УДК 517. 43

М. Н. Феллер (УкрНИИМОД, Киев)

ОБ ОДНОМ НЕЛИНЕЙНОМ УРАВНЕНИИ, НЕ РАЗРЕШЕННОМ ОТНОСИТЕЛЬНО ЛАПЛАСИАНА ЛЕВИ

We give a method for solving the nonlinear equations $f(U(x), \Delta_L U(x)) = F(x)$ (Δ_L is an infinite-dimensional Laplacian, $\Delta_L F(x) = \gamma$, $\gamma \neq 0$) which is not solved with respect to the infinite-dimensional Laplacian, and a method for solving the Dirichlet problem for such an equation.

Наводиться спосіб розв'язку нелінійного рівняння $f(U(x), \Delta_L U(x)) = F(x)$ (Δ_L— нескінченномірний лапласіан, $\Delta_L F(x) = \gamma$, $\gamma \neq 0$), яке не розв'язне відносно нескінченномірного лапласіана та розв'язку задачі Діріхле для такого рівняння.

Леви [1] показал, что общее решение нелинейного уравнения, разрешенного относительно лапласиана Леви и не содержащего независимую переменную $\Delta_L U(x) = f(U(x))$, где $U(x)$ — функци на гильбертовом пространстве, $f(\xi)$ — заданная функция одной переменной, определяется формулой

$$\varphi(U(x)) - \frac{\|x\|^2}{2} = \Psi(x), \quad \varphi(\xi) = \int \frac{d\xi}{f(\xi)},$$

$\Psi(x)$ — произвольная гармоническая функция, а решение задачи Дирихле для этого уравнения сводится к задаче Дирихле для уравнения $\Delta_L \Psi(x) = 0$. В последующем нелинейные уравнения, разрешенные относительно лапласиана Леви, изучали Г. Е. Шилов [2], В. Я. Сикирявый [3], В. Б. Соколовский [4].

Настоящая статья посвящена решению нелинейного уравнения, не разрешенного относительно лапласиана Леви $f(U(x), \Delta_L U(x)) = F(x)$, где $U(x)$ — искомая, а $F(x)$ — заданная функции на гильбертовом пространстве. $\Delta_L F(x)$ — постоянное не равное нулю число, $f(\xi, \zeta)$ — заданная функция двух переменных, и решению задачи Дирихле для такого уравнения.

1. Пусть H — счетномерное вещественное гильбертово пространство. Рассмотрим скалярные функции $F(x)$ на H, $x \in H$.

Бесконечномерный лапласиан Леви ввел формулой

$$\Delta_L F(x_0) = 2 \lim_{\rho \to 0} \frac{\mathfrak{M}_{(x_0, \rho)} F(x) - F(x_0)}{\rho^2},$$

где $\mathfrak{M}_{(x_0, \rho)} F(x)$ — среднее значение функции $F(x)$ по гильбертовой сфере $\|x - x_0\|_H^2 = \rho^2$. Это определение требует, чтобы функция $F(x)$ имела среднее $\mathfrak{M}_{(x_0, \rho)} F(x)$ $(\rho < \rho_0)$ и предел существовал.

При этом для дважды дифференцируемых функций на l_2

$$\Delta_L U(x_1, \ldots, x_n, \ldots) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 U}{\partial x_k^2},$$

а для функций на $L_2(a, b)$,

$$\Delta_L U(x(t)) = \frac{1}{b-a} \int_b^a \frac{\delta^2 U(x)}{\delta x(s)^2} ds,$$

где $\delta^2 U(x) / \delta x(s)^2$ — вторая вариационная производная функции $U(x(t))$.

Лапласиан Леви имеет ряд свойств, не имеющих аналогов среди классических свойств конечномерного лапласиана. Так, пусть функция $F(x)= =f(U_1(x),\ldots,U_m(x))$, где $f(u_1,\ldots,u_m)$ — дважды дифференцируемая функция m переменных в области значений $(U_1(x),\ldots,U_m(x))\in \in R_m$, имеющая ограниченные частные производные, $U_k(x)$ — дважды сильно дифференцируемые функции, равномерно непрерывные в ограниченной области пространства H, и $\Delta_L U_k(x)$ существуют $(k=1,\ldots,m)$. Тогда $\Delta_L F(x)$ существует и имеет вид [1]

$$\Delta_L F(x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial u_k}\bigg|_{u_k=U_k(x)} \Delta_L U_k(x). \tag{1}$$

2. Рассмотрим нелинейное уравнение, не разрешенное относительно лапласиана Леви

$$f(U(x),\ \Delta_L U(x)) = F(x), \tag{2}$$

где $f(\xi,\zeta)$ — заданная функция на R_2, $F(x)$ — заданная функция на H.

Теорема. *Пусть $f(\xi,\zeta)$ — дважды дифференцируемая функция двух переменных в области значений $U(x)$, $\Delta_L U(x)$ в R_2, имеющая ограниченные частные производные, а функция $F(x)$ такая, что $\Delta_L F(x)=\gamma\neq 0$, γ — постоянная. Тогда решение уравнения* (2) *находится (в неявной форме) по формуле*

$$f(U(x),\ \omega(U(x),\Psi(x)) - F(x) = 0, \tag{3}$$

где $\zeta=\omega(\xi,c)$ — решение обыкновенного дифференциального (нелинейного) уравнения

$$f'_\zeta(\xi,\zeta)\frac{\partial\zeta}{\partial\xi} + f'_\xi(\xi,\zeta) = \frac{\gamma}{\zeta}, \tag{4}$$

$\Psi(x)$ — произвольная гармоническая функция на H.

Если к тому же формула (3) *разрешима относительно $\Psi(x)$, $\Psi(x)= =\varphi(U(x),\ F(x))$, $\varphi(\xi,\eta)$ — функция, заданная на R_2, то решение задачи Дирихле для уравнения* (2)

$$f(U(x),\ \Delta_L U(x)) = F(x) \text{ в } \Omega,\quad U(x) = G(x) \text{ на } \Gamma,$$

*где $\overline{\Omega}=\Omega\cup\Gamma$, Ω — ограниченная область пространства H с границей Γ, сводится к решению задачи Дирихле для уравнения Лапласа–Леви**

$$\Delta_L\Psi(x) = 0 \text{ в } \Omega,\quad \Psi(x) = \varphi(G(x),\ F(x)) \text{ на } \Gamma.$$

Доказательство. Из (3), используя формулу (1), имеем

$$\Delta_L f(U,\ \omega(U,\Psi)) =$$

$$= f'_\xi(U,\omega(U,\Psi))\Delta_L U + f'_\zeta(U,\omega(U,\Psi))\left[\frac{\partial\omega}{\partial\xi}\Delta_L U + \frac{\partial\omega}{\partial c}\Delta_L\Psi\right] = \Delta_L F(x).$$

Поскольку $\Delta_L\Psi(x)=0$, $\Delta_L F(x)=\gamma$, то

$$\left[f'_\xi(U,\omega(U,\Psi)) + f'_\zeta(U,\omega(U,\Psi))\frac{\partial\omega}{\partial\xi}\right]\Delta_L U = \gamma.$$

Но по условию теоремы $\omega(\xi,c)$ удовлетворяет уравнению (4), т. е.

$$f'_\xi(U,\omega) + f'_\zeta(U,\omega)\frac{\partial\omega}{\partial\xi} = \frac{\gamma}{\omega},$$

* Задача Дирихле для уравнения Лапласа–Леви в разных функциональных классах изучалась во многих работах (см. библиографию к [5]).

поэтому $\gamma\Delta_L U/\omega=\gamma$. Отсюда $\Delta_L U=\omega(U,\Psi)$. Подставляя это значение в (2), получаем (с учетом (3)) тождество.

Заключительное утверждение теоремы очевидно.

Пример. Решим задачу Дирихле в единичном шаре l_2 для уравнения

$$\frac{4U(x)\Delta_L U(x)}{[\Delta_L U(x)]^2+1} = \|x\|_{l_2}^2, \tag{5}$$

$$U\Big|_{\|x\|_{l_2}^2=1} = \frac{1}{2}\operatorname{ch}\sum_{k=1}^{\infty} x_k^m \quad (m\geq 3). \tag{6}$$

Для уравнения (5) имеем $f(\xi,\zeta)=4\xi\zeta/(\zeta^2+1)$, $\gamma=2$, а уравнение (4) принимает вид

$$\frac{2\xi\zeta}{(\zeta^2+1)}\frac{\partial\zeta}{\partial\xi} = 1$$

и его решение $\zeta=\pm\sqrt{2\xi/c-1}$.

Подставляя в (5) выражение $\omega(U,\Psi)=\pm\sqrt{2U(x)/\Psi(x)-1}$, получаем решение уравнения (5)

$$U(x) = \frac{(1/4)\|x\|_{l_2}^4+\Psi^2(x)}{2\Psi(x)}, \tag{7}$$

где $\Psi(x)$ — произвольная гармоническая функция. Заметим, что $U(x)=\pm(1/2)\|x\|_{l_2}^2$ — так же решения уравнения (5).

Из (7) имеем

$$\Psi(x) = U(x)\pm\sqrt{U(x)^2-\frac{1}{4}\|x\|_{l_2}^4},$$

а из (6) —

$$\Psi\Big|_{\|x\|_{l_2}^2=1} = \frac{1}{2}\exp\left\{\pm\sum_{k=1}^{\infty}x_k^m\right\}.$$

Решение задачи Дирихле в единичном шаре для уравнения Лапласа–Леви

$$\Delta_L\Psi(x) = 0, \quad \Psi\Big|_{\|x\|_{l_2}^2=1} = \frac{1}{2}\exp\left\{\pm\sum_{k=1}^{\infty}x_k^m\right\}$$

имеет вид

$$\Psi(x) = \frac{1}{2}\exp\left\{\pm\sum_{k=1}^{\infty}x_k^m\right\}. \tag{8}$$

Подставляя (8) в (7), получаем решение задачи (5), (6)

$$U(x) = \frac{1}{4}\left(\|x\|_{l_2}^4\,\frac{1}{2}\exp\left\{\mp\sum_{k=1}^{\infty}x_k^m\right\} + \exp\left\{\pm\sum_{k=1}^{\infty}x_k^m\right\}\right).$$

1. *Леви П.* Конкретные проблемы функционального анализа. – М.: Наука, 1967. – 512 с.
2. *Шилов Г. Е.* О некоторых вопросах анализа в гильбертовом пространстве. III // Мат. сб. – 1967. – **74** (116), № 1. – С. 161–168.
3. *Сикирявый В. Я.* Оператор квазидифференцирования и связанные с ним краевые задачи // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1972. – **27**. – С. 195–246.
4. *Соколовский В. Б.* Вторая и третья краевые задачи в гильбертовом шаре для уравнений эллиптического типа, разрешенных относительно функционального лапласиана // Изв. вузов. Математика. – 1975. – № 3. – С. 11–114.
5. *Феллер М. Н.* Бесконечномерные эллиптические уравнения и операторы типа П. Леви // Успехи мат. наук. – 1966. – **41**, № 4. – С. 97–140.

Получено 28.06.94