УДК 519. 21

С. Я. Махно (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

ЗАКОН ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА ДЛЯ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ*

We prove the iterated logarithm law for solutions of stochastic differential equations with perturbed periodic coefficients.

Доведено закон повторного логарифму для розв'язків стохастичних рівнянь зі збуреними періодичними коефіцієнтами.

Исследованию закона повторного логарифма для последовательностей случайных величин посвящено много работ. Для случайных процессов в этом направлении известно немного: этому закону подчиняется многомерный винеровский процесс [1] и решения стохастических уравнений с коэффициентами, сходящимися к константам при $|x| \to +\infty$ с определенной скоростью [2]. В настоящей работе рассматриваются решения стохастических уравнений

$$\xi(t) = x + \int_0^t \sigma(\xi(s), \eta(s))\, dw(s), \tag{1}$$

и для них устанавливается закон повторного логарифма. В уравнении (1) коэффициент диффузии зависит от возмущающего процесса $\eta(t)$. Будем рассматривать два типа возмущающих процессов: решения стохастических уравнений диффузионного типа и скачкообразные марковские процессы с конечным числом состояний.

Обозначим через E_d d-мерное евклидово пространство, $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение его элементов, ∇ — символ градиента, A' — транспонированная к A матрица, $\mathrm{sp}\, A$ — след матрицы A. Класс периодических функций $f(x)$, имеющих период X по всем аргументам и l раз непрерывно дифференцируемых, обозначим через $\mathbb{P}_l(X)$. Среднее периодической функции $f(x)$ обозначим через $\langle f \rangle$. Рассматриваемые ниже случайные величины и процессы определены на полном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_t, P)$, $t \ge 0$. Для математического ожидания используем символ E.

В уравнении (1) $(w(t), \mathfrak{F}_t)$ — стандартный k-мерный винеровский процесс, $x \in E_n$. Возмущающий процесс $\eta(t)$ будет или решением стохастического уравнения

$$\eta(t) = y + \int_0^t b(\xi(s), \eta(s))\, ds + \int_0^t g(\xi(s), \eta(s))\, dw_1(s), \tag{2}$$

или скачкообразным марковским процессом с конечным множеством состояний $\{1, 2, \ldots, N\}$ и

$$P\{\eta(t+\Delta) = i / \xi(s), \eta(s), s \le t\} = q_{\eta(t)i}(\xi(t))\Delta + o(\Delta), \quad \Delta \downarrow 0; \tag{3}$$

здесь $q_{l\upsilon}(x) > 0$ для $l \ne \upsilon$, $\sum_{\upsilon=1}^{N} q_{l\upsilon}(x) = 0$ для всех $x \in E_n$, $l, \upsilon = \overline{1, N}$. В уравнении (2) $(w_1(t), \mathfrak{F}_t)$ — k_1-мерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от процесса $w(t)$, $y \in E_m$.

Положим $a(x, y) = \sigma(x, y)\sigma'(x, y)$, $G(x, y) = g(x, y)g'(x, y)$.

Введем следующие условия.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда фундаментальных исследований при Государственном комитете Украины по вопросам науки и технологий.

Условие I.

1) Функции $a_{ij}(x, y)$, $G_{pr}(x, y)$, $b_p(x, y) \in \mathbb{P}_2(X)$, $i, j = \overline{1, n}$, $p, r = \overline{1, m}$.

2) Матрицы $a(x, y)$, $G(x, y)$ равномерно положительно определены.

Условие II.

1) Для $l = \overline{1, N}$, $a_{ij}(\cdot, l)$, $G_{pr}(\cdot, l)$, $b_p(\cdot, l) \in \mathbb{P}_3(X)$, $i, j = \overline{1, n}$, $p, r = \overline{1, m}$.

2) Матрица $a(x, l)$ равномерно положительно определена.

3) Функции $q_{lv}(\cdot) \in \mathbb{P}_3(X)$, $l, v = \overline{1, N}$.

Определим операторы L, L^*, M, M^*:

$$Lf(x, y) = \frac{1}{2}(a(x, y)\nabla_x, \nabla_x)f(x, y) +$$

$$+ \frac{1}{2}(G(x, y)\nabla_y, \nabla_y)f(x, y) + (b(x, y), \nabla_y f(x, y)),$$

$$L^* f(x, y) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(a_{ij}(x, y)f(x, y)) +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{p,r=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial y_p \partial y_r}(G_{pr} f(x, y)) - \sum_{p=1}^{m} \frac{\partial}{\partial y_p}(b(x, y)f(x, y))$$

$$Mf(x, k) = \frac{1}{2}(a(x, k)\nabla_x, \nabla_x)f(x, k) + \sum_{l=1}^{N} q_{kl}(x)f(x, l),$$

$$M^* f(x, k) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(a_{ij}(x, k)f(x, k)) + \sum_{l=1}^{N} q_{lk}(x)f(x, l).$$

Лемма 1. 1) [3]. *Пусть выполнено условие* I. *Существует единственное решение* $p(x, y) \in \mathbb{P}_2(X)$ *такое, что* $L^* p = 0$, $\langle p \rangle = 1$. *Если* $f(x, y) \in \mathbb{P}_2(X)$ *и* $\langle fp \rangle = 0$, *то существует единственное решение* $u(x, y) \in \mathbb{P}_2(X)$ *уравнения*

$$L u = f, \ \langle u \rangle = 0. \tag{4}$$

2) [4]. *Пусть выполнено условие* II. *Существует единственное решение* $m(\cdot, l) \in \mathbb{P}_2(X)$, $l = \overline{1, N}$, *системы уравнений*

$$M^* m(x, l) = 0, \quad l = \overline{1, N},$$

$$\sum_{l=1}^{N} \langle m(x, l) \rangle = 1.$$

Если $f(\cdot, l) \in \mathbb{P}_2(X)$, $l = \overline{1, N}$, *и*

$$\sum_{l=1}^{N} \langle f(x, l)m(x, l) \rangle = 0,$$

то существует единственное решение $v(x, l) \in \mathbb{P}_2(X)$, $l = \overline{1, N}$, *системы уравнений*

$$\begin{gathered} Mv(x, l) = f(x, l), \quad l = \overline{1, N}, \\ \sum_{l=1}^{N} \langle v(x, l) \rangle = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Лемма 2. *Пусть* $(\mu([0, t] \times A), \mathfrak{F}_t)$ — *пуассоновская мартингальная мера с параметром* $t\Pi(A)$, *заданная на измеримом пространстве* $[0, \infty) \times \mathfrak{A}$ *и не* *зависящая от винеровского процесса* $(w(t), \mathfrak{F}_t)$. *Функции* $f(t, \omega)$ *и* $F(t, \theta, \omega)$ $\mathfrak{F}_t$*-измеримы и таковы, что*

$$|f(t, \omega)|^2 + \int |F(t, \theta, \omega)|^2 \Pi(d\theta) \le C = \text{const}.$$

Тогда

$$P\left\{ \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \left| \int_0^t (f(s, \omega), dw(s)) + \iint_0^t F(s, \theta, \omega)\, \mu(ds \times d\theta) \right| = 0 \right\} = 1.$$

Доказательство. Положим

$$\zeta_k = \sup_{t \ge 2^k} \frac{1}{t} \left| \int_0^t (f(s, \omega), dw(s)) + \iint_0^t F(s, \theta, \omega)\, \mu(ds \times d\theta) \right|.$$

Используя неравенство Дуба для мартингалов, имеем

$$P\{\zeta_k > \varepsilon\} \le$$

$$\le \sum_{m=k}^{\infty} P\left\{ \sup_{2^m \le t \le 2^{m+1}} \left| \int_0^t (f(s, \omega), dw(s)) + \iint_0^t F(s, \theta, \omega)\, \mu(ds \times d\theta) \right| > \varepsilon 2^m \right\} \le$$

$$\le \sum_{m=k}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon^2 2^{2m}} E \int_0^{2^{m+1}} \left(|f(s, \omega)|^2 + \int |F(s, \theta, \omega)|^2\, \Pi(d\theta) \right) ds \le$$

$$\le \frac{2C}{\varepsilon^2} \sum_{m=k}^{\infty} 2^{-m} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Поскольку ζ_k с вероятностью 1 не возрастают,

$$P\left\{ \lim_{k\to\infty} \zeta_k = 0 \right\} = 1.$$

Лемма доказана.

При изучении процессов $\xi(t), \eta(t)$, определенных в (1), (3), будем использовать метод из [5]. Пусть $(\Theta, \mathfrak{A})$ — некоторое измеримое пространство с σ-конечной мерой $\Pi(d\theta)$ и $\nu(d\theta \times dt)$ — пуассоновская мера, заданная на $\Theta \times [0, \infty)$ с параметром $\Pi(d\theta)dt$. Можно построить измеримую функцию $\delta(x, y, \theta)$, $x \in E_n$, $y \in E_m$, $\theta \in \Theta$, такую, что

$$\Pi(\theta : \delta(x, y, \theta) \in A) = \sum_{j \in A \setminus \{y\}} q_{yj}(x).$$

Тогда процесс $\eta(t)$ из (3) может быть представлен как решение стохастического уравнения

$$\eta(t) = \eta(0) + \iint_0^t \delta(\xi(s), \eta(s), \theta) \nu(d\theta \times ds).$$

Лемма 3. *Пусть процессы* $\xi(t), \eta(t)$ *определяются из* (1), (3); *функции* $\varphi(x, k)$, $x \in E_n$, $k = \overline{1, N}$, *дважды непрерывно дифференцируемы по* x. *Тогда для* $t \ge 0$

$$\varphi(\xi(t), \eta(t)) = \varphi(\xi(0), \eta(0)) + \int_0^t M\varphi(\xi(s), \eta(s))\, d(s) +$$

$$+ \int_0^t (\nabla_x \varphi(\xi(s), \eta(s)), \sigma(\xi(s), \eta(s))\, dw(s)) +$$

$$+ \iint_0^t [\varphi(\xi(s), \eta(s) + \delta(\xi(s), \eta(s), \theta)) - \varphi(\xi(s), \eta(s))]\, \tilde{\nu}(d\theta \times ds), \qquad (6)$$

где $\tilde{\nu}(d\theta \times ds) = \nu(d\theta \times ds) - \Pi(d\theta)ds.$

Доказательство. Пусть $0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_\kappa < t$ — все моменты скачков процесса $\eta(s)$ на интервале $[0, t]$. Применяя формулу Ито к процессу $\xi(s)$ и функции $\varphi(x, k)$ на интервалах $[0, \tau_1], (\tau_1, \tau_2], \ldots, (\tau_\kappa, t]$, получаем

$$\varphi(\xi(\tau_1), k) = \varphi(x, k) + \frac{1}{2}\int_0^{\tau_1} (a(\xi(s), \eta(s))\nabla_x, \nabla_x)\varphi(\xi(s), k)\, ds +$$

$$+ \int_0^{\tau_1} (\nabla_x \varphi(\xi(s), k), \sigma(\xi(s), \eta(s))\, dw(s)); \qquad (7)$$

$$\varphi(\xi(\tau_{r+1}), k) = \varphi(\xi(\tau_r), k) + \frac{1}{2}\int_{\tau_r}^{\tau_{r+1}} (a(\xi(s), \eta(s))\nabla_x, \nabla_x)\varphi(\xi(s), k)\, ds +$$

$$+ \int_{\tau_r}^{\tau_{r+1}} (\nabla_x \varphi(\xi(s), k), \sigma(\xi(s), \eta(s))\, dw(s)), \quad r = \overline{1, \kappa - 1}, \qquad (8)$$

$$\varphi(\xi(t), k) = \varphi(\xi(\tau_\kappa), k) + \frac{1}{2}\int_{\tau_\kappa}^{t} (a(\xi(s), \eta(s))\nabla_x, \nabla_x)\varphi(\xi(s), k)\, ds +$$

$$+ \int_{\tau_\kappa}^{t} (\nabla_x \varphi(\xi(s), k), \sigma(\xi(s), \eta(s))\, dw(s)). \qquad (9)$$

Положим $k = \eta(0)$ в равенстве (7), $k = \eta(\tau_r)$ в равенстве (8), $k = \eta(\tau_\kappa)$ в равенстве (9) и сложим их (найдем сумму по r от 1 до $\overline{\kappa - 1}$). Имеем

$$\varphi(\xi(t), \eta(t)) = \varphi(\xi(0), \eta(0)) + \frac{1}{2}\int_0^t (a(\xi(s), \eta(s))\nabla_x, \nabla_x)\varphi(\xi(s), \eta(s))\, ds +$$

$$+ \int_0^t (\nabla_x \varphi(\xi(s), \eta(s)), \sigma(\xi(s), \eta(s))\, dw(s)) +$$

$$+ \sum_{r=1}^{\kappa} [\varphi(\xi(\tau_r), \eta(\tau_r)) - \varphi(\xi(\tau_r), \eta(\tau_r -))]. \qquad (10)$$

Заметим, что

$$\sum_{r=1}^{\kappa} [\varphi(\xi(\tau_r), \eta(\tau_r) - \varphi(\xi(\tau_r), \eta(\tau_r -))] =$$

$$= \iint_0^t [\varphi(\xi(s), \eta(s) + \delta(\xi(s), \eta(s), \theta)) - \varphi(\xi(s), \eta(s))]\, \nu(d\theta \times ds),$$

$$\int_\Theta [\varphi(x, y + \delta(x, y, \theta)) - \varphi(x, y)]\, \Pi(d\theta) = \sum_{k=1}^{N} \varphi(x, k) q_{yk}(x).$$

Отсюда с учетом (10) получаем (6). Лемма доказана.

Лемма 4. 1) *Пусть* $\xi(t), \eta(t)$ *определяются из* (1), (2), *выполнено условие* I *и* $h(x, y) \in \mathbb{P}_2(X)$. *Тогда*

$$P\left\{\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t h(\xi(s), \eta(s))\, ds = \langle hp\rangle\right\} = 1.$$

2) *Пусть* $\xi(t), \eta(t)$ *определяются из* (1), (3), *выполнено условие* II *и* $H(\cdot, k) \in \mathbb{P}_2(X)$, $k = \overline{1, N}$. *Тогда*

$$P\left\{\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t H(\xi(s), \eta(s))\, ds = \sum_{k=1}^{N} \big\langle H(x, k) m(x, k)\big\rangle\right\} = 1.$$

Доказательство. Докажем 1). Обозначим через $z(x, y)$ решение уравнения (4) с функцией $f(x, y) = \langle hp\rangle - h(x, y)$. Применяя к функции $z(x, y)$ и уравнениям (1), (2) формулу Ито, получаем

$$\int_0^t h(\xi(s), \eta(s))\, ds = \langle hp\rangle t + z(x, y) - z(\xi(t), \eta(t)) +$$

$$+ \int_0^t (\nabla_x h(\xi(s), \eta(s)), \sigma(\xi(s), \eta(s))\, dw(s)) +$$

$$+ \int_0^t (\nabla_y h(\xi(s), \eta(s)), g(\xi(s), \eta(s))\, dw_1(s)).$$

Отсюда и из леммы 2 следует утверждение 1). Аналогично доказывается и утверждение 2).

Пусть $r(x, k)$, $k = \overline{1, N}$, — решение (5) с функцией

$$f(x, k) = \sum_{l=1}^{N} \big\langle H(x, l) m(x, l)\big\rangle - H(x, k).$$

Применяя к функциям $r(x, k)$ формулу (6), получаем

$$\int_0^t H(\xi(s), \eta(s))\, ds = t\sum_{l=1}^{N} \big\langle H(x, l) m(x, l)\big\rangle + r(x, y) - r(\xi(t), \eta(t)) +$$

$$+ \int_0^t (\nabla_x r(\xi(s), \eta(s)), \sigma(\xi(s), \eta(s))\, dw) +$$

$$+ \iint_0^t [r(\xi(s), \eta(s) + \delta(\xi(s), \eta(s), \theta)) - r(\xi(s), \eta(s))]\, d\nu.$$

Отсюда и из леммы (2) следует утверждение 2). Лемма доказана.

Положим

$$\alpha_{ij} = \langle a_{ij} p\rangle, \quad \beta_{ij} = \sum_{k=1}^{N} \big\langle a_{ij}(x, k) m(x, k)\big\rangle, \quad i, j = \overline{1, n},$$

α, β — матрицы с элементами α_{ij}, β_{ij} соответственно.

Теорема 1. *Пусть* $\xi(t), \eta(t)$ *определяются из* (1), (2) *и выполнено условие* I. *Справедливы следующие утверждения:*

1. $$P\left\{\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\xi_i(t)}{\sqrt{2\alpha_{ii} t \ln\ln t}} = 1\right\} = 1, \quad i = \overline{1, n};$$

2. $$P\left\{\underline{\lim}_{t\to\infty} \frac{\xi_i(t)}{\sqrt{2\alpha_{ii} t \ln\ln t}} = -1\right\} = 1, \quad i = \overline{1, n};$$

3. $$P\left\{\overline{\lim}_{t\to\infty} \frac{|\xi_i(t)|}{\sqrt{2\,\mathrm{Sp}\,\alpha\, t \ln\ln t}} = 1\right\} = 1.$$

Доказательство. Обозначим

$$\lambda_i(t) = \int_0^t \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}(\xi(s), \eta(s))\, dw_j(s),$$

$$\tau_i(t) = \int_0^t a_{ii}(\xi(s), \eta(s))\, ds.$$

С учетом принятых предположений $\tau_i(t) \uparrow \infty$ при $t \to \infty$ с вероятностью 1. Согласно теореме 1.3.4 из [6] процесс $\lambda_i(\tau^{(i)}(t)) = \tilde{w}_i(t)$ при каждом i является винеровским. Здесь $\tau^{(i)}(t)$ — обратная к $\tau_i(t)$ функция. Следовательно, $\lambda_i(t) = \tilde{w}_i(\tau_i(t))$.

В силу утверждения 1) леммы 4 с вероятностью 1

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\tau_i(t) \ln\ln \tau_i(t)}{t \ln\ln t} = \alpha_{ii}. \tag{11}$$

Из равенства

$$\frac{\lambda_i(t)}{\sqrt{2\alpha_{ii} t \ln\ln t}} = \frac{\tilde{w}_i(\tau_i(t))}{\sqrt{2\tau_i(t) \ln\ln \tau_i(t)}} \sqrt{\frac{\tau_i(t) \ln\ln \tau_i(t)}{\alpha_{ii} t \ln\ln t}},$$

закона повторного логарифма для винеровского процесса [1] и (11) следуют утверждения 1 и 2. Утверждение 3 — это следствие первых двух. Теорема доказана.

Аналогично, используя утверждение 2) леммы 4, доказывается следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $\xi(t), \eta(t)$ *определяются из* (1), (3) *и выполнено условие* II. *Справедливы следующие утверждения:*

1. $$P\left\{\overline{\lim}_{t\to\infty} \frac{\xi_i(t)}{\sqrt{2\beta_{ii} t \ln\ln t}} = 1\right\} = 1, \quad i = \overline{1, n};$$

2. $$P\left\{\underline{\lim}_{t\to\infty} \frac{\xi_i(t)}{\sqrt{2\beta_{ii} t \ln\ln t}} = -1\right\} = 1, \quad i = \overline{1, n};$$

3. $$P\left\{\overline{\lim}_{t\to\infty} \frac{|\xi(t)|}{\sqrt{2\,\mathrm{Sp}\,\beta\, t \ln\ln t}} = 1\right\} = 1.$$

1. *Скороход А. В.* Случайные процессы с независимыми приращениями. – М: Наука, 1964. – 280 с.
2. *Fridman A.* Limit behavior of solutions of stochastic differential equations // Trans Amer. Math. Soc. – 1972. – **170**, № 8. – P. 359–384.
3. *Bensoussan A., Lions J. L., Papanicolaou G.* Asymptotic analysis for periodic structures. – Amsterdam: North-Holland Publ., 1978. – 700 p.
4. *Bensoussan A.* Homogenization of nonlinear elliptic systems with zero order ferm coupling // Ric. Mat. – 1987 (suppl). – P. 203–232.
5. *Скороход А. В.* Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1987. – 328 с.
6. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов: В 3-х т. – М.: Наука, 1975. – Т. 3. – 496 с.

Получено 10.04.95