УДК 517.5

Н. В. Зорий (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОДНА НЕКОМПАКТНАЯ ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ РИСОВА ПОТЕНЦИАЛА. II*

We study certain generalizations of the well-known minimum Riesz energy problem for condensers. Under rather general assumptions, we obtain a number of necessary and sufficient conditions for existence of minimal measures.

Досліджується узагальнення відомої задачі про мінімум енергії Ріса на конденсаторах. При досить широких припущеннях одержано необхідні та достатні умови існування мінімальних зарядів.

В [1] сформулирована и частично исследована одна экстремальная задача теории рисова потенциала, обобщающая в нескольких направлениях известную задачу о минимуме энергии Риса на конденсаторах [2, 3]. Настоящая работа является продолжением [1]; в ней продолжена нумерация пунктов, формул и утверждений из [1]; без дополнительных указаний сохраняются все принятые в [1] предположения и обозначения.

Напомним постановки исследуемых задач.

Пусть m и n — фиксированные натуральные числа; $I_+ := \{1, \dots, m\}$, $I_- := \{m+1, \dots, m+n\}$ и $I := I_+ \cup I_-$ — множества индексов; $A_i, i \in I,$ — замкнутые попарно не пересекающиеся множества из евклидова пространства $\mathbb{R}^p$, $p \geq 3$. Обозначим $\mathcal{A}^+ := \{A_i\}_{i \in I_+}$, $\mathcal{A}^- := \{A_i\}_{i \in I_-}$.

Пусть $a_i, i \in I,$ — неотрицательные числа. Для (m, n)-конденсатора $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^+, \mathcal{A}^-)$, множества чисел $a := \{a_i\}_{i \in I}$ и всякого подмножества индексов $I_0 \subset I$, содержащего I_+, рассмотрим класс $\mathfrak{N}(\mathcal{A}, a, I_0)$ всех борелевских зарядов $\nu = \nu^+ - \nu^-$, $\nu^\pm \geq 0$, таких, что ν^+ и ν^- сосредоточены соответственно на $|\mathcal{A}^+| := \bigcup_{i \in I_+} A_i$ и $|\mathcal{A}^-| := \bigcup_{i \in I_-} A_i$ и удовлетворяют условиям нормировки $|\nu(A_i)| = a_i$ для всех $i \in I_0$.

Пусть $\alpha \in (0, p)$, $k_\alpha(x, y) := |x - y|^{\alpha - p}$ — ядро Риса в $\mathbb{R}^p$. Вариационную задачу теории рисова потенциала о существовании в классе $\mathfrak{N}(\mathcal{A}, a, I_0)$ заряда $\chi \equiv \chi(\mathcal{A}, a, I_0)$ с минимальной энергией $\|\chi\|_\alpha^2 = V_\alpha(\mathcal{A}, a, I_0)$,

$$V_\alpha(\mathcal{A}, a, I_0) := \inf_{\nu \in \mathfrak{N}(\mathcal{A}, a, I_0)} \|\nu\|_\alpha^2,$$

назовем $(\mathcal{A}, a, I_0)$-задачей. Будем говорить, что $(\mathcal{A}, a, I_0)$-задача разрешима, если минимальный заряд χ существует.

Основная исследуемая здесь и в [1] экстремальная задача соответствует крайнему случаю $I_0 = I$. Достигнутый в работе критерий ее разрешимости дается в терминах экстремалей во вспомогательной $(\mathcal{A}, a, I_0)$-задаче с надлежащим I_0, не равным I.

Вариационную $(\mathcal{A}, a, I)$-задачу назовем, для краткости, $(\mathcal{A}, a)$-задачей. Соответственно обозначим $\mathfrak{N}(\mathcal{A}, a, I) =: \mathfrak{N}(\mathcal{A}, a)$, $V_\alpha(\mathcal{A}, a, I) =: V_\alpha(\mathcal{A}, a)$.

Пусть выполнено естественное предположение $V_\alpha(\mathcal{A}, a) < \infty$ (или, что равносильно, пусть $C_\alpha(A_i) > 0$ для всех $i \in I$ с $a_i \neq 0$). Тогда для всякого I_0

* Работа частично финансирована Международным научным фондом (грант № UB 4000) и Государственным комитетом Украины по вопросам науки и технологий.

— и, в частности, для I_0, равного I, — существует (единственный) экстремальный в $(\mathcal{A}, a, I_0)$-задаче заряд $\lambda \equiv \lambda_{I_0} \equiv \lambda(\mathcal{A}, a, I_0)$ — заряд, являющийся сильным пределом всякой минимизирующей последовательности $\{\nu_k\} \subset \mathfrak{N}(\mathcal{A}, a, I_0)$ [1]. Разрешимость $(\mathcal{A}, a, I_0)$-задачи равносильна выполнению равенств $|\lambda(A_i)| = a_i$ для всех $i \in I_0$. Однако в силу некомпактности класса $\mathfrak{N}(\mathcal{A}, a, I_0)$ такие соотношения не всегда верны, простейшие примеры их нарушения приведены в [1].

Будем говорить, что $(\mathcal{A}, a, I_0)$-задача A_i-разрешима, $i \in I_0$, если для ее экстремального заряда λ выполняется

$$|\lambda(A_i)| = a_i. \tag{37}$$

7. Достаточные условия разрешимости и A_i-разрешимости $(\mathcal{A}, a, I_0)$-задачи. В этом пункте приведены утверждения, показывающие, что при условии „достаточной малости" множества A_i, $i \in I_0$, вариационная $(\mathcal{A}, a, I_0)$-задача A_i-разрешима при любом a.

Теорема 6. *Пусть конденсатор $\mathcal{A}$ удовлетворяет условию отделимости* $\operatorname{dist}(|\mathcal{A}^+|, |\mathcal{A}^-|) > 0$. *Вариационная $(\mathcal{A}, a, I_0)$-задача A_i-разрешима, $i \in I_0$, если α-емкость множества A_i конечна:*

$$C_\alpha(A_i) < \infty. \tag{38}$$

Доказательство. Зафиксируем индекс $i \in I_0$, удовлетворяющий условию (38). Пусть, как и в [1], λ^i обозначает сужение λ на A_i, и $B_k := \{x: |x| < r_k\}$, $r_k \nearrow \infty$ при $k \to \infty$, — последовательность шаров, нормальных для меры $|\lambda^i|$ (такая последовательность существует в силу конечности $|\lambda^i|(1)$ [4]). Обозначим $F_k := A_i \setminus B_k$, $k = 1, 2, \ldots$.

Пусть $\{\nu_l\}$ — минимизирующая в $(\mathcal{A}, a, I_0)$-задаче последовательность с ограниченным множеством $\{|\nu_l|(1)\}$; ее существование доказано в лемме 3. Покажем справедливость равенства

$$\lim_{k, l \to \infty} \nu_l(F_k) = 0. \tag{39}$$

Предположим выполненным условие

$$C_\alpha(F_k) > 0 \quad \forall\, k, \tag{40}$$

ибо в противном случае (39) очевидно в силу C-абсолютной непрерывности зарядов ν_l, $l = 1, 2, \ldots$.

Пусть γ_k, $k = 1, 2, \ldots$, — равновесные меры (замкнутых) множеств F_k, они существуют в силу условий (38) и (40). В принятых предположениях, очевидно, выполняется соотношение

$$\lim_{k \to \infty} \|\gamma_k\|^2 = 0. \tag{41}$$

Так как $\mathcal{U}_\alpha^{\gamma_k}(x) \ge 1$ квазивсюду на F_k, имеем

$$|\nu_l(F_k)| = \int_{F_k} d|\nu_l|(x) \le \int_{F_k} \mathcal{U}_\alpha^{\gamma_k}(x)\, d|\nu_l|(x) \le (\gamma_k, |\nu_l|) \quad \forall\; k,\; l.$$

После применения неравенства Коши–Буняковского отсюда получаем

$$|\nu_l(F_k)| \le \|\gamma_k\| \left\|\nu_l^+ + \gamma_l^-\right\| \quad \forall\ k,\ l. \tag{42}$$

В силу ограниченности множества $\{|\nu_l|(1)\}$ и условия отделимости взаимные энергии $\left(\nu_l^+, \nu_l^-\right)$ равномерно ограничены. Отсюда и из конечности предела $\lim\limits_{l\to\infty} \|\nu_l\|^2$ вытекает равномерная ограниченность энергий $\|\nu_l^+ + \gamma_l^-\|^2$. В силу изложенного выше из (41) и (42) находим (39).

Меры $|\nu_l^i|$, полученные сужением $|\nu_l|$ на A_i, при $l\to\infty$ слабо сходятся к $|\lambda^i|$ (см. следствие 1). Учитывая нормальность B_k для $|\lambda^i|$, имеем

$$|\lambda^i|(1) = \lim_{k\to\infty} |\lambda^i|(B_k) = \lim_{k\to\infty}\lim_{l\to\infty} |\nu_l^i|(B_k) =$$
$$= \lim_{k\to\infty}\lim_{l\to\infty} [a_i - |\nu_l|(F_k)],$$

что в силу (39) доказывает искомое соотношение (37). Теорема 6 доказана.

***Следствие* 7.** *Пусть конденсатор $\mathcal{A}$ удовлетворяет условию отделимости и условию*

$$C_\alpha(|\mathcal{A}_0|) < \infty, \tag{43}$$

где $|\mathcal{A}_0| := \bigcup_{i\in I_0} A_i$. Тогда для любого множества чисел a вариационная $(\mathcal{A}, a, I_0)$-задача разрешима.

***Следствие* 8.** *Пусть $|\mathcal{A}^-| = \varnothing$. Для того чтобы в классе всех мер μ на $|\mathcal{A}^+|$ с нормировкой $\mu(A_i) = a_i$ для всех $i\in I_+$ существовала мера с минимальной α-энергией, необходимо и достаточно, чтобы для всех $i\in I_+$ с $a_i \ne 0$ выполнялось $C_\alpha(A_i) < \infty$.*

Доказательство. Для всякого подмножества индексов $I'\subset I$ через $a_{I'}$ обозначим множество чисел a_i', $i\in I$, равных a_i при $i\in I'$ и нулю при $i\notin I'$.

Докажем необходимую часть утверждения следствия 8, его достаточная часть доказана в теореме 6. Пусть существует индекс $j\in I_+$ такой, что $a_j\ne 0$, $C_\alpha(A_j) = \infty$. В силу последнего существует последовательность мер $\{\mu_k\}$ на A_j с $\mu_k(1) = a_j$ для всех k, сходящаяся к нулю в сильной — а потому и в слабой — топологиях. Тогда для каждой минимизирующей в $(\mathcal{A}, a_{I\setminus\{j\}})$-задаче последовательности мер $\{\omega_k\}$ выполняется $\{\omega_k + \mu_k\}\subset \mathfrak{N}(\mathcal{A}, a)$ и

$$V_\alpha(\mathcal{A}, a) \le \lim_{k\to\infty} \|\omega_k + \mu_k\|^2 = \lim_{k\to\infty} \|\omega_k\|^2 = V_\alpha(\mathcal{A}, a_{I\setminus\{j\}}).$$

А так как, очевидно, в предположениях следствия 8 $V_\alpha(\mathcal{A}, a) \ge V_\alpha(\mathcal{A}, a_{I\setminus\{i\}})$ для всех i, следовательно, последовательность $\{\omega_k + \mu_k\}$ минимизирующая в $(\mathcal{A}, a)$-задаче, и потому она сходится к экстремальному в этой задаче заряду λ. Отсюда находим, что мера λ^j как слабый предел последовательности $\{\mu_k\}$ равна нулю, что в силу допущения $a_j\ne 0$ показывает неразрешимость $(\mathcal{A}, a)$-задачи. Следствие 8 доказано.

Пусть I_s — некоторое подмножество (может быть, пустое) множества всех индексов $i\in I_0$, для которых $(\mathcal{A}, a, I_0)$-задача A_i-разрешима.

Теорема 7. *Пусть существуют заряд* θ *с конечной* α*-энергией и множество* I_θ, *содержащееся в* $I_0 \cap I_+$ *(аналогично, в* $I_0 \cap I_-$*), такие, что для всех* $i \in I$ *выполняется*

$$\mathcal{U}_\alpha^\theta(x) = \alpha_i \quad \text{квазивсюду на } A_i, \tag{44}$$

где

$$\alpha_i := \begin{cases} 1 & \text{для } i \in I_\theta \cup I_s; \\ 0 & \text{для всех других } i. \end{cases} \tag{45}$$

Тогда $(\mathcal{A}, a, I_0)$*-задача* A_i*-разрешима для всех* $i \in I_\theta$.

Доказательство. Пусть $\{\nu_k\} \subset \mathfrak{N}(\mathcal{A}, a, I_0)$ — некоторая минимизирующая последовательность. Тогда $(\theta, \nu_k) \to (\theta, \lambda)$ при $k \to \infty$, откуда в силу соотношений (44) и (45) получаем

$$\sum_{i \in I_\theta \cup I_s} \lambda(A_i) = (\theta, \lambda) = \lim_{k \to \infty} (\theta, \nu_k) = \sum_{i \in I_\theta \cup I_s} \beta_i a_i,$$

где β_i равно 1 при $i \in I_+$ и (-1) при $i \in I_-$. А так как $\lambda(A_i) = \beta_i a_i$ для всех $i \in I_s$, отсюда и из определения множества I_θ находим

$$\sum_{i \in I_\theta} |\lambda(A_i)| = \sum_{i \in I_\theta} a_i,$$

что в силу неравенств $|\lambda(A_i)| \le a_i$ для всех $i \in I_0$ доказывает теорему.

Обозначим $|\mathcal{A}| := \bigcup_{i \in I} A_i$. Далее до конца этого пункта будем предполагать, что $0 < \alpha \le 2$.

Для замкнутого множества $F \subset \mathbb{R}^p$ через $g_F^\alpha(x, y)$ обозначим α-функцию Грина (открытого) множества $\mathbb{R}^p \setminus F$, определяемую равенством [4, 5]

$$g_F^\alpha(x, y) := \mathcal{U}_\alpha^{\varepsilon_y}(x) - \mathcal{U}_\alpha^{\beta_F^\alpha \varepsilon_y}(x), \quad y \notin F.$$

Здесь ε_y — единичная мера Дирака в точке y, а β_F^α — оператор α-выметания на множество F. Пусть $C_{g_F^\alpha}(Q)$ — g_F^α-емкость [6] измеримого по емкости множества $Q \subset \mathbb{R}^p \setminus F$.

Следствие 9. *Пусть для некоторого множества индексов* I_*, *содержащегося в* $I_0 \cap I_+$ *(аналогично, в* $I_0 \cap I_-$*), выполняется неравенство*

$$C_{g^\alpha_{|\mathcal{A}| \setminus H}}(H) < \infty,$$

где $H := \bigcup_{i \in I_* \cup I_s} A_i$. *Тогда* $(\mathcal{A}, a, I_0)$*-задача* A_i*-разрешима для всех* $i \in I_*$.

Утверждение следствия 9 вытекает из теоремы 7 при θ, равном равновесной мере множества H относительно ядра $g^\alpha_{|\mathcal{A}| \setminus H}$ [6], и I_θ, равном I_*.

Следствие 10. *Если выполнено условие*

$$C_{g^\alpha_{|\mathcal{A}| \setminus |\mathcal{A}_0^+|}}\left(|\mathcal{A}_0^+|\right) + C_{g^\alpha_{|\mathcal{A}| \setminus |\mathcal{A}_0^-|}}\left(|\mathcal{A}_0^-|\right) < \infty, \tag{46}$$

где $|\mathcal{A}_0^+| := |\mathcal{A}^+| \cap |\mathcal{A}_0|$, $|\mathcal{A}_0^-| := |\mathcal{A}^-| \cap |\mathcal{A}_0|$, *то для любого* a *вариационная* $(\mathcal{A}, a, I_0)$*-задача разрешима.*

***Следствие* 11.** *Пусть $C_\alpha(|\mathcal{A}|) < \infty$. Вариационная $(\mathcal{A}, a)$-задача разрешима, если она A_i-разрешима для всех $i \in I_+$ (аналогично для всех $i \in I_-$).*

Утверждение следствия 11 вытекает из теоремы 7 при $I_s = I_+$, $I_\theta = I_-$ и мере θ, решающей проблему α-равновесия на $|\mathcal{A}|$.

***Следствие* 12.** *Для того чтобы в классе мер μ на $|\mathcal{A}^+|$ с $\mu(A_i) = a_i$ для всех $i \in I_+$ существовала мера с минимальной $g^\alpha_{|\mathcal{A}^-|}$-энергией, необходимо и достаточно, чтобы для всех $i \in I_+$ с $a_i \neq 0$ выполнялось $C_{g^\alpha_{|\mathcal{A}^-|}}(A_i) < \infty$.*

Доказательство. Задача о минимуме функционала $g^\alpha_{|\mathcal{A}^-|}$-энергии в классе $\mathfrak{N}(\mathcal{A}, a_{I_+})$ равносильна задаче минимизации в этом классе функционала $\left\|\mu - \beta^\alpha_{|\mathcal{A}^-|}\mu\right\|^2_\alpha$, а потому (см. лемму 1) $(\mathcal{A}, a, I_+)$-задаче. Поэтому достаточная часть утверждения следствия 12 вытекает из следствия 9. Необходимая его часть доказывается аналогично доказательству необходимого утверждения следствия 8.

В связи с утверждениями следствий 8 и 12 заметим, что рассматриваемая в них задача о минимуме энергий на классах (неотрицательных) мер формулировалась (для ядер, удовлетворяющих весьма общему набору аксиом, и в постановке, включающей более общий, чем в данной статье, вид функционала и связанных с ним нормировочных условий) и изучалась в [7]. При этом исследовались вопросы существования экстремальных мер как предельных (в том или ином смысле) элементов минимизирующих последовательностей, их единственности, описания потенциалов. Вопрос существования минимальных мер исследовался в [7] при дополнительном предположении компактности множеств.

8. Условия разрешимости $(\mathcal{A}, a)$-задачи. Для конденсатора $\mathcal{A}$ множество всех тех a, для которых $(\mathcal{A}, a)$-задача разрешима, обозначим через $s(\mathcal{A})$ и назовем множеством разрешимости.

В этом пункте приведены утверждения, определяющие как достаточные, так и необходимые условия на конденсатор $\mathcal{A}$ и набор чисел a, при которых $a \in s(\mathcal{A})$. Условия на a определяются (явно или неявно) в терминах экстремалей во вспомогательной $(\mathcal{A}, a, I_0)$-задаче с надлежащим множеством индексов I_0, $I_0 \neq I$.

Теорема 8. *Предположим, что для некоторого номера $j \in I_-$ выполняется равенство*

$$C_\alpha(A_j) = \infty. \tag{47}$$

Вариационная $(\mathcal{A}, a)$-задача не разрешима для всех наборов чисел a таких, что

$$a_j > c(\alpha) \sum_{i \in I_+} a_i, \tag{48}$$

где $c(\alpha)$ равно $2^{p-\alpha}$ при $\alpha > 2$ и 1 при $\alpha \le 2$.

Доказательство. В доказательстве всех утверждений этого пункта используется последовательность $\mathcal{A}_k = \left(\mathcal{A}^+_k, \mathcal{A}^-_k\right)$, $k = 1, 2, \dots$, компактных (m, n)-конденсаторов, аппроксимирующих $\mathcal{A}$ в смысле выполнения соотношений

$$A^k_i \subset A^{k+1}_i, \quad A_i = \bigcup_{k=1}^{\infty} A^k_i \quad \forall\, i,\ k,$$

где A_i^k, $i \in I$, — пластины конденсатора $\mathcal{A}_k$. Пусть $\lambda_k := \lambda(\mathcal{A}_k, a, I)$ и $\tilde{\lambda}_k := \lambda(\mathcal{A}_k, a, I_0)$, $k = 1, 2, \ldots$, — минимальные заряды соответственно в $(\mathcal{A}_k, a)$- и $(\mathcal{A}_k, a, I_0)$-задачах, а λ_k^i и $\tilde{\lambda}_k^i$, $i \in I$, $k = 1, 2, \ldots$, — сужения соответственно λ_k и $\tilde{\lambda}_k$ на A_i.

Пусть выполнены условия (47), (48) теоремы 8 и $I_0 := I \setminus \{j\}$. Тогда верны соотношения [1]

$$\left|\tilde{\lambda}_k^i(1)\right| = a_i \quad \forall\, i \neq j, \quad \forall\, k, \tag{49}$$

$$\left|\tilde{\lambda}_k^j(1)\right| = P_{A_j}^{\alpha}\left(\tilde{\lambda}_k - \tilde{\lambda}_k^j\right)(1) \quad \forall\, k, \tag{50}$$

где $P_{A_j}^{\alpha}$ — оператор проектирования зарядов на выпуклый конус мер конечной энергии, сосредоточенных на A_j [8]. Используя оценки, полученные при доказательстве леммы 3, из (49), (50) получаем

$$\left|\tilde{\lambda}_k^j(1)\right| \le c(\alpha) \sum_{i \in I_+} a_i \quad \forall\, k. \tag{51}$$

Обозначим $\eta_k := a_j - \left|\tilde{\lambda}_k^j(1)\right|$, $k = 1, 2, \ldots$. Числа η_k неотрицательны в силу соотношений (48), (51) и мажорируются сверху (конечным) числом a_j.

Пусть $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ — сильно (и слабо) сходящаяся к нулю последовательность единичных мер, сосредоточенных на A_j. Положим $\nu_k := \tilde{\lambda}_k - \eta_k \mu_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Тогда $\{\nu_k\} \subset \mathfrak{N}(\mathcal{A}, a)$ и верны соотношения (см. лемму 2)

$$V_\alpha(\mathcal{A}, a) \le \lim_{k \to \infty} \|\nu_k\|^2 = \lim_{k \to \infty} \|\tilde{\lambda}_k\|^2 = V_\alpha(\mathcal{A}, a, I_0).$$

Учитывая неравенство $V_\alpha(\mathcal{A}, a, I_0) \le V_\alpha(\mathcal{A}, a)$, отсюда заключаем, что последовательность $\{\nu_k\}$ минимизирующая в $(\mathcal{A}, a)$-задаче, а потому заряд λ_I^j — слабый предел последовательности $\left\{\tilde{\lambda}_k^j - \eta_k \mu_k\right\}_{k=1}^{\infty}$. Отсюда находим

$$\left|\lambda_I^j(1)\right| \le \varliminf_{k \to \infty} \left|\tilde{\lambda}_k^j(1)\right|. \tag{52}$$

Оценки (51), (52) и условие (48) доказывают искомое соотношение $a \notin s(\mathcal{A})$.

Как видно из приведенного доказательства, в условиях (47), (48) справедливо равенство экстремальных зарядов в основной и вспомогательной вариационных задачах:

$$\lambda(\mathcal{A}, a, I) = \lambda(\mathcal{A}, a, I \setminus \{j\}).$$

В случае, когда вспомогательная вариационная задача разрешима, теорема 8 допускает следующее усиление.

Теорема 9. *Предположим, что $\mathcal{A}$, a и I_0 удовлетворяют следующим условиям:*

a_1) *вариационная $(\mathcal{A}, a, I_0)$-задача разрешима;*

b_1) $C_\alpha(A_i) = \infty$ *для всех* $i \notin I_0$;

c_1) $a_i \ge |\lambda_{I_0}(A_i)|$ *для всех* $i \notin I_0$.

Тогда

$$\lambda_I = \lambda_{I_0}, \tag{53}$$

и потому следующие утверждения равносильны:

i) $a \in s(\mathcal{A})$;

ii) $a_i = |\lambda_{I_0}(A_i)|$ *для всех* $i \notin I_0$.

Доказательство. Пусть $\{\mu_k^i\}_{k=1}^{\infty}$, $i \notin I_0$, — сильно сходящаяся к нулю последовательность единичных мер, сосредоточенных на A_i. Числа $d_i :=$ $:= a_i - |\lambda_{I_0}(A_i)|$, $i \notin I_0$, неотрицательны в силу условия c_1). Положим

$$\nu_k := \lambda_{I_0} - \sum_{i \notin I_0} d_i \mu_k^i, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{54}$$

Из соотношений $\{\nu_k\} \subset \mathfrak{N}(\mathcal{A}, a)$ и

$$\|\lambda_I\| \le \|\nu_k\| \le \|\lambda_{I_0}\| + \sum_{i \notin I_0} d_i \|\mu_k^i\|, \quad k = 1, 2, \ldots ,$$

находим, что $\{\nu_k\}$ — минимизирующая последовательность в $(\mathcal{A}, a)$-задаче, и потому $\nu_k \to \lambda_I$ сильно. Отсюда и из (54) получаем (53). Импликация $i) \Rightarrow ii)$ очевидна ввиду (53), а $ii) \Rightarrow i)$ — ввиду (53) и a_1). Теорема 9 доказана.

Теорема 10. *Пусть* $i_0 \in I_-$, $I_0 := I \setminus \{i_0\}$ *и выполнены следующие условия*:

a_2) $(\mathcal{A}, a)$*-задача* A_i*-разрешима для всех* $i \ne i_0$;

b_2) $a_{i_0} < |\lambda_{I_0}(A_{i_0})|$.

Тогда $a \in s(\mathcal{A})$.

Доказательство. Предположим, что $a_{i_0} \ne 0$, ибо в противном случае утверждение теоремы 10 тривиально.

Пользуясь равенством

$$\|\lambda_I\|^2 = \lim_{k \to \infty} \|\lambda_k\|^2,$$

условием a_2) и следствием 4, находим

$$\left(\lambda_I^{i_0}, \lambda_I\right) = \lim_{k \to \infty} \left(\lambda_k^{i_0}, \lambda_k\right). \tag{55}$$

Предположим, что $\left(\lambda_I^{i_0}, \lambda_I\right) = 0$. Тогда верны соотношения

$$\lim_{k \to \infty} \left(\lambda_k^{i_0}, \lambda_k\right) = 0, \tag{56}$$

$$\|\lambda_I\|^2 = \sum_{i \in I_0} \left(\lambda_I^i, \lambda_I\right). \tag{57}$$

Из (56) и неравенств, полученных при доказательстве теоремы 3, имеем

$$\mathcal{U}_\alpha^{\lambda_I}(x) \le 0 \quad \text{для квазивсех } x \in A_{i_0}. \tag{58}$$

Последовательно используя утверждение теоремы 3 для заряда λ_I и $i \in I_0$, условие a_2), неравенство (58), свойство C-абсолютной непрерывности $\tilde{\lambda}_k$, $k =$ $= 1, 2, \ldots$, а затем равенство (57), получаем

$$(\lambda_I, \tilde{\lambda}_k) = \int_{\mathbb{R}^p} \mathcal{U}_\alpha^{\lambda_I}(x)\, d\tilde{\lambda}_k(x) \ge \sum_{i \in I_0} \left(\lambda_I^i, \lambda_I\right) = \|\lambda_I\|^2 \quad \forall\, k.$$

Применяя к левой части неравенство Коши–Буняковского, а затем переходя к пределу по $k \to \infty$, находим $\|\lambda_{I_0}\| \geq \|\lambda_l\|$. Отсюда и из включения $\lambda_l \in \in \mathfrak{N}(\mathcal{A}, a, I_0)$ (следующего из условия a_2)), в силу единственности экстремального заряда λ_{I_0} получаем $\lambda_l = \lambda_{I_0}$, и потому $|\lambda_{I_0}(A_{i_0})| = |\lambda_l(A_{i_0})| \leq \leq a_{i_0}$.

Полученное противоречие с условием b_2) доказывает, что

$$\left(\lambda_l^{i_0}, \lambda_l\right) \neq 0. \tag{59}$$

Из соотношений (55), (59) и равенства

$$\left|\lambda_l^{i_0}(1)\right| \lim_{k \to \infty} \left(\lambda_k^{i_0}, \lambda_k\right) = a_{i_0}\left(\lambda_l^{i_0}, \lambda_l\right)$$

(см. следствие 4) находим $\left|\lambda_l^{i_0}(1)\right| = a_{i_0}$, что и требовалось доказать.

Пользуясь найденным соотношением (59), убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

Следствие 13. *В условиях теоремы* 10 *верно строгое неравенство*

$$V_\alpha(\mathcal{A}, a) > V_\alpha(\mathcal{A}, a, I_0).$$

9. Критерий разрешимости $(\mathcal{A}, a)$-задачи (основной результат). Всюду далее будем считать, что $a_i \neq 0$ для всех $i \in I$ и в неробэновом случае $\alpha \in (2, p)$ конденсатор $\mathcal{A}$ удовлетворяет условию отделимости $\operatorname{dist}(|\mathcal{A}^+|, |\mathcal{A}^-|) > 0$.

Пусть $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^+, \mathcal{A}^-)$ — фиксированный (m, n)-конденсатор, $i_0 \in I_-$ — некоторый отмеченный индекс, $I_0 := I \setminus \{i_0\}$ и выполнено условие (46), если $\alpha \in (0, 2]$, либо условие (43), если $\alpha \in (2, p)$.

Приведенная ниже теорема дает полное геометрико-потенциальное описание множества разрешимости $s(\mathcal{A})$. При этом a рассматривается как точка евклидова пространства $\mathbb{R}^{m+n}$ с осями Ox_i, $i \in I$.

Пусть $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, l — произвольная полупрямая в $(\mathbb{R}_+)^{m+n}$, параллельная оси Ox_{i_0}, с естественным отношением упорядоченности между ее элементами. Очевидно, заряд $\lambda(\mathcal{A}, a, I_0)$ от выбора точки a на l не зависит. Пусть a_l — точка на l с i_0-координатой, равной $|\lambda_{I_0}(A_{i_0})|$, где $\lambda_{I_0} := := \lambda(\mathcal{A}, a, I_0)$, $a \in l$.

Теорема 11. *Верны равенства*

$$s(\mathcal{A}) = \begin{cases} (\mathbb{R}_+)^{m+n}, & \text{если } C_\alpha(A_{i_0}) < \infty, \\ \bigcup\limits_l \{x \in l:\ x \leq a_l\}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Другими словами, справедлив следующий результат.

Теорема 11′. *Для разрешимости $(\mathcal{A}, a)$-задачи необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих соотношений*:

$$C_\alpha(A_{i_0}) < \infty \tag{60}$$

либо

$$a_{i_0} \leq |\lambda_{I_0}(A_{i_0})|. \tag{61}$$

Доказательство. Согласно результатам пункта 7 в принятых допущениях выполнены условия $a_1)$ и $a_2)$, фигурирующие в формулировках теорем 9 и 10. В силу $a_2)$ $(\mathcal{A}, a)$-задача разрешима, если она A_{i_0}-разрешима.

Достаточность условия (60) для A_{i_0}-разрешимости $(\mathcal{A}, a)$-задачи вытекает из следствия 11 при $\alpha \in (0, 2]$ либо из теоремы 6 при $\alpha \in (2, p)$, а достаточность условия $a_{i_0} < |\lambda_{I_0}(A_{i_0})|$ — из теоремы 10. В случае равенства $a_{i_0} = |\lambda_{I_0}(A_{i_0})|$ из условия $a_1)$ находим $\lambda_{I_0} \in \mathfrak{R}(\mathcal{A}, a)$, а потому $\|\lambda_{I_0}\| = \|\lambda_I\|$, и, в силу единственности экстремального заряда λ_I, $\lambda_{I_0} = \lambda_I$. Отсюда имеем $|\lambda_I(A_{i_0})| = a_{i_0}$, что и требовалось установить.

Необходимость дизъюнкции условий (60) и (61) для включения $a \in s(\mathcal{A})$ следует из теоремы 9. Теоремы 11 и 11$'$ доказаны.

Зафиксируем полупрямую l. Очевидно, экстремальная характеристика $V_\alpha(\mathcal{A}, a)$ как функция от a, $a \in l$, достигает в точке a_l своего минимального значения, равного $V_\alpha(\mathcal{A}, a, I_0)$.

***Следствие* 14.** *Равенство*

$$V_\alpha(\mathcal{A}, a) = V_\alpha(\mathcal{A}, a_l), \quad a \in l, \tag{62}$$

равносильно утверждению

$$a = a_l, \tag{63}$$

если $C_\alpha(A_{i_0}) < \infty$, *и утверждению*

$$a \geq a_l \tag{64}$$

— в противном случае.

Доказательство. Эквивалентность утверждений (62) и (64) в случае бесконечной емкости множества A_{i_0} установлена теоремой 9 и следствием 13. Если емкость A_{i_0} конечна, то $a \in s(\mathcal{A})$, и потому $\lambda_I \neq \lambda_{I_0}$ в случае $a \neq a_l$. Это доказывает импликацию (62) $\Rightarrow$ (63). Обратная импликация очевидна.

***Пример* 4.** Пусть $\alpha = 2$, $m = 1$, $n = 2$, A_2 — компакт, дополнение которого до $\mathbb{R}^p$ состоит из ограниченной Z_0 и неограниченной Z_∞ компонент связности, и пусть $A_1 \subset Z_0$, $A_3 \subset Z_\infty$. Если $C_2(A_3) < \infty$, то $a \in s(\mathcal{A})$ для всякого $a = (a_1, a_2, a_3)$. Покажем, что для $\mathcal{A}$ с $C_2(A_3) = \infty$ точка a с $a_1 = a_2$ принадлежит множеству разрешимости $s(\mathcal{A})$ лишь в тривиальном случае $a_3 = 0$.

Согласно теореме 9 для этого достаточно показать, что для экстремального во вспомогательной задаче заряда $\lambda \equiv \lambda_{I \setminus \{3\}}$ выполняется $\lambda^3 = 0$.

Из известных свойств оператора ньютонова выметания в условиях примера 4 находим

$$S(\beta\lambda^1) \subset A_2, \quad (\beta\lambda^1)(1) = \lambda^1(1) = a_1 = a_2,$$

где $\beta := \beta^2_{A_2 \cup A_3}$. А так как для всякой меры μ на $A_2 \cup A_3$ верно $\|\lambda^1 - \beta\lambda^1\| \leq \|\lambda^1 - \mu\|$, следовательно, $\lambda = \lambda^1 - \beta\lambda^1$ и $\lambda^3 = 0$.

10. Критерий разрешимости $(\mathcal{A}, a)$-задачи: случай $n = 1$. Для краткости обозначим через $\mathfrak{M}_1$ класс всех единичных мер μ, сосредоточенных на $|\mathcal{A}^+|$ и удовлетворяющих условиям нормировки

$$\mu(A_i) = \frac{a_i}{\sum_{j=1}^{m} a_j} \quad \forall\, i = 1, \dots, m.$$

Пусть $n = 1$ и выполнено условие

$$C_\alpha(|\mathcal{A}^+|) < \infty, \text{ если } \alpha > 2, \tag{65}$$

либо условие

$$C_{g^\alpha_{A_{m+1}}}(|\mathcal{A}^+|) < \infty, \text{ если } \alpha \le 2. \tag{66}$$

В силу леммы 1 и следствий 7, 10 в предположениях (65), (66) существует (единственная) мера $\omega \equiv \omega(\mathcal{A}, a_1, \dots, a_m) \in \mathfrak{M}_1$ такая, что

$$\left\| \omega - P^\alpha_{A_{m+1}} \omega \right\|^2_\alpha = \min_{\mu \in \mathfrak{M}_1} \left\| \mu - P^\alpha_{A_{m+1}} \mu \right\|^2_\alpha .$$

1. Пусть $m = n = 1$, $\alpha \in (0, p)$. В этом случае $\mathfrak{M}_1$ сводится к классу всех единичных мер на A_1 и минимальна мера ω от a не зависит, в силу чего описание множества разрешимости $s(\mathcal{A})$ приобретает следующий геометрически простой вид.

Теорема 12. *Верны равенства*

$$s(\mathcal{A}) = \begin{cases} (\mathbb{R}_+)^2, & \text{если } C_\alpha(A_2) < \infty, \\ \{(a_1, a_2) \in (\mathbb{R}_+)^2 :\ a_2 / a_1 \le \Lambda(\mathcal{A})\}, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $\Lambda(\mathcal{A})$ *— зависящая только от* $\mathcal{A}$ *постоянная, имеющая вид*

$$\Lambda(\mathcal{A}) := \left(P^\alpha_{A_2} \omega \right)(1).$$

Отметим, что для $(1, 1)$-конденсатора $\mathcal{A}$, удовлетворяющего условию отделимости, исследование разрешимости $(\mathcal{A}, a)$-задачи проведено в максимально широких допущениях, ибо в этом случае постулируемая конечность α-емкости одной из пластин A_1, A_2 равносильна естественному требованию $V_\alpha(\mathcal{A}, a) > 0$.

В робэновом случае $\alpha \in (0, 2]$ и при дополнительном условии отделимости теорема 12 анонсирована в [9]. Заметим также, что полученные в настоящей работе утверждения о разрешимости $(\mathcal{A}, a)$-задачи для неробэновых ядер $k_\alpha(x, y)$, $\alpha \in (2, p)$, ранее были известны лишь в случае $m = n = 1$, $a_1 = a_2$, $C_\alpha(A_1 \cup A_2) < \infty$ [3].

2. Пусть $m \ge 1$, $n = 1$, $\alpha \in (0, 2]$. В этом случае оператор проектирования $P^\alpha_{A_{m+1}}$ тождествен оператору α-выметания $\beta^\alpha_{A_{m+1}}$, а мера ω решает задачу минимизации $g^\alpha_{A_{m+1}}$-энергии в классе $\mathfrak{M}_1$. В частности, при дополнительном условии $m = 1$ мера ω с точностью до мультипликативной постоянной совпадает с $g^\alpha_{A_2}$-равновесной мерой для A_1.

Пусть $F \subset \mathbb{R}^p$ — замкнутое множество.

Множество F называется α-разреженным на бесконечности, если множество F^*, полученное из F преобразованием инверсии относительно сферы $|x| = 1$, α-тонко в точке $x = 0$ [4, 8]. Класс всех замкнутых α-разреженных на бесконечности множеств из $\mathbb{R}^p$ обозначим через $\mathfrak{R}_\alpha$.

Для F, принадлежащих $\mathfrak{R}_\alpha$, и только для них существует равновесная мера γ_F, не обязательно конечная, однозначно определяемая свойствами $S(\gamma_F) \subset F$, $\mathcal{U}_\alpha^{\gamma_F}(x) = 1$ для квазивсех $x \in F$. Равновесная мера γ_F конечна тогда и только тогда, когда конечна α-емкость множества F. Примеры множеств F из $\mathfrak{R}_\alpha$ с бесконечной α-емкостью построены в [2, 10].

Обозначим

$$\Lambda \equiv \Lambda(\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_m) := \begin{cases} (\omega, \gamma_{A_{m+1}}), & \text{если } A_{m+1} \in \mathfrak{R}_\alpha, \\ 1, & \text{если } A_{m+1} \notin \mathfrak{R}_\alpha. \end{cases}$$

Учитывая известные результаты об изменении полной массы меры при ее α-выметании [2], на основании теоремы 11 получаем следующее утверждение.

Теорема 13. *Верны равенства*

$$s(\mathcal{A}) = \begin{cases} (\mathbb{R}_+)^{m+1}, & \textit{если } C_\alpha(A_{m+1}) < \infty, \\ \left\{a \in (\mathbb{R}_+)^{m+1} \colon\ a_{m+1} \big/ \sum_{j=1}^{m} a_j \le \Lambda\right\} & \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

Для простоты формулировки следующего результата в случае $\alpha = 2$ предположим связность $\mathbb{R}^p \setminus A_{m+1}$.

***Следствие* 15.** *Если a удовлетворяет условию*

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{m} a_j,$$

то вариационная $(\mathcal{A}, a)$-задача разрешима тогда и только тогда, когда верно либо $C_\alpha(A_{m+1}) < \infty$, либо $A_{m+1} \notin \mathfrak{R}_\alpha$.

В случае $m = 1$ и при дополнительном условии отделимости утверждение следствия 15 получено в [2] (см. также [11]).

1. *Зорий Н. В.* Одна некомпактная вариационная задача теории рисова потенциала. I // Укр. мат. журн. – 1995 – **47**, № 10. – С. 1350–1360.
2. *Зорий Н. В.* Задача о минимуме энергии для пространственных конденсаторов и ядер Риса // Там же. – 1989. – **41**, № 1. – С 34–41.
3. *Зорий Н. В.* О вариационных задачах теории потенциала // Там же. – 1991. – **43**, № 3. – С. 347–354.
4. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала. – М.: Наука, 1966. – 515 с.
5. *Frostman O.* Sur les fonctions surharmoniques d'ordre fractionnaire // Ark. mat. – 1939. – **26 A**, № 16.
6. *Fuglede B.* On the theory of potentials in locally compact spaces // Acta Math. – 1960. – **103**, № 3–4. – P. 139–215.
7. *Ohtsuka M.* On potentials in locally compact spaces // J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-1. – 1961. – **25**, № 2. – P. 135–352.
8. *Брело М.* Основы классической теории потенциала. – М.: Мир, 1964. – 212 с.
9. *Zorii N. V.* A non-compact minimum problem in the Riesz potential theory // In international congress of mathematicians. Abstracts of short communications. – Zurich, 1994. – P. 114.
10. *Зорий Н. В.* Задача о минимуме энергии для пространственных конденсаторов. – Киев, 1985. – 43 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 85.06).
11. *Zorii N. V.* The minimum Riesz energy problem for space condensers // In abstracts of the international conference on potential theory. – Nagoya, 1990. – P. 45.

Получено 22.05.95