УДК 517. 97

А. А. Ковалевский (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

О Г-СХОДИМОСТИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ НА СЛАБО СВЯЗАННЫХ СОБОЛЕВСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ*

We introduce and study the notion of Γ-convergence of the functionals $I_s: W^{k,m}(\Omega) \to \mathbb{R}$, $s = 1, 2, \ldots$, to a functional, which is defined on $(W^{k,m}(\Omega))^2$. A relationship between this convergence and convergence of variational von Neumann problems is described. For a sequence of integral functionals $I_s: W^{k,m}(\Omega) \to \mathbb{R}$, we prove a theorem on the selection of a subsequence, which is Γ-convergent to an integral functional defined on $(W^{k,m}(\Omega))^2$.

Вводиться та вивчається поняття Г-збіжності функціоналів $I_s: W^{k,m}(\Omega) \to \mathbb{R}$, $s = 1, 2, \ldots$, до функціоналу, визначеного на $(W^{k,m}(\Omega))^2$. Описується зв'язок цієї збіжності зі збіжністю розв'язків варіаційних задач Неймана. Для послідовності інтегральних функціоналів $I_s: W^{k,m}(\Omega) \to \mathbb{R}$ доводиться теорема про вибір підпослідовності, Г-збіжної до інтегрального функціоналу, визначеного на $(W^{k,m}(\Omega))^2$.

Сильная связанность соболевских пространств $W^{k,m}(\Omega_s)$ с пространством $W^{k,m}(\Omega)$, где $\Omega_s \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $s = 1, 2, \ldots$, означает существование последовательности линейных непрерывных операторов продолжения $p_s: W^{k,m}(\Omega_s) \to W^{k,m}(\Omega)$, удовлетворяющих неравенству $\sup_s \| p_s \| < \infty$. Слабая связанность рассматриваемых пространств означает отсутствие указанной последовательности операторов продолжения.

Для пространств $W^{1,2}(\Omega_s)$, $W^{1,2}(\Omega)$ понятия сильной и слабой связанности введены (в иной форме) в [1].

В настоящей работе вводится и изучается понятие Г-сходимости последовательности функционалов $I_s: W^{k,m}(\Omega_s) \to \mathbb{R}$ к функционалу, определенному на $(W^{k,m}(\Omega))^2$. Это понятие зависит от сходимости элементов $u_s \in W^{k,m}(\Omega_s)$ к элементу $u \in (W^{k,m}(\Omega))^2$, соответствующей структуре рассматриваемых областей Ω_s. Эта структура такова, что пространства $W^{k,m}(\Omega_s)$, вообще говоря, не являются сильно связанными с пространством $W^{k,m}(\Omega)$. В статье описывается связь Г-сходимости функционалов со сходимостью решений вариационных задач Неймана. Для интегральных функционалов $I_s: W^{k,m}(\Omega_s) \to \mathbb{R}$ вводятся специальные локальные характеристики, с помощью которых доказывается теорема о выборе из последовательности $\{I_s\}$ подпоследовательности, Г-сходящейся к интегральному функционалу, определенному на $(W^{k,m}(\Omega))^2$.

1. Исходные предположения, обозначения и некоторые вспомогательные результаты. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей, $\{\Omega_s\}$ — последовательность областей в $\mathbb{R}^n$, содержащихся в Ω, $m \in \mathbb{R}$, $m > 1$, $k \in \mathbb{N}$.

Предположим, что существуют последовательности областей $\Omega_s^{(1)}$, $\Omega_s^{(2)}$ в

*Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного комитета Украины по вопросам науки и технологий.

$\mathbb{R}^n$ и последовательность множеств H_s такие, что для любого $s \in \mathbb{N}$

$$\Omega_s = \Omega_s^{(1)} \cup H_s \cup \Omega_s^{(2)}, \tag{1}$$

$$d_s = \operatorname{dist}(\Omega_s^{(1)}, \Omega_s^{(2)}) > 0, \quad H_s \cap (\Omega_s^{(1)} \cup \Omega_s^{(2)}) = \varnothing.$$

Предположим также, что выполняются условия:

а) $\lim\limits_{s \to \infty} d_s = 0$;

б) существует $\nu > 0$ такое, что для любого открытого множества $E \subset \Omega$ с $\operatorname{mes} \partial E = 0$

$$\limsup_{s \to \infty} d_s^{-km} \operatorname{mes}(E \cap H_s) \le \nu \operatorname{mes} E.$$

Из условий а) и б) вытекает равенство

$$\lim_{s \to \infty} \operatorname{mes} H_s = 0. \tag{2}$$

Введем такие обозначения:

1) $P_0^{n,k} = \{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n : |\alpha| \le k-1\}$, $P^{n,k} = \{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n : |\alpha| = k\}$;

2) $\mathbb{R}_0^{n,k}$ — пространство всех отображений $P_0^{n,k}$ в $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^{n,k}$ — пространство всех отображений $P^{n,k}$ в $\mathbb{R}$;

3) если $\xi \in \mathbb{R}_0^{n,k}$, $\eta \in \mathbb{R}^{n,k}$, то

$$|\xi| = \left(\sum_{\alpha \in P_0^{n,k}} \xi_\alpha^2 \right)^{1/2}, \quad |\eta| = \left(\sum_{\alpha \in P^{n,k}} \eta_\alpha^2 \right)^{1/2};$$

4) если E — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $u \in W^{k,m}(E)$, то $\delta_k u$ — отображение E в $\mathbb{R}_0^{n,k}$ такое, что для любых $x \in E$ и $\alpha \in P_0^{n,k}$ $(\delta_k u(x))_\alpha = D^\alpha u(x)$; $\nabla_k u$ — отображение E в $\mathbb{R}^{nk}$ такое, что для любых $x \in E$ и $\alpha \in P^{n,k}$ $(\nabla_k u(x))_\alpha = D^\alpha u(x)$;

5) если $s \in \mathbb{N}$, то q_s — отображение $W^{k,m}(\Omega)$ в $W^{k,m}(\Omega_s)$ такое, что для любой функции $u \in W^{k,m}(\Omega)$ $q_s u = u|_{\Omega_s}$;

6) если $s \in \mathbb{N}$, $v \in W^{k,m}(\Omega_s)$, $u \in (W^{k,m}(\Omega))^2$, то

$$\rho_s(v, u) = \int_{\Omega_s^{(1)}} |\delta_k(v - q_s u^{(1)})|^m dx + \int_{\Omega_s^{(2)}} |\delta_k(v - q_s u^{(2)})|^m dx;$$

7) если $u \in (W^{k,m}(\Omega))^2$, то

$$\|u\|_{(W^{k,m}(\Omega))^2} = \|u^{(1)}\|_{W^{k,m}(\Omega)} + \|u^{(2)}\|_{W^{k,m}(\Omega)};$$

8) если $u \in (W^{k,m}(\Omega))^2$, то $\mathcal{E}(u)$ — множество всех последовательностей $\{u_s\}$ таких, что для всех $s \in \mathbb{N}$ $u_s \in W^{k,m}(\Omega_s)$,

$$\sup_s \|u_s\|_{W^{k,m}(\Omega_s)} < \infty, \tag{3}$$

$$\lim_{s \to \infty} \rho_s(u_s, u) = 0, \tag{4}$$

$$\lim_{s\to\infty}\int_{H_s}|\delta_k u_s|^m\,dx = 0. \tag{5}$$

Включение $\{u_s\}\in\mathcal{E}(u)$ означает определенную сходимость последовательности $\{u_s\}$ к u.

Далее через ν_i, $i=0,1,\ldots$, будем обозначать положительные постоянные, зависящие только от n, m, k, ν.

Предложение 1. *Для любого* $u\in(W^{k,m}(\Omega))^2$ *существует последовательность* $\{u_s\}\in\mathcal{E}(u)$ *такая, что*

$$\limsup_{s\to\infty}\|u_s\|_{W^{k,m}(\Omega_s)}\le\nu_1\|u\|_{(W^{k,m}(\Omega))^2}. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть $u\in(W^{k,m}(\Omega))^2$, причем $u^{(1)},u^{(2)}\in C^k(\overline{\Omega})$. Положим

$$v=\sum_{|\beta|\le k-1}|D^\beta(u^{(2)}-u^{(1)})|^m,\qquad v_0=\sup_\Omega|v|$$

и зафиксируем для любого $s\in\mathbb{N}$ функцию $\chi_s\in C^\infty(\overline{\Omega}_s)$ такую, что $\chi_s=0$ на $\Omega_s^{(1)}$, $\chi_s=1$ на $\Omega_s^{(2)}$, $|D^\alpha\chi_s|\le\nu_0 d_s^{-|\alpha|}$ на Ω_s $(|\alpha|\le k)$. Пусть теперь для любого $s\in\mathbb{N}$ $u_s=q_s u^{(1)}+\chi_s q_s(u^{(2)}-u^{(1)})$. Нетрудно убедиться в том, что

$$\limsup_{s\to\infty}\|u_s\|_{W^{k,m}(\Omega_s)}\le 2\|u\|_{(W^{k,m}(\Omega))^2}+\nu_2\limsup_{s\to\infty}\left\{d_s^{-km}\int_{H_s}v\,dx\right\}^{1/m} \tag{7}$$

Получим оценку для верхнего предела в правой части неравенства (7). Пусть ε — произвольное положительное число. Ясно, что найдется $\varepsilon_1>0$ такое, что для любых $x',x''\in\Omega$, удовлетворяющих условию $|x'-x''|\le\varepsilon_1$, справедливо неравенство $|v(x')-v(x'')|\le\varepsilon$. Рассмотрим конечную совокупность попарно непересекающихся открытых кубов $Q_i\subset\Omega$ такую, что для любого i $\operatorname{diam}Q_i\le\varepsilon_1$ и

$$\operatorname{mes}\left(\Omega\setminus\bigcup_i Q_i\right)\le\varepsilon. \tag{8}$$

Для каждого i зафиксируем $y^i\in Q_i$ и положим $E=\Omega\setminus\bigcup_i\overline{Q}_i$. Для любого $s\in\mathbb{N}$ имеем

$$d_s^{-km}\int_{H_s}v\,dx\le d_s^{-km}\sum_i(v(y^i)+\varepsilon)\operatorname{mes}(Q_i\cap H_s)+v_0 d_s^{-km}\operatorname{mes}(E\cap H_s).$$

Отсюда, используя условие б) и неравенство (8), получаем

$$\limsup_{s\to\infty}\left\{d_s^{-km}\int_{H_s}v\,dx\right\}^{1/m}\le\nu^{1/m}\|u\|_{(W^{k,m}(\Omega))^2}.$$

Из этого неравенства и (7) выводим (6). Заметим, что в силу условий а) и б) справедливо равенство (5).

Пусть теперь u — произвольный элемент из $(W^{k,m}(\Omega))^2$. Возьмем последовательность $v_i\in(W^{k,m}(\Omega))^2$ такую, что для любого i $v_i^{(1)},v_i^{(2)}\in C^k(\overline{\Omega})$ и

$$\|v_i - u\|_{(W^{k,m}(\Omega))^2} \le 1/i. \tag{9}$$

Используя полученный выше результат для элементов из $(W^{k,m}(\Omega))^2$ с гладкими компонентами, устанавливаем, что если $i \in \mathbb{N}$, то существуют последовательность $u_s^i \in W^{k,m}(\Omega_s)$ и число $s_i \in \mathbb{N}$ такие, что для любого $s \ge s_i$

$$u_s^i = q_s v_i^{(1)} \quad \text{на} \quad \Omega_s^{(1)}, \qquad u_s^i = q_s v_i^{(2)} \quad \text{на} \quad \Omega_s^{(2)}, \tag{10}$$

$$\left\| u_s^i \right\|_{W^{k,m}(\Omega_s)} \le \nu_1 \|v_i\|_{(W^{k,m}(\Omega))^2} + \frac{1}{i}, \quad \int_{H_s} \left| \delta_k u_s^i \right|^m dx \le \frac{1}{i}. \tag{11}$$

При этом можно считать, что числа s_i образуют возрастающую последовательность. Рассмотрим теперь последовательность $\{u_s\}$ такую, что

$$u_s = \begin{cases} 0, & \text{если } s < s_1, \\ u_s^i, & \text{если } s_i \le s < s_{i+1}, \quad i = 1, 2, \ldots . \end{cases}$$

Из (9)–(11) имеем, что $\{u_s\} \in \mathcal{E}(u)$ и выполняется неравенство (6). Предложение доказано.

Предложение 2. *Пусть выполняется условие:*

в) существуют $\kappa_1, \kappa_2 > 0$ *такие, что для любого открытого множества* $E \subset \Omega$

$$\liminf_{s \to \infty} \operatorname{mes}(E \cap \Omega_s^{(i)}) \ge \kappa_i \operatorname{mes} E, \quad i = 1, 2.$$

Тогда пространства $W^{k,m}(\Omega_s)$ *слабо связаны с пространством* $W^{k,m}(\Omega)$.

Доказательство. Предположим, что существует последовательность линейных непрерывных операторов продолжения $p_s\colon W^{k,m}(\Omega_s) \to W^{k,m}(\Omega)$, удовлетворяющая неравенству $\sup_s \|p_s\| < \infty$. Тогда, поскольку для последовательности $\{\chi_s\}$ из доказательства предложения 1 соответствующая последовательность норм $\|\chi_s\|_{W^{k,m}(\Omega_s)}$ в силу условий а), б) ограничена, последовательность $\{p_s \chi_s\}$ ограничена в $W^{k,m}(\Omega)$. Следовательно, существуют возрастающая последовательность $\{s_t\} \subset \mathbb{N}$ и $\chi \in W^{k,m}(\Omega)$ такие, что $p_{s_t} \chi_{s_t} \to \chi$ слабо в $W^{k,m}(\Omega)$. Отсюда, учитывая свойства функций χ_s, выводим

$$\lim_{t \to \infty} \int_{\Omega_{s_t}^{(1)}} |\chi|^m dx = 0, \qquad \lim_{t \to \infty} \int_{\Omega_{s_t}^{(2)}} |\chi - 1|^m dx = 0. \tag{12}$$

Но в силу условия в) для любой неотрицательной функции $\varphi \in L^1(\Omega)$

$$\liminf_{s \to \infty} \int_{\Omega_s^{(i)}} \varphi \, dx \ge \kappa_i \int_{\Omega} \varphi \, dx, \quad i = 1, 2.$$

Отсюда и из (12) следует, что $\chi = 0$ почти всюду на Ω и $\chi = 1$ почти всюду на Ω. Полученное противоречие доказывает, что предполагаемой последовательности операторов продолжения не существует. Значит, пространства $W^{k,m}(\Omega_s)$ слабо связаны с пространством $W^{k,m}(\Omega)$. Предложение доказано.

2. Определение Γ-сходимости функционалов и ее связь со сходимостью решений вариационных задач.

***Определение* 1.** *Пусть для любого* $s \in \mathbb{N}$ I_s *— функционал на* $W^{k,m}(\Omega_s)$, I *— функционал на* $(W^{k,m}(\Omega))^2$. *Будем говорить, что последовательность* $\{I_s\}$ Γ-*сходится к функционалу* I, *если:*

1) *для любого* $u \in (W^{k,m}(\Omega))^2$ *существует последовательность* $\{w_s\} \in \mathcal{E}(u)$ *такая, что*

$$\lim_{s\to\infty} I_s(w_s) = I(u);$$

2) *для любого* $u \in (W^{k,m}(\Omega))^2$ *и любой последовательности* $\{u_s\} \in \mathcal{E}(u)$

$$\liminf_{s\to\infty} I_s(u_s) \geq I(u).$$

***Предложение* 3.** *Пусть пространства* $W^{k,m}\left(\Omega_s^{(1)}\right)$, $W^{k,m}\left(\Omega_s^{(2)}\right)$ *сильно связаны с пространством* $W^{k,m}(\Omega)$. *Пусть для любого* $s \in \mathbb{N}$ I_s *— функционал на* $W^{k,m}(\Omega_s)$, I *— функционал на* $(W^{k,m}(\Omega))^2$, *последовательность* $\{I_s\}$ Γ-*сходится к функционалу* I, *для любого* $s \in \mathbb{N}$ u_s *— функция, минимизирующая* I_s *на* $W^{k,m}(\Omega_s)$ *и справедливы соотношения* (3), (5). *Тогда существует возрастающая последовательность* $\{s_j\} \subset \mathbb{N}$ *и* $u \in (W^{k,m}(\Omega))^2$ *такие, что* u *минимизирует* I *на* $(W^{k,m}(\Omega))^2$,

$$\lim_{j\to\infty} \rho_{s_j}(u_{s_j}, u) = 0, \quad \lim_{j\to\infty} I_{s_j}(u_{s_j}) = I(u). \tag{13}$$

Доказательство. Из (3) и сильной связанности пространств $W^{k,m}\left(\Omega_s^{(1)}\right)$, $W^{k,m}\left(\Omega_s^{(2)}\right)$ с пространством $W^{k,m}(\Omega)$ вытекает, что существуют возрастающая последовательность $\{s_j\} \subset \mathbb{N}$ и $u \in (W^{k,m}(\Omega))^2$ такие, что выполняется первое из равенств (13). Тогда в силу (3), (5) и Γ-сходимости $\{I_s\}$ к I

$$\liminf_{j\to\infty} I_{s_j}(u_{s_j}) \geq I(u). \tag{14}$$

Пусть теперь $v \in (W^{k,m}(\Omega))^2$. Ввиду Γ-сходимости $\{I_s\}$ к I существует последовательность $\{v_s\} \in \mathcal{E}(v)$ такая, что $I_s(v_s) \to I(v)$ при $s \to \infty$. Тогда, учитывая, что для любого $s \in \mathbb{N}$ u_s минимизирует I_s на $W^{k,m}(\Omega_s)$, получаем

$$\limsup_{j\to\infty} I_{s_j}(u_{s_j}) \leq I(v). \tag{15}$$

Из (14) и (15) вытекает, что $I(u) \leq I(v)$. Отсюда в силу произвольности v получаем, что u минимизирует I на $(W^{k,m}(\Omega))^2$. Кроме того, полагая в (15) $v = u$, из (14) и (15) выводим второе из равенств (13). Предложение доказано.

***Замечание* 1.** Из доказательства предложения 3 следует, что если функционал I строго выпуклый на $(W^{k,m}(\Omega))^2$, то $\rho_s(u_s, u) \to 0$ и $I_s(u_s) \to I(u)$ при $s \to \infty$. Неравенство (3) для минимизантов u_s выполняется в случае равномерной коэрцитивности функционалов I_s и ограниченности последовательности $\{I_s(0)\}$. О выполнении для $\{u_s\}$ равенства (5) будет сказано в заключительном пункте статьи.

3. Формулировка теоремы о выборе Г-сходящейся подпоследовательности для интегральных функционалов. Пусть $c \geq 1$ и $\{f_s\}$ — последовательность функций на $\Omega \times \mathbb{R}^{n,k}$ такая, что:

$$\text{для любых } s \in \mathbb{N} \text{ и } \eta \in \mathbb{R}^{n,k} \text{ функция } f_s(\cdot, \eta) \text{ измерима на } \Omega; \tag{16}$$

$$\text{для любых } s \in \mathbb{N} \text{ и } x \in \Omega \text{ функция } f_s(x, \cdot) \text{ выпукла на } \mathbb{R}^{n,k}; \tag{17}$$

для любых $s \in \mathbb{N}$, $x \in \Omega$, $\eta \in \mathbb{R}^{n,k}$

$$c^{-1}|\eta|^m - c \leq f_s(x, \eta) \leq c(1 + |\eta|^m). \tag{18}$$

Из (17) и (18) вытекает, что для любых $s \in \mathbb{N}$, $x \in \Omega$, $\eta, \eta' \in \mathbb{R}^{n,k}$

$$|f_s(x, \eta) - f_s(x, \eta')| \leq 3^m c(1 + |\eta| + |\eta'|)^{m-1} |\eta - \eta'|. \tag{19}$$

Отсюда и из (16) следует, что функции f_s являются каратеодориевскими на $\Omega \times \mathbb{R}^{n,k}$. Тогда, учитывая (18), получаем, что если $s \in \mathbb{N}$, $u \in W^{k,m}(\Omega_s)$, то функция $f_s(\cdot, \nabla_k u(\cdot))$ интегрируема на Ω_s.

***Определение* 2.** *Если $s \in \mathbb{N}$, то I_s — функционал на $W^{k,m}(\Omega_s)$ такой, что для любой функции $u \in W^{k,m}(\Omega_s)$*

$$I_s(u) = \int_{\Omega_s} f_s(x, \nabla_k u)\, dx.$$

Обозначим через $\mathcal{F}$ множество всех функций f на $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n,k} \times \mathbb{R}^{n,k}$, удовлетворяющих условиям: для любых $\xi \in \mathbb{R}$, $\eta, \eta' \in \mathbb{R}^{n,k}$ функция $f(\cdot, \xi, \eta, \eta')$ измерима на Ω; для любого $x \in \Omega$ функция $f(x, \cdot, \cdot, \cdot)$ выпукла на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n,k} \times \mathbb{R}^{n,k}$; существует $c' > 0$ такое, что для любых $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}$, η, $\eta' \in \mathbb{R}^{n,k}$

$$-c \leq f(x, \xi, \eta, \eta') \leq c'(1 + |\xi| + |\eta| + |\eta'|)^m.$$

Нетрудно убедиться в том, что если $f \in \mathcal{F}$ и $u \in (W^{k,m}(\Omega))^2$, то функция $f(\cdot, u^{(2)}(\cdot) - u^{(1)}(\cdot), \nabla_k u^{(1)}(\cdot), \nabla_k u^{(2)}(\cdot))$ интегрируема на Ω.

***Определение* 3.** *Если $f \in \mathcal{F}$, то I^f — функционал на $(W^{k,m}(\Omega))^2$ такой, что для любого $u \in (W^{k,m}(\Omega))^2$*

$$I^f(u) = \int_{\Omega} f(x, u^{(2)} - u^{(1)}, \nabla_k u^{(1)}, \nabla_k u^{(2)})\, dx.$$

Теорема 1. *Существуют возрастающая последовательность $\{s_j\} \subset \mathbb{N}$ и $f \in \mathcal{F}$ такие, что последовательность $\{I_{s_j}\}$ Г-сходится к функционалу I^f.*

Доказательству теоремы предпошлем изучение специальных локальных характеристик функционалов I_s.

4. Локальные характеристики функционалов I_s и некоторые их свойства. Введем обозначения: если $y \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{N}$, то

$$Q_t(y) = \{x \in \mathbb{R}^n: |x_i - y_i| < 1/2t, i = 1, \dots, n\};$$

если $t \in \mathbb{N}$, то

$$Y_t = \{y \in \mathbb{R}^n: ty_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, n\}.$$

Заметим, что

$$\forall t \in \mathbb{N} \quad \bigcup_{y \in Y_t} \overline{Q_t(y)} = \mathbb{R}^n;$$

$$\forall t \in \mathbb{N} \;\; \forall y, y' \in Y_t, \quad y \neq y', \quad Q_t(y) \cap Q_t(y') = \varnothing.$$

Положим для любого $t \in \mathbb{N}$

$$Y_t^0 = \{y \in Y_t: Q_t(y) \cap \Omega \neq \varnothing\};$$

для любых $t, s \in \mathbb{N}$ и $y \in Y_t^0$

$$V_{t,s}(y) = \left\{u \in W^{k,m}(\Omega_s): \int\limits_{Q_t(y)\cap\Omega_s} |\delta_k u|^m \, dx \le t^{-n-(2k+1)m}\right\}.$$

Зафиксируем постоянную $\sigma \ge 1$ и последовательность $\psi_s \in W^{k,m}(\Omega_s)$ такие, что выполняются условия:

$$\forall s \in \mathbb{N} \quad 0 \le \psi_s \le 1 \text{ на } \Omega_s, \quad \psi_s = 0 \text{ на } \Omega_s^{(1)}, \quad \psi_s = 1 \text{ на } \Omega_s^{(2)}; \tag{20}$$

$$\lim_{s\to\infty} \int\limits_{H_s} |\delta_k \psi_s|^m \, dx = 0; \tag{21}$$

для любого открытого множества $E \subset \Omega$ с $\operatorname{mes} \partial E = 0$

$$\limsup_{s\to\infty} \int\limits_{E\cap H_s} |\nabla_k \psi_s|^m \, dx \le \sigma \operatorname{mes} E. \tag{22}$$

Существование таких σ и $\{\psi_s\}$ вытекает из условий а) и б).

***Определение* 4.** *Если* $s \in \mathbb{N}$, $\xi \in \mathbb{R}$, $\eta, \eta' \in \mathbb{R}^{n,k}$, *то* $a_s(\xi, \eta, \eta')$ — *отображение* Ω_s *в* $\mathbb{R}^{nk}$ *такое, что для любого* $x \in \Omega_s$

$$a_s(\xi, \eta, \eta')(x) = (1 - \psi_s(x))\eta + \psi_s(x)\eta' + \xi \nabla_k \psi_s(x).$$

В силу (20) и (22) для любых $t \in \mathbb{N}$, $y \in Y_t^0$, $\xi \in \mathbb{R}$, $\eta, \eta' \in \mathbb{R}^{n,k}$

$$\limsup_{s\to\infty} \int\limits_{Q_t(y)\cap\Omega_s} |a_s(\xi, \eta, \eta')|^m \, dx \le 2^m \sigma (|\xi| + |\eta| + |\eta'|)^m t^{-n}. \tag{23}$$

***Определение* 5.** *Если* $t, s \in \mathbb{N}$, $y \in Y_t^0$, $\xi \in \mathbb{R}$, $\eta, \eta' \in \mathbb{R}^{n,k}$, *то*

$$F_{t,s}(y, \xi, \eta, \eta') = t^n \inf_{u \in V_{t,s}(y)} \int\limits_{Q_t(y)\cap\Omega_s} f_s(x, a_s(\xi, \eta, \eta') + \nabla_k u) \, dx.$$

Числа $F_{t,s}(y, \xi, \eta, \eta')$ рассматриваются в качестве локальных характеристик функционалов I_s.

Из (18) вытекает, что для любых $t, s \in \mathbb{N}$, $y \in Y_t^0$, $\xi \in \mathbb{R}$, $\eta, \eta' \in \mathbb{R}^{n,k}$

$$F_{t,s}(y, \xi, \eta, \eta') \geq -c. \tag{24}$$

Кроме того, в силу (18) и (23) для любых $t \in \mathbb{N}$, $y \in Y_t^0$, $\xi \in \mathbb{R}$, $\eta, \eta' \in \mathbb{R}^{n,k}$

$$\limsup_{s \to \infty} F_{t,s}(y, \xi, \eta, \eta') \leq 2^m c\sigma(1 + |\xi| + |\eta| + |\eta'|)^m. \tag{25}$$

Лемма 1. *Пусть* $t, s \in \mathbb{N}$, $y \in Y_t^0$, $\xi, \xi' \in \mathbb{R}$, $\eta, \eta', \eta'', \eta''' \in \mathbb{R}^{n,k}$, $r \in \in [0,1]$. *Тогда*

$$F_{t,s}(y, (1-r)\xi + r\xi', (1-r)\eta + r\eta'', (1-r)\eta' + r\eta''') \leq$$
$$\leq (1-r)F_{t,s}(y, \xi, \eta, \eta') + rF_{t,s}(y, \xi', \eta'', \eta''').$$

Доказательство. Пусть ε — произвольное положительное число. Очевидно, существуют функции $u, v \in V_{t,s}(y)$ такие, что

$$\int\limits_{Q_t(y)\cap\Omega_s} f_s(x, a_s(\xi, \eta, \eta') + \nabla_k u)\, dx \leq t^{-n}F_{t,s}(y, \xi, \eta, \eta') + \varepsilon t^{-n}, \tag{26}$$

$$\int\limits_{Q_t(y)\cap\Omega_s} f_s(x, a_s(\xi', \eta'', \eta''') + \nabla_k v)\, dx \leq t^{-n}F_{t,s}(y, \xi', \eta'', \eta''') + \varepsilon t^{-n}. \tag{27}$$

Положим $w = (1-r)u + rv$. Так как $w \in V_{t,s}(y)$, используя (17), получаем

$$t^{-n}F_{t,s}(y, (1-r)\xi + r\xi', (1-r)\eta + r\eta'', (1-r)\eta' + r\eta''') \leq$$
$$\leq \int\limits_{Q_t(y)\cap\Omega_s} f_s(x, a_s((1-r)\xi + r\xi', (1-r)\eta + r\eta'', (1-r)\eta' + r\eta''') + \nabla_k w)\, dx \leq$$
$$\leq (1-r) \int\limits_{Q_t(y)\cap\Omega_s} f_s(x, a_s(\xi, \eta, \eta') + \nabla_k u)\, dx +$$
$$+ r \int\limits_{Q_t(y)\cap\Omega_s} f_s(x, a_s(\xi', \eta'', \eta''') + \nabla_k v)\, dx.$$

Отсюда и из (26), (27) имеем

$$F_{t,s}(y, (1-r)\xi + r\xi', (1-r)\eta + r\eta'', (1-r)\eta' + r\eta''') \leq$$
$$\leq (1-r)F_{t,s}(y, \xi, \eta, \eta') + rF_{t,s}(y, \xi', \eta'', \eta''') + \varepsilon.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем искомый результат. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $t \in \mathbb{N}$, $y \in Y_t^0$, $\xi, \xi' \in \mathbb{R}$, $\eta, \eta', \eta'', \eta''' \in \mathbb{R}^{n,k}$. *Тогда*

$$\limsup_{s \to \infty} |F_{t,s}(y, \xi, \eta, \eta') - F_{t,s}(y, \xi', \eta'', \eta''')| \leq$$
$$\leq 5^m c\sigma(1 + |\xi| + |\xi'| + |\eta| + |\eta'| + |\eta''| + |\eta'''|)^{m-1} \times$$
$$\times (|\xi - \xi'| + |\eta - \eta''| + |\eta' - \eta'''|).$$

Этот результат вытекает из леммы 1 и неравенств (24), (25).

5. Доказательство теоремы 1. Используя (24), (25) и лемму 2, устанавливаем: существует возрастающая последовательность $\{s_j\} \subset \mathbb{N}$ и последовательность функций $\Phi_t\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n,k} \times \mathbb{R}^{n,k} \to \mathbb{R}$ такие, что для любых $t \in \mathbb{N}$, $y \in Y_t^0$, $\xi \in \mathbb{R}$, $\eta, \eta' \in \mathbb{R}^{n,k}$

$$\lim_{j\to\infty} F_{t,s_j}(y, \xi, \eta, \eta') = \Phi_t(y, \xi, \eta, \eta'). \tag{28}$$

В силу (28), (24), (25) и леммы 1 для любых $t \in \mathbb{N}$, $y \in Y_t^0$, $\xi \in \mathbb{R}$, η, $\eta' \in \mathbb{R}^{n,k}$

$$-c \le \Phi_t(y, \xi, \eta, \eta') \le 2^m c\sigma(1 + |\xi| + |\eta| + |\eta'|)^m; \tag{29}$$

для любых $t \in \mathbb{N}$, $y \in Y_t^0$, $\xi, \xi' \in \mathbb{R}$, $\eta, \eta', \eta'', \eta''' \in \mathbb{R}^{n,k}$, $r \in [0, 1]$

$$\Phi_t(y, (1-r)\xi + r\xi', (1-r)\eta + r\eta'', (1-r)\eta' + r\eta''') \le$$
$$\le (1-r)\Phi_t(y, \xi, \eta, \eta') + r\Phi_t(y, \xi', \eta'', \eta'''). \tag{30}$$

***Определение* 6.** *Если* $t \in \mathbb{N}$, *то* g_t — *функция на* $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n,k} \times \mathbb{R}^{n,k}$ *такая, что для любого элемента* $(x, \xi, \eta, \eta') \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n,k} \times \mathbb{R}^{n,k}$, *удовлетворяющего условиям*

$$x \in Q_t(y), \quad y \in Y_t^0, \tag{31}$$

$g_t(x, \xi, \eta, \eta') = \Phi_t(y, \xi, \eta, \eta')$; *для любого элемента* $(x, \xi, \eta, \eta') \in \Omega \times \mathbb{R} \times$ $\times \mathbb{R}^{n,k} \times \mathbb{R}^{n,k}$, *не удовлетворяющего условиям* (31), $g_t(x, \xi, \eta, \eta') = 0$.

Легко видеть, что для любых $t \in \mathbb{N}$, $\xi \in \mathbb{R}$, $\eta, \eta' \in \mathbb{R}^{n,k}$ функция $g_t(\cdot, \xi, \eta, \eta')$ измерима на Ω. Кроме того, в силу (30) для любых $t \in \mathbb{N}$ и $x \in \Omega$ функция $g_t(x, \cdot, \cdot, \cdot)$ выпукла на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n,k} \times \mathbb{R}^{n,k}$, а в силу (29) для любых $t \in \mathbb{N}$, $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}$, $\eta, \eta' \in \mathbb{R}^{n,k}$

$$-c \le g_t(x, \xi, \eta, \eta') \le 2^m c\sigma(1 + |\xi| + |\eta| + |\eta'|)^m. \tag{32}$$

Тогда для любых $t \in \mathbb{N}$, $x \in \Omega$, $\xi, \xi' \in \mathbb{R}$, $\eta, \eta', \eta'', \eta''' \in \mathbb{R}^{n,k}$

$$|g_t(x, \xi, \eta, \eta') - g_t(x, \xi', \eta'', \eta''')| \le$$
$$\le 5^m c\sigma(1 + |\xi| + |\xi'| + |\eta| + |\eta'| + |\eta''| + |\eta'''|)^{m-1} \times$$
$$\times (|\xi - \xi'| + |\eta - \eta''| + |\eta' - \eta'''|). \tag{33}$$

Используя полученные свойства функций g_t, устанавливаем: существуют возрастающая последовательность $\{t_h\} \subset \mathbb{N}$ и функция $f \in \mathcal{F}$ такие, что для любых $\xi \in \mathbb{R}$, $\eta, \eta' \in \mathbb{R}^{n,k}$

$$g_{t_h}(\cdot, \xi, \eta, \eta') \to f(\cdot, \xi, \eta, \eta') \quad \text{слабо в} \quad L^2(\Omega); \tag{34}$$

для любых $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}$, $\eta, \eta' \in \mathbb{R}^{n,k}$

$$-c \le f(x, \xi, \eta, \eta') \le 2^m c\sigma(1 + |\xi| + |\eta| + |\eta'|)^m; \tag{35}$$

для любых $x \in \Omega$, $\xi, \xi' \in \mathbb{R}$, $\eta, \eta', \eta'', \eta''' \in \mathbb{R}^{n,k}$

$$|f(x, \xi, \eta, \eta') - f(x, \xi', \eta'', \eta''')| \le$$
$$\le 5^m c\sigma(1 + |\xi| + |\xi'| + |\eta| + |\eta'| + |\eta''| + |\eta'''|)^{m-1} \times$$
$$\times (|\xi - \xi'| + |\eta - \eta''| + |\eta' - \eta'''|). \tag{36}$$

Докажем ряд предложений, которые позволяют заключить, что последовательность $\{I_{s_j}\}$ Г-сходится к функционалу I^f.

Введем обозначения: если $t \in \mathbb{N}$, то $Y_t' = \{y \in Y_t \colon Q_t(y) \subset \Omega\}$; если $u \in \in (W^{k,m}(\Omega))^2$, причем $u^{(1)}, u^{(2)} \in C^\infty(\overline{\Omega})$, и $t \in \mathbb{N}$, то

$$\lambda_t(u) = \sum_{y \in Y_t'} \int_{Q_t(y)} g_t(\cdot, u^{(2)}(y) - u^{(1)}(y), \nabla_k u^{(1)}(y), \nabla_k u^{(2)}(y))\, dx.$$

Используя (32)–(36), устанавливаем: если $u \in (W^{k,m}(\Omega))^2$, причем $u^{(1)}$, $u^{(2)} \in C^\infty(\overline{\Omega})$, то

$$\lim_{h \to \infty} \lambda_{t_h}(u) = I^f(u). \tag{37}$$

Далее через c_i, $i = 1, 2, \ldots$, будем обозначать положительные постоянные, зависящие только от n, m, k, ν, c, σ и $\operatorname{mes}\Omega$.

Предложение 4. *Пусть* $u \in (W^{k,m}(\Omega))^2$, *причем* $u^{(1)}, u^{(2)} \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $\{u_s\} \in \mathcal{E}(u)$. *Тогда*

$$\liminf_{j \to \infty} I_{s_j}(u_{s_j}) \ge I^f(u). \tag{38}$$

Доказательство. Положим для любого $s \in \mathbb{N}$

$$v_s = u_s - (1 - \psi_s) q_s u^{(1)} - \psi_s q_s u^{(2)}.$$

В силу (2), (20), (21) и включения $\{u_s\} \in \mathcal{E}(u)$ имеем

$$\lim_{s \to \infty} \int_{\Omega_s} |\delta_k v_s|^m dx = 0. \tag{39}$$

Если $s \in \mathbb{N}$, то через θ_s обозначим отображение Ω_s в $\mathbb{R}^{nk}$ такое, что для любого $x \in \Omega_s$

$$\theta_s(x) = \nabla_k v_s(x) - \nabla_k u_s(x) + (1 - \psi_s(x)) \nabla_k u^{(1)}(x) +$$
$$+ \psi_s(x) \nabla_k u^{(2)}(x) + (u^{(2)}(x) - u^{(1)}(x)) \nabla_k \psi_s(x). \tag{40}$$

Используя (20) и (21), устанавливаем

$$\lim_{s \to \infty} \int_{\Omega_s} |\theta_s|^m dx = 0. \tag{41}$$

Зафиксируем произвольное $l \in \mathbb{N}$. Очевидно, существует $\tilde{t} \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $t \in \mathbb{N}$, $t \ge \tilde{t}$, $Y_t' \ne \varnothing$ и

$$\operatorname{mes}\left(\Omega \setminus \bigcup_{y \in Y_t'} Q_t(y)\right) \le l^{-1}. \tag{42}$$

Ясно также, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любых $x', x'' \in \Omega$, удовлетворяющих условию $|x' - x''| \le \varepsilon$, справедливо неравенство

$$|u^{(1)}(x') - u^{(1)}(x'')| + |u^{(2)}(x') - u^{(2)}(x'')| +$$

$$+ |\nabla_k u^{(1)}(x') - \nabla_k u^{(1)}(x'')| + |\nabla_k u^{(2)}(x') - \nabla_k u^{(2)}(x'')| \le l^{-1}. \tag{43}$$

Зафиксируем $t \in \mathbb{N}$, $t \ge \max\left(\tilde{t}, n/\varepsilon\right)$. Для любого $y \in Y_t'$ положим

$$\xi^y = u^{(2)}(y) - u^{(1)}(y), \quad \eta^y = \nabla_k u^{(1)}(y), \quad \tilde{\eta}^y = \nabla_k u^{(2)}(y).$$

В силу (39) найдется $\tilde{s} \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $s \in \mathbb{N}$, $s \ge \tilde{s}$,

$$\int_{\Omega_s} |\delta_k v_s|^m dx \le t^{-1-(2k+1)m}. \tag{44}$$

Зафиксируем $s \in \mathbb{N}$, $s \ge \tilde{s}$, и возьмем $y \in Y_t'$. В силу (44)

$$v_s \in V_{t,s}(y), \tag{45}$$

а с учетом (40), (17), (18), (20) и (43) для $x \in Q_t(y) \cap \Omega_s$ имеем

$$f_s(x, a_s(\xi^y, \eta^y, \tilde{\eta}^y)(x) + \nabla_k v_s(x)) \le$$

$$\le f_s(x, \nabla_k u_s(x)) + 2cl^{-1} + cl^{-1}(1 + |\nabla_k u_s(x)| + |\nabla_k \psi_s(x)| + l|\theta_s(x)|)^m.$$

Тогда, учитывая (45), получаем

$$F_{t,s}(y, \xi^y, \eta^y, \tilde{\eta}^y) t^{-n} \le \int_{Q_t(y) \cap \Omega_s} f_s(x, a_s(\xi^y, \eta^y, \tilde{\eta}^y) + \nabla_k v_s)\, dx \le$$

$$\le \int_{Q_t(y) \cap \Omega_s} f_s(x, \nabla_k u_s)\, dx +$$

$$+ cl^{-1} \int_{Q_t(y) \cap \Omega_s} (1 + |\nabla_k u_s| + |\nabla_k \psi_s| + l|\theta_s|)^m dx + 2cl^{-1} t^{-n}.$$

Отсюда, используя (18), (20) и (42), выводим соотношение

$$\sum_{y \in Y_t'} F_{t,s}(y, \xi^y, \eta^y, \tilde{\eta}^y) t^{-n} \le I_s(u_s) + c_1 l^{-1}(1 + \mu^m) +$$

$$+ 4^m c l^{-1} \int_{H_s} |\nabla_k \psi_s|^m dx + 4^m c l^m \int_{\Omega_s} |\theta_s|^m dx,$$

где

$$\mu = \sup_s \|u_s\|_{W^{k,m}(\Omega_s)}.$$

Из полученного неравенства с учетом (22), (28) и (41) находим

$$\lambda_t(u) \le \liminf_{j \to \infty} I_{s_j}(u_{s_j}) + c_2 l^{-1}(1 + \mu^m).$$

Отсюда и из (37) имеем

$$I^f(u) \le \liminf_{j\to\infty} I_{s_j}(u_{s_j}) + c_2 l^{-1}(1+\mu^m).$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $l \to \infty$, получаем (38). Предложение доказано.

Предложение 5. *Пусть* $u \in (W^{k,m}(\Omega))^2$, $\{u_s\} \in \mathcal{E}(u)$. *Тогда справедливо неравенство* (38).

Доказательство. Рассмотрим последовательность $v_l \in (W^{k,m}(\Omega))^2$ такую, что для любого $l \in \mathbb{N}$ $v_l^{(1)}, v_l^{(2)} \in C^\infty(\overline{\Omega})$ и

$$\|v_l - u\|_{(W^{k,m}(\Omega))^2} \le l^{-1}. \tag{46}$$

Тогда согласно предложению 1 для любого $l \in \mathbb{N}$ существует последовательность $\{w_s^l\} \in \mathcal{E}(v_l - u)$ такая, что

$$\limsup_{s\to\infty} \|w_s^l\|_{W^{k,m}(\Omega_s)} \le \nu_1 l^{-1}. \tag{47}$$

Положим для любых $l, s \in \mathbb{N}$ $u_s^l = u_s + w_s^l$. Для любого $l \in \mathbb{N}$ имеем $\{u_s^l\} \in \mathcal{E}(v_l)$ и согласно предложению 4

$$\liminf_{j\to\infty} I_{s_j}\left(u_{s_j}^l\right) \ge I^f(v_l).$$

Отсюда, используя (19), (36), (46), (47), выводим неравенство (38). Предложение доказано.

Предложение 6. *Пусть* $u \in (W^{k,m}(\Omega))^2$, *причем* $u^{(1)}, u^{(2)} \in C^\infty(\overline{\Omega})$. *Тогда существует последовательность* $\{w_s\} \in \mathcal{E}(u)$ *такая, что*

$$\sup_s \|w_s\|_{W^{k,m}(\Omega_s)} \le c_3\left(\|u\|_{(W^{k,m}(\Omega))^2} + 1\right), \qquad \limsup_{j\to\infty} I_{s_j}(w_{s_j}) \le I^f(u). \tag{48}$$

Доказательство. Пусть число μ — мажоранта функции

$$1 + \sum_{|\alpha|\le k} (|D^\alpha u^{(1)}| + |D^\alpha u^{(2)}|)$$

Зафиксируем произвольное $l \in \mathbb{N}$. Очевидно, существует $\tilde{t} \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $t \in \mathbb{N}$, $t \ge \tilde{t}$, $Y_t' \ne \varnothing$ и

$$\operatorname{mes}\left(\Omega \setminus \bigcup_{y\in Y_t'} Q_t(y)\right) \le \mu^{-m} l^{-1}. \tag{49}$$

Ясно также, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любых $x', x'' \in \Omega$, удовлетворяющих условию $|x' - x''| \le \varepsilon$, справедливо неравенство (43).

Зафиксируем $t \in \mathbb{N}$, $t \ge \max(\tilde{t}, n/\varepsilon, \mu^m l^m)$. Для любого $y \in Y_t'$ положим

$$\xi^y = u^{(2)}(y) - u^{(1)}(y), \quad \eta^y = \nabla_k u^{(1)}(y), \quad \tilde{\eta}^y = \nabla_k u^{(2)}(y).$$

Пусть для любого $y \in Y_t'$ φ_y — функция класса $C^\infty(\overline{\Omega})$ такая, что $0 \le \varphi_y \le 1$

на Ω, $\varphi_y = 1$ на $Q_{t+1}(y)$, $\varphi_y = 0$ на $\Omega \setminus Q_t(y)$, $|D^\alpha \varphi_y| \le \nu_0 t^{2|\alpha|}$ на Ω ($|\alpha| \le k$). Пусть также для любых $s \in \mathbb{N}$ и $y \in Y_t'$ $v_{s,y} \in V_{t,s}(y)$, причем

$$\int\limits_{Q_t(y) \cap \Omega_s} f_s(x, a_s(\xi^y, \eta^y, \tilde{\eta}^y) + \nabla_k v_{s,y})\, dx \le F_{t,s}(y, \xi^y, \eta^y, \tilde{\eta}^y) t^{-n} + l^{-1} t^{-n}. \quad (50)$$

Используя (18), (23), (25), (43), (50), устанавливаем

$$\limsup_{s \to \infty} \sum_{y \in Y_t'} \int\limits_{Q_t(y) \cap \Omega_s} |\nabla_k v_{s,y}|^m dx \le c_4 \left(\|u\|_{(W^{k,m}(\Omega))^2} + 1 \right)^m. \quad (51)$$

Положим теперь для любого $s \in \mathbb{N}$

$$v_s = (1 - \psi_s) q_s u^{(1)} + \psi_s q_s u^{(2)} + \sum_{y \in Y_t'} v_{s,y} \varphi_y.$$

С помощью включений $v_{s,y} \in V_{t,s}(y)$, а также (2), (21), (22), (43), (49), (51) находим

$$\limsup_{s \to \infty} \|v_s\|_{W^{k,m}(\Omega_s)} \le c_5 \left(\|u\|_{(W^{k,m}(\Omega))^2} + 1 \right), \quad (52)$$

$$\limsup_{s \to \infty} \rho_s(v_s, u) \le c_6 l^{-1}, \quad (53)$$

$$\limsup_{s \to \infty} \int\limits_{H_s} |\delta_k v_s|^m dx \le c_7 l^{-1}. \quad (54)$$

Кроме того, в силу (18), (21) и (49) имеем

$$\limsup_{s \to \infty} \int\limits_{\Omega_s \setminus E_t} f_s(x, \nabla_k v_s)\, dx \le c_8 l^{-1}, \quad (55)$$

где

$$E_t = \bigcup_{y \in Y_t'} Q_t(y).$$

Если $s \in \mathbb{N}$, $y \in Y_t'$, то через $\theta_{s,y}$ обозначим отображение Ω_s в $\mathbb{R}^{n,k}$ такое, что для любого $x \in \Omega_s$

$$\theta_{s,y}(x) = \nabla_k v_s(x) - \varphi_y(x) a_s(\xi^y, \eta^y, \tilde{\eta}^y)(x) - \varphi_y(x) \nabla_k v_{s,y}(x). \quad (56)$$

Используя включения $v_{s,y} \in V_{t,s}(y)$, свойства функций φ_y, а также (21), (22) и (43), устанавливаем соотношение

$$\limsup_{s \to \infty} \sum_{y \in Y_t'} \int\limits_{Q_t(y) \cap \Omega_s} |\theta_{s,y}|^m dx \le c_9 l^{-m}. \quad (57)$$

Далее, в силу (56), (17), (18) и (50) для любых $s \in \mathbb{N}$ и $y \in Y_t'$ имеем

$$\int\limits_{Q_t(y) \cap \Omega_s} f_s(x, \nabla_k v_s)\, dx \le F_{t,s}(y, \xi^y, \eta^y, \tilde{\eta}^y) t^{-n} +$$

$$+ 3^m c l^{-1} \int\limits_{Q_t(y) \cap \Omega_s} \{ |a_s(\xi^y, \eta^y, \tilde{\eta}^y)|^m + |\nabla_k v_{s,y}|^m + l^m |\theta_{s,y}|^m \}\, dx + 5 c n l^{-1} t^{-n}.$$

Отсюда и из (55), используя (23), (28), (43), (51), (57), выводим

$$\limsup_{s\to\infty} I_{s_j}(v_{s_j}) \le \lambda_l(u) + c_{10} l^{-1}\left(\|u\|_{(W^{k,m}(\Omega))^2} + 1\right)^m. \tag{58}$$

Заметим, что в силу (37) можно считать выполненным неравенство $\lambda_l(u) \le$ $\le I^f(u) + l^{-1}$. Тогда из (58) получаем

$$\limsup_{s\to\infty} I_{s_j}(v_{s_j}) \le I^f(u) + c_{11} l^{-1}\left(\|u\|_{(W^{k,m}(\Omega))^2} + 1\right)^m. \tag{59}$$

Теперь, учитывая (52)–(54) и (59), заключаем, что если $l \in \mathbb{N}$, то существуют последовательность $v_s^{(l)} \in W^{k,m}(\Omega_s)$ и числа $s^{(l)}$, $j^{(l)} \in \mathbb{N}$ такие, что для любого $s > s^{(l)}$

$$\left\|v_s^{(l)}\right\|_{W^{k,m}(\Omega_s)} \le (c_5+1)\left(\|u\|_{(W^{k,m}(\Omega))^2} + 1\right), \quad \rho_s\left(v_s^{(l)}, u\right) \le (c_6+1)l^{-1}, \tag{60}$$

$$\int_{H_s} \left|\delta_k v_s^{(l)}\right|^m dx \le (c_7+1) l^{-1}; \tag{61}$$

для любого $j > j^{(l)}$

$$I_{s_j}\left(v_{s_j}^{(l)}\right) \le I^f(u) + (c_{11}+1) l^{-1}\left(\|u\|_{(W^{k,m}(\Omega))^2} + 1\right)^m. \tag{62}$$

Положим для любого $l \in \mathbb{N}$

$$\tilde{s}^{(l)} = l + \max_{1\le r\le l} s^{(r)} + \max_{1\le r\le l} s_{j(r)}.$$

Легко убедиться в том, что $\{\tilde{s}^{(l)}\}$ — возрастающая последовательность. Пусть теперь $\{w_s\}$ — такая последовательность, что $w_s = 0$, если $s \le \tilde{s}^{(1)}$; $w_s = v_s^{(l)}$, если $\tilde{s}^{(l)} < s \le \tilde{s}^{(l+1)}$, $l = 1, 2, \ldots$. Из (60)–(62) вытекает, что $\{w_s\} \in \mathcal{E}(u)$ и выполняются неравенства (48). Предложение доказано.

Предложение 7. *Пусть* $u \in (W^{k,m}(\Omega))^2$. *Тогда существует последовательность* $\{w_s\} \in \mathcal{E}(u)$ *такая, что справедливо второе из неравенств* (48).

Доказательство. Пусть для любого $l \in \mathbb{N}$ $b_l \in (W^{k,m}(\Omega))^2$, причем $b_l^{(1)}, b_l^{(2)} \in C^\infty(\overline{\Omega})$ и

$$\|b_l - u\|_{(W^{k,m}(\Omega))^2} \le l^{-1}, \quad I^f(b_l) \le I^f(u) + l^{-1}.$$

Используя эти неравенства и предложение 6, устанавливаем: если $l \in \mathbb{N}$, то существуют последовательность $v_s^{(l)} \in W^{k,m}(\Omega_s)$ и числа $s^{(l)}, j^{(l)} \in \mathbb{N}$ такие, что для любого $s > s^{(l)}$ выполняются неравенства вида (60), (61), а для любого $j > j^{(l)}$ выполняется неравенство вида (62). Но тогда в силу изложенного в заключении доказательства предложения 6 существует последовательность $\{w_s\} \in \mathcal{E}(u)$ такая, что справедливо второе из неравенств (48). Предложение доказано.

Из предложений 5 и 7 выводим, что последовательность $\{I_{s_j}\}$ Г-сходится к функционалу I^f. Теорема доказана.

6. Заключительные замечания.

***Замечание* 2.** Примером областей Ω_s со структурой (1), для компонент которых выполняются условия а) и б), могут служить области каркасного типа с тонкими каналами, описанные в [2], если положить $m = 2(\delta - 1)k^{-1}$. Для этих областей выполняется также условие в) и, следовательно, в силу предложения 2 пространства $W^{k,m}(\Omega_s)$ слабо связаны с $W^{k,m}(\Omega)$. Однако пространства $W^{k,m}\left(\Omega_s^{(1)}\right)$, $W^{k,m}\left(\Omega_s^{(2)}\right)$ сильно связаны с $W^{k,m}(\Omega)$. Кроме того, в связи с замечанием 1 отметим, что для всякой последовательности $u_s \in W^{k,m}(\Omega_s)$, удовлетворяющей (3), верно соотношение (5).

Из предложения 3 и замечаний 1, 2 для рассматриваемого здесь случая получаем следующий результат.

Теорема 2. *Пусть для любого* $s \in \mathbb{N}$ I_s *— функционал на* $W^{k,m}(\Omega_s)$, I *— строго выпуклый функционал на* $(W^{k,m}(\Omega))^2$, *последовательность* $\{I_s\}$ *Г-сходится к функционалу* I *и для любого* $s \in \mathbb{N}$ u_s *— функция, минимизирующая функционал* I_s *на* $W^{k,m}(\Omega_s)$, *причем выполняется неравенство* (3). *Тогда существует элемент* $u \in (W^{k,m}(\Omega))^2$, *минимизирующий* I *на* $(W^{k,m}(\Omega))^2$, *такой, что верно* (4) *и* $I_s(u_s) \to I(u)$ *при* $s \to \infty$.

***Замечания.* 3.** В случае $k = 1$ достаточные условия сходимости решений вариационных задач Неймана в областях Ω_s со структурой (1) ранее получены в [1, 3, 4]. Эти результаты также были установлены с помощью специальных локальных характеристик рассматриваемых областей. Однако результаты типа Г-компактности в указанных работах отсутствуют.

4. При доказательстве теоремы 1 оказались полезными некоторые идеи работы [5], связанные с предельными переходами.

1. *Хруслов Е. Я.* Асимптотическое поведение решений второй краевой задачи при измельчении границы области // Мат. сб. – 1978. – **106**, № 4. – С. 604–621.
2. *Ковалевский А. А.* Усреднение задач Неймана для нелинейных эллиптических уравнений в областях каркасного типа с тонкими каналами // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 11. – С. 1503–1513.
3. *Хруслов Е. Я.* О сходимости решений второй краевой задачи в слабо связанных областях // Теория операторов в функциональных пространствах и ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1981. – С. 129–173.
4. *Панкратов Л. С.* О сходимости решений вариационных задач в слабо связанных областях. – Харьков, 1988. – 25 с. – (Препринт / АН УССР. Физ-техн. ин-т низ. температур; 53.88).
5. *Жиков В. В.* О переходе к пределу в нелинейных вариационных задачах // Мат. сб. – 1992. – **183**, № 8. – С. 47–84.

Получено 10.05.94