матрица-ортопроектор:* $\mathbb{R}^n \to N(Q)$, P_{Q_r} *—* $(n \times r)$*-мерная матрица полного ранга, блок ортопроектора* P_Q, Q^+ *— псевдообратная к* Q *матрица* [4], $d = m - \operatorname{rank} Q$.

В отличие от задачи нахождения гладких решений задачи (1), (9) задача Коши $(z(t_0) = c)$ для системы (1), (2), (9) при

$$t_0 > \tau_i = \min_j (\tau_j, \rho_j < n) \tag{12}$$

будет критической, поскольку в этом случае $\operatorname{rank} Q \le \rho_j < n$.

***Пример* 4.** Критической будет, например, задача Коши $(z(1) = 1)$ для системы (8), поскольку в этом случае $Q = X(1) = 0$. Более того, эта задача будет неразрешима, поскольку

$$P_{Q_d^*}\{lK[f, a_i](\cdot) - \alpha\} = -1/2 \ne 0.$$

4. Периодическая задача. Критический случай. Необходимые и достаточные условия существования решений T-периодической задачи

$$lz(\cdot, c_r) = z(0, c_r) - z(T, c_r) \tag{13}$$

для системы (1), (2) определяет следующая теорема.

Теорема 3. *Критическая T-периодическая задача* (1), (2), (13) $(a_{i+p} = a_i,$ $\tau_{i+p} = \tau_i + T,$ $S_{i+p} = S_i)$ *с T-периодической функцией* $f(t)$ *инеет решения тогда и только тогда, когда*

$$P_{Q_d^*}K_p[f, a_p](T) = 0. \tag{14}$$

При условии (14) *краевая задача* (1), (2), (13) *имеет решение вида*

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f, a_i](t),$$

где

$$G[f, a_i](t) = X(t)Q^+\{\alpha - K_p[f, a_p](T)\} + K[f, a_i](t) \tag{15}$$

— обобщенный оператор Грина задачи (1), (2), (13) *в критическом случае,* $X_r(t) = X(t)P_{Q_r}$ *—* $(n \times n)$*-мерная матрица-базис T-периодических решений однородной краевой задачи* (1), (2), (13).

***Пример* 5.** Найдем π-периодические решения системы

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt} = Az + f(t), \quad t \in [0, \pi], \ t \ne \pi/2, \\ \Delta z(\pi/2) = S_1 z(\pi/2 - 0) + a_1, \end{cases} \tag{16}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} J_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad f(t) = \begin{bmatrix} \sin 2t \\ \cos 2t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} -2I_2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Используя (6), строим матрицу решений

$$X(t) = \begin{cases} \operatorname{diag}(X_2(t), \exp t), & t \in [\,0, \pi/2\,[, \\ \operatorname{diag}(-X_2(t), 0), & t \in [\,\pi/2, \pi\,], \end{cases}$$

где

$$X_2(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}.$$

Поскольку матрица

$$Q = \begin{bmatrix} 0_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

вырождена, имеет место критический случай. Условие (10) разрешимости π-периодической задачи (16) выполнено, поскольку $K_1[f, a_1] = 0$. Обобщенный оператор Грина π-периодической задачи (16) имеет вид $G[f, a_1](t) = K[f, a_1](t)$. Согласно (15) имеем

$$K[f, a_1](t) = \begin{bmatrix} \cos t - \cos 2t \\ -\sin t + \sin 2t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t \in [0, \pi/2[,$$

$$K[f, a_1](t) = \begin{bmatrix} -\cos t - \cos 2t \\ \sin t + \sin 2t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t \in [\pi/2, \pi].$$

Таким образом, согласно теореме 3 π-периодическая задача (16) имеет решение вида

$$z(t, c) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} c_2 + \begin{bmatrix} \cos t - \cos 2t \\ -\sin t + \sin 2t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t \in [0, \pi/2[, \quad c_2 \in \mathbb{R}^2,$$

$$z(t, c) = \begin{bmatrix} -\cos t & \sin t \\ -\sin t & -\cos t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} c_2 + \begin{bmatrix} -\cos t - \cos 2t \\ \sin t + \sin 2t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t \in [\pi/2, \pi], \quad c_2 \in \mathbb{R}^2.$$

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 267 с.

2. *Schwabik Š.* Differential equations with interface conditions // Časopis pro pestovani matematiky. – 1980. – **105.** – P. 391–408.

3. *Бойчук А. А., Перестюк Н. А., Самойленко А. М.* Периодические решения импульсных периодических систем в критических случаях // Дифференц. уравнения. – 1991. – № 9. – С. 1516–1521.

4. *Бойчук А. А.* Конструктивные методы анализа краевых задач. – Киев: Наук. думка, 1990. – 96 с.

5. *Бойчук А. А., Чуйко С. М.* Автономные слабонелинейные краевые задачи // Дифференц. уравнения. – 1992. – № 10. – С. 1668–1674.

Получено 23.11.94