УДК 517.349

О. И. Кузнецова
(Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

К ВОПРОСУ О СИЛЬНОМ СУММИРОВАНИИ ПО КРУГАМ

The estimates of the sequence of norms of nonlinear functionals which appear in the problem of strong summability by disks of Fourier series of continuous functions on two-dimensional torus are obtained.

Знайдені оцінки послідовності норм нелінійних функціоналів, що виникають у задачі сильної сумовності за кругами рядів Фур'є неперервних на двомірному торі функцій.

В пространстве $L_\infty(T^2)$ измеримых ограниченных почти всюду на $T^2 = [-\pi, \pi)^2$ функций с обычной нормой рассмотрим последовательность функционалов

$$\overline{S}_n(f) := (n+1)^{-1} \sum_{l=0}^{n} |S_l(f,0)|,$$

где

$$S_n(f,x) = \sum_{|k| \le n} \hat{f}(k) e^{ikx}$$

— частичная круговая сумма ряда Фурье функции $f \in L_\infty(T^2)$, $\hat{f}(k)$ — ее k-й коэффициент Фурье, $k \in Z^2$, $|k| = \left(k_1^2 + k_2^2\right)^{1/2}$, $kx = k_1 x_1 + k_2 x_2$.

Ограниченность $\|\overline{S}_n\|$ по n равнозначна сильной суммируемости по кругам рядов Фурье непрерывных на T^2 функций (о сильной суммируемости в одномерном случае см., например, [1], гл. VII). Вопрос об ограниченности $\|\overline{S}_n\|$ по n открыт. Цель данной статьи — установить эквивалентность $\|\overline{S}_n\|$ и взвешенных интегральных норм некоторых случайных полиномов, а также получить оценки $\|\overline{S}_n\|$.

В дальнейшем c, c_1, c_2, ... — различные абсолютные постоянные, $A_n \sim B_n$ означает, что существуют c_1, c_2 такие, что $c_1 B_n \le A_n \le c_2 B_n$.

Теорема 1. *Пусть* ε_l — *произвольная последовательность* $\varepsilon_l = \pm 1$. *Тогда*

$$\sup_{|f| \le 1} (n+1)^{-1} \sum_{l=0}^{n} |S_l(f,0)| \sim \sup_{\varepsilon_l} (n+1)^{-1} \int_{(n+1)^{-1}}^{1} \alpha^{-1/2} \left| \sum_{l=1}^{n} \varepsilon_l l^{1/2} \sin\left(l\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \right| d\alpha.$$

Доказательство. Очевидно,

$$\|\overline{S}_n\| = \sup_{|f| \le 1} \sup_{\varepsilon_l} (n+1)^{-1} \left| \sum_{l=0}^{n} \varepsilon_l S_l(f,0) \right| =$$

$$= (2\pi)^{-2} \sup_{\varepsilon_l} (n+1)^{-1} \int_{T^2} \left| \sum_{l=0}^{n} \varepsilon_l \sum_{|k| \le l} e^{ikx} \right| dx := (2\pi)^{-2} \sup_{\varepsilon_l} I_n.$$

Положим при $0 \le l \le n$

$$\lambda_l = (n+1)^{-1} \sum_{j=l}^{n} \varepsilon_j, \quad \lambda_{n+1} = 0.$$

Тогда

$$I_n = \int\limits_{T^2} \left| \sum_{l=0}^{n} (\lambda_l - \lambda_{l+1}) \sum_{|k| \le l} e^{ikx} \right| dx = \int\limits_{T^2} \left| \lambda_0 + \sum_{l=1}^{n} \lambda_l \sum_{l-1<|k|\le l} e^{ikx} \right| dx.$$

Исходя из набора λ_l, построим последовательность непрерывных на $[0, 1]$ функций $\lambda_n(t)$, $\lambda_n(1) = 0$, следующим образом. Пусть $\overline{\lambda}_n$ — непрерывная на отрезке $[0, n+1]$ функция такая, что $\overline{\lambda}_n(0) = \lambda_0$, $\overline{\lambda}_n(t) = \lambda_l$ при $l - 1 + 1/(2(n+1)) \le t \le l$, $1 \le l \le n+1$, и линейная на оставшихся промежутках. Тогда положим $\lambda_n(t/(n+1)) = \overline{\lambda}_n(t)$.

Пусть Λ_n — радиальная функция, заданная на круге $|x| \le 1$ равенством $\Lambda_n(x) = \lambda_n(|x|)$. Заметим, что если точка $k \in Z^2$ принадлежит кольцу $l < |x| \le l+1$ и $l \le n$, то

$$|k| - l > \frac{1}{2(l+1)} \ge \frac{1}{2(n+1)}.$$

Это означает, что в каждом кольце $l < |x| \le l + 1/(2(n+1))$, $0 \le l \le n$, нет точек из Z^2. Поэтому

$$I_n = \int\limits_{T^2} \left| \sum_{|k| \le n+1}^{n} \Lambda_n\left(\frac{k}{n+1}\right) e^{ikx} \right| dx.$$

Покажем, что

$$\int\limits_{(2\pi)^{-1}T^2} \left(\sum_k \left| \Lambda_n\left(\frac{k}{n+1}\right) - \Lambda_n\left(\frac{k+u}{n+1}\right) \right|^2 \right)^{1/2} du = O(1).$$

Действительно,

$$\left| \Lambda_n\left(\frac{k}{n+1}\right) - \Lambda_n\left(\frac{k+u}{n+1}\right) \right| = \left| \lambda_n\left(\frac{|k|}{n+1}\right) - \lambda_n\left(\frac{|k+u|}{n+1}\right) \right| \le \frac{2}{n+1}$$

при $|u| \le \sqrt{2}$, а число точек с целыми координатами в шаре радиуса $n+1$ имеет порядок $(n+1)^2$. Тогда по теореме 1 из [2] имеем

$$I_n \sim \int\limits_{|x| \le n+1} \left| \tilde{\Lambda}_n(x) \right| dx := \int\limits_{|x| \le n+1} \left| \int\limits_{|u| \le 1} \Lambda_n(u) e^{-iux} du \right| dx. \tag{1}$$

Применим к внутреннему интегралу в (1) теорему Коши – Пуассона [3, с. 263] и перейдем к полярным координатам во внешнем интеграле. Тогда

$$I_n \sim \int\limits_0^{n+1} \alpha \left| \int\limits_0^1 \lambda_n(\rho) \rho J_0(\alpha\rho) d\rho \right| d\alpha, \tag{2}$$

J_0 — функция Бесселя нулевого порядка.

Обозначим $q_n = 1/(2(n+1))$. По построению функции λ_n ее производная $\lambda_n'(t) = -2\varepsilon_l(n+1)$ в точках, принадлежащих интервалу $(l/(n+1), l/(n+1) + q_n)$, $0 \le l \le n$, и равна нулю в смежных интервалах, причем

$$\int\limits_0^1 |\lambda_n'(t)|t^{-1/2}dt = 2(n+1)\sum_{l=0}^{n}\int\limits_{l/(n+1)}^{l/(n+1)+q_n}\rho^{-1/2}d\rho = O(1).$$

Следовательно, возможно провести преобразования интеграла (2) аналогично преобразованиям из [4, с. 503]; в результате будем иметь

$$I_n \sim \int\limits_0^{n+1}\alpha^{-1/2}\left|\int\limits_0^1 \lambda_n'(\rho)\rho^{1/2}\sin\left(\alpha\rho-\frac{\pi}{4}\right)d\rho\right|d\alpha =$$

$$= (n+1)\int\limits_1^{n+1}\alpha^{-1/2}\left|\sum_{l=0}^{n}\varepsilon_l\int\limits_{l/(n+1)}^{l/(n+1)+q_n}\rho^{1/2}\sin\left(\alpha\rho-\frac{\pi}{4}\right)d\rho\right|d\alpha. \tag{3}$$

Заменим подынтегральную функцию во внутреннем интеграле ее значением в левом конце промежутка интегрирования. При $l/(n+1)\le\rho\le l/(n+1)+ + q_n$ получаем

$$\left|\rho^{1/2}\sin\left(\alpha\rho-\frac{\pi}{4}\right)-\left(\frac{l}{n+1}\right)^{1/2}\sin\left(\alpha\frac{l}{n+1}-\frac{\pi}{4}\right)\right| \le$$

$$\le \left[\left(\frac{l}{n+1}+q_n\right)^{1/2}-\left(\frac{l}{n+1}\right)^{1/2}\right]+\left(\frac{l}{n+1}\right)^{1/2}\sin\frac{\alpha q_n}{2} \le$$

$$\le \frac{q_n}{2}\left[\left(\frac{n+1}{l}\right)^{1/2}+\alpha\left(\frac{l}{n+1}\right)^{1/2}\right],$$

поэтому погрешность такой замены имеет вид

$$(n+1)\,q_n^2\int\limits_1^{n+1}\alpha^{-1/2}\sum_{l=1}^{n}\left[\left(\frac{n+1}{l}\right)^{1/2}+\alpha\left(\frac{l}{n+1}\right)^{1/2}\right]d\alpha = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

В итоге имеем

$$I_n \sim (n+1)^{1/2}q_n\int\limits_1^{n+1}\alpha^{-1/2}\left|\sum_{l=1}^{n}\varepsilon_l l^{1/2}\sin\left(\alpha\frac{l}{n+1}-\frac{\pi}{4}\right)\right|d\alpha,$$

или, после замены переменных $\alpha\to\alpha/(n+1)$,

$$I_n \sim (n+1)^{-1}\int\limits_{(n+1)^{-1}}^{1}\alpha^{-1/2}\left|\sum_{l=1}^{n}\varepsilon_l l^{1/2}\sin\left(l\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\right|d\alpha. \tag{4}$$

Теорема доказана.

Замечание. Справедлива оценка

$$\|\overline{S}_n\| \le c(\ln n)^{1/2}.$$

Оценка получается применением к (4) неравенства Коши – Буняковского и равенства Парсеваля.

В то же время „в среднем" по ε_l I_n ограничен, т. е.

$$(n+1)^{-1}\int\limits_0^1 dt\int\limits_{(n+1)^{-1}}^{1}\alpha^{-1/2}\left|\sum_{l=1}^{n}r_l(t)l^{1/2}\sin\left(l\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\right|d\alpha = O(1), \tag{5}$$

$r_l(t) = \operatorname{sign} \sin 2^{l+1}\pi t$ — функция Радемахера. Действительно, этот интеграл эквивалентен следующему [5, с. 341]

$$(n+1)^{-1} \int\limits_{(n+1)^{-1}}^{1} \alpha^{-1/2}\left[\sum_{l=1}^{n} l \sin^2\left(l\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\right]^{1/2} d\alpha =$$

$$= (n+1)^{-1} \int\limits_{(n+1)^{-1}}^{1} \alpha^{-1/2}\left[\frac{n(n+1)}{2} - 2\tilde{D}_n'(2\alpha)\right]^{1/2} d\alpha,$$

где $\tilde{D}_n$ — сопряженное ядро Дирихле порядка n. Пользуясь простым неравенством $|a|^{1/2} - |b|^{1/2} \le |a+b|^{1/2} \le |a|^{1/2} + |b|^{1/2}$ и оценкой

$$\left|\tilde{D}_n'(2\alpha)\right| \le \frac{cn}{|\sin\alpha|}, \tag{6}$$

получаем (5). Точный порядок $\sup_{\varepsilon_l} I_n$, а следовательно, и $\|\overline{S}_n\|$ нам неизвестен.

Пусть, по-прежнему, $\varepsilon_l = \pm 1$ — любая последовательность и Λ_n — функция, определенная при доказательстве теоремы 1. Для любой $f \in L_\infty(T^2)$ рассмотрим средние

$$\Lambda_{m,n}(f) := \sum_{|k| \le m} \Lambda_n\left(\frac{k}{m}\right)\hat{f}(k)e^{ikx}.$$

Очевидно,

$$\|\Lambda_{m,n}\| = (2\pi)^{-2} \int\limits_{T^2} \left|\sum_{|k| \le m} \Lambda_n\left(\frac{k}{m}\right)e^{ikx}\right| dx,$$

причем

$$\sup_{\varepsilon_l} \|\Lambda_{m,n}\| = \|\overline{S}_n\|.$$

Теорема 2. *Справедливо неравенство*

$$\sup_{\varepsilon_l} \sup_{m} \|\Lambda_{m,n}\| \ge cn^{1/2}.$$

Доказательство. Функция Λ_n финитна и непрерывна, следовательно ([4], следствие 2),

$$A_n := \sup_{m} \|\Lambda_{m,n}\| = (2\pi)^{-1} \int\limits_{R^2} \left|\tilde{\Lambda}_n(u)\right| du.$$

Поскольку расширение области интегрирования на все пространство не влияет на оценки, полученные при доказательстве этой формулы, аналогично (3) имеем

$$A_n \sim (n+1)\int\limits_{1}^{\infty} \alpha^{-1/2} \left| \sum_{l=1}^{n} \varepsilon_l \int\limits_{l/(n+1)}^{l/(n+1)+q_n} \rho^{1/2} \sin\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4}\right) d\rho \right| d\alpha.$$

Интегрируя во внутреннем интеграле по частям и замечая, что

$$(n+1)\int_1^\infty \alpha^{-3/2}\sum_{l=0}^{n}\int_{l/(n+1)}^{l/(n+1)+q_n}\frac{|\cos(\alpha\rho-\pi/4)|}{\rho^{1/2}}d\rho\, d\alpha \le$$

$$\le c n^{3/2} q_n \sum_{l=1}^{n} l^{-1/2} = O(1),$$

получаем

$$A_n \sim (n+1)\int_1^\infty \alpha^{-3/2}\left|\sum_{l=0}^{n}\varepsilon_l\left\{\left(\frac{l}{n+1}+q_n\right)^{1/2}\cos\left[\alpha\left(\frac{l}{n+1}+q_n\right)-\frac{\pi}{4}\right]-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left(\frac{l}{n+1}\right)^{1/2}\cos\left(\alpha\frac{l}{n+1}-\frac{\pi}{4}\right)\right\}\right|d\alpha =$$

$$= (n+1)^{1/2}\int_1^\infty \frac{|\sin(\alpha q_n/2)|}{\alpha^{3/2}}\left|\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{l}{n+1}\right)^{1/2}\sin\left[\alpha\left(\frac{l}{n+1}+\frac{q_n}{2}\right)-\frac{\pi}{4}\right]\right|d\alpha + O(1),$$

или, в результате замены переменных $\alpha\to\alpha/(n+1)$,

$$A_n \sim \int_{(n+1)^{-1}}^{\infty}\frac{|\sin\alpha/(4(n+1))|}{\alpha^{3/2}}\left|\sum_{l=1}^{n}\varepsilon_l l^{1/2}\sin\left(l\alpha+\frac{\alpha}{4(n+1)}-\frac{\pi}{4}\right)\right|d\alpha =$$

$$= \int_{(n+1)^{-1}}^{2\pi} + \int_{2\pi}^{2\pi n} + \int_{2\pi n}^{\infty} := A_{n,1} + A_{n,2} + A_{n,3}.$$

Покажем, что $A_{n,3} = O(1)$. Разложим $\sin$ под знаком суммы и оценим $\sin\alpha/(4(n+1))$, $\cos\alpha/(4(n+1))$ единицей. Тогда

$$A_{n,3} \le \sum_{s=n}^{\infty}\int_{2s\pi}^{(2s+2)\pi}\alpha^{-3/2}\left\{\left|\sum_{l=1}^{n}\varepsilon_l l^{1/2}\sin\left(l\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\right|+\right.$$

$$\left.+\left|\sum_{l=1}^{n}\varepsilon_l l^{1/2}\cos\left(l\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\right|\right\}d\alpha.$$

После замены переменной и применения неравенства Коши – Буняковского и равенства Парсеваля получаем

$$A_{n,3} \le c\left(\sum_{s=n}^{\infty}s^{-3}\right)^{1/2}\left(\sum_{l=1}^{n}l\right)^{1/2} = O(1).$$

Для оценок $A_{n,1}$, $A_{n,2}$ заменим $\sin\alpha/(4(n+1))$ его аргументом, так как при $0\le x\le\pi/2$ $(2/\pi)x\le\sin x\le x$.

Для $A_{n,1}$ аналогично оценке I_n (см. замечание) получаем

$$A_{n,1} = O(\ln^{1/2} n),$$

$$A_{n,2} \sim (n+1)^{-1}\int_{2\pi}^{2\pi n}\alpha^{-1/2}\left|\sum_{l=1}^{n}\varepsilon_l l^{1/2}\sin\left[l\alpha+\frac{\alpha}{4(n+1)}-\frac{\pi}{4}\right]\right|d\alpha \sim$$

$$\sim (n+1)^{-1}\sum_{s=1}^{n-1}s^{-1/2}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{l=1}^{n}\varepsilon_l l^{1/2}\sin\left[l\alpha+\frac{s\pi}{2(n+1)}+\frac{\alpha}{4(n+1)}-\frac{\pi}{4}\right]\right|d\alpha =$$

$$= (n+1)^{-1} \sum_{s=1}^{n-1} s^{-1/2} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{l=1}^{n} \varepsilon_l l^{1/2} \sin\left(l\alpha + \frac{s\pi}{2(n+1)} - \frac{\pi}{4} \right) \right| d\alpha + O(1).$$

Заменим каждое ε_l l-й функцией Радемахера $r_l(t)$ и проинтегрируем $A_{n,2}$ по периоду $[0, 1]$. Аналогично получению оценки (5), замечая, что $|D_n'(2\alpha)| \leq \leq cn/|\sin\alpha|$, где D_n — ядро Дирихле порядка n, и учитывая (6), имеем

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \left| \sum_{l=1}^{n} r_l(t) l^{1/2} \sin\left(l\alpha + \frac{s\pi}{2(n+1)} - \frac{\pi}{4} \right) \right| d\alpha\, dt \sim$$

$$\sim \int_0^{2\pi} \left[\sum_{l=1}^{n} l \sin^2\left(l\alpha + \frac{s\pi}{2(n+1)} - \frac{\pi}{4} \right) \right]^{1/2} d\alpha \geq cn.$$

Тогда

$$\sup_{\varepsilon_l} A_{n,2} \geq c_1 \sum_{s=1}^{n-1} s^{-1/2} = c_2 n^{1/2},$$

следовательно,

$$\sup_{\varepsilon_l} A_n \geq \sup A_{n,2} - \sup(A_{n,1} + A_{n,3}) \geq c_3 n^{1/2}.$$

В заключение отметим, что в пространстве $L_\infty(T^2)$, $m > 2$, последовательность норм $\|\overline{S}_n\|$ заведомо не ограничена. Если построить, исходя из вида линеаризованного функционала $\overline{S}_n(f)$, функцию Λ_n (так же, как это сделано при доказательстве теоремы 1), то она будет иметь гладкость Lip $(1/2)$ равномерно по n, как и в двумерном случае. Необходимое условие ограниченности имеет вид $\lambda_n \in C^{[(m-1)/2]}(0, \infty)$ ([6], теорема 3).

1. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. – М.: Физматгиз, 1960. – 936 с.
2. *Белинский Э. С.* Поведение констант Лебега некоторых методов суммирования кратных рядов Фурье // Метрические вопросы теории функций и отображений. – Киев: Наук. думка, 1977. – С. 19–39.
3. *Бохнер С.* Лекции об интегралах Фурье. – М.: Физматгиз, 1962. – 360 с.
4. *Белинский Э. С.* Применение преобразования Фурье к суммируемости рядов // Сиб. мат. журн. – 1977. – **28**, № 3. – С. 497–511.
5. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. – М.: Наука, 1965. – Т. 1. – 651 с.
6. *Тригуб Р. М.* Абсолютная сходимость интегралов Фурье, суммируемость рядов Фурье и приближение полиномами функций на торе // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1980. – **44**, № 6. – С. 1378–1409.

Получено 10.04.95