УДК 517.9

О. В. Захливная (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ВВЕДЕНИЕ ЛОКАЛЬНЫХ КООРДИНАТ ДЛЯ СЧЕТНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ ИНВАРИАНТНОГО МНОГООБРАЗИЯ

Conditions for existence of local coordinates are obtained for a countable system of differential equations in a neighborhood of an invariant manifold. The form of the countable system is given in local coordinates.

Наведено умови існування локальних координат для зліченної системи диференціальних рівнянь в околі інваріантного многовиду та вигляд, якого набуває ця система.

Качественная теория счетных систем берет свое начало в работах А. Н. Тихонова и К. П. Персидского [1]. Обширные последующие исследования этих систем проведены в работах О. А. Жаутыкова и К. Г. Валеева [2]. В последние годы важные результаты получены А. М. Самойленко и Ю. В. Теплинским [3].

В настоящей работе рассматривается задача о введении локальных координат в окрестности инвариантного многообразия для бесконечной системы, аналог которой для конечного случая приведен в работе А. М. Самойленко [4].

В пространстве $\mathfrak{M}$ ограниченных числовых последовательностей $x=(x_1, x_2, \ldots)$ с нормой $\|x\| = \sup_i \{|x_i|, i=1,2,\ldots\}$ будем рассматривать систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = X(x), \tag{1}$$

где $x=(x_1, x_2, \ldots) \in \mathfrak{M}$, $X = \operatorname{colon}(X_1, X_2, \ldots)$, для которой выполняются следующие условия:

1) $X(x)$ удовлетворяет усиленному условию Коши – Липшица с коэффициентом $\varepsilon(n)$, т. е. для любых векторов $x' = (x_1, \ldots, x_n, x'_{n+1}, \ldots)$ и $x'' = (x_1, \ldots$ $\ldots, x_n, x''_{n+1}, \ldots)$ из пространства $\mathfrak{M}$ выполняется неравенство

$$\|X(x') - X(x'')\| \leq \varepsilon(n)\Delta x,$$

где $\Delta x = \sup_i \{|x'_i - x''_i|\}$, $\varepsilon(n) \to 0$, $n \to \infty$;

2) $|X_s(0)| \leq \alpha = \mathrm{const} < \infty$ для каждого $s = 1, 2, \ldots$.

В этом случае система (1) определяет в пространстве $\mathfrak{M}$ динамическую систему [3].

Пусть

$$\frac{d\overset{(n)}{x}}{dt} = \overset{(n)}{X}\left(\overset{(n)}{x}\right), \tag{2}$$

где $\overset{(n)}{x} = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots)$, $\overset{(n)}{X} = (X_1, \ldots, X_n, 0, \ldots)$ является n-укороченной системой дифференциальных уравнений, которая соответствует системе (1).

Предположим, что

$$x_s = x_s(t, x_1^0, x_2^0, \ldots), \quad s = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

— решение системы уравнений (1) с начальными значениями $x_s^0 = x_s(0, x_1^0, \ldots)$, $s = 1, 2, \ldots$, а $\overset{(n)}{x}_s = \overset{(n)}{x}_s(t)$, $s = 1, 2, \ldots$, является решением системы (2), где

$$\overset{(n)}{x}_s(0) = \begin{cases} x_s^0, & s = 1, \ldots, n; \\ 0, & s = n+1, n+2, \ldots . \end{cases}$$

Тогда это решение укороченной системы (2) слабо сходится к решению (3) системы уравнений (1)

$$\lim_{n\to\infty} \overset{(n)}{x}_s(t) = x_s(t), \quad s = 1, 2, \ldots .$$

Будем полагать, что существует такая бесконечная последовательность натуральных чисел $n(1) < n(2) < \ldots < n(l) < \ldots$, что $n(l)$-укороченная система имеет квазипериодическое решение $\overset{(n(l))}{x} = \overset{(n(l))}{x}\left(t, \overset{(n(l))}{x}_0\right)$, т. е. $\overset{(n(l))}{x}_s\left(t, \overset{(n(l))}{x}_0\right) = \overset{(n(l))}{f}_s(\lambda t + \psi_0)$, где $\overset{(n(l))}{f}_s(\varphi)$ — непрерывная, 2π-периодическая функция на m-мерном торе T_m, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ — вектор частот, $\psi_0 \in T_m$, $t \in \mathbb{R}$, $s = 1, \ldots, n(l)$.

Рассмотрим последовательность

$$\left\{ \overset{(n(l))}{x} = \overset{(n(l))}{x}\left(t, \overset{(n(l))}{x}_0\right), \; n(l) \in \mathbb{N}, \; l = 1, 2, \ldots \right\}, \tag{4}$$

составленную из квазипериодических решений $n(l)$-укороченных систем. Для элементов $\overset{(n(l))}{x}\left(t, \overset{(n(l))}{x}_0\right) = \left(\overset{(n(l))}{x}_1(t), \ldots, \overset{(n(l))}{x}_{n(l)}(t), 0, \ldots\right)$ этой последовательности на основании условия 1 выполняется следующее неравенство:

$$\sup_s \left| \overset{(n(l))}{x}_s(t) \right| \le \sup_s \left| x_s^0 \right| + \int_0^t \left(\alpha + \varepsilon(0) \sup_s \left| \overset{(n(l))}{x}_s(\tau) \right| \right) d\tau$$

(дле определенности полагаем $t > 0$). Отсюда следует

$$\sup_s \left| \overset{(n(l))}{x}_s(t) \right| \le u(t),$$

где $u(t)$ является решением уравнения

$$u(t) = x^0 + \int_0^t (\alpha + \varepsilon(0) u(\tau))\, d\tau$$

(здесь обозначено $x^0 = \sup_s \left| x_s^0 \right|$) и имеет следующий вид:

$$u(t) = x^0 \exp(\varepsilon(0)t) + \frac{\alpha}{\varepsilon(0)}(\exp(\varepsilon(0)t) - 1).$$

Значит, на любом интервале конечной длины функция $\overset{(n(l))}{x}_s(t)$, $s = 1, 2, \ldots$, ограничена. Если учесть, что $\overset{(n(l))}{x}_s(t) = \overset{(n(l))}{f}_s(\lambda t + \psi_0)$, где $\overset{(n(l))}{f}_s(\varphi)$ — 2π-периодическая функция на T_m, то функция $\overset{(n(l))}{x}_s(t)$ будет ограничена на всей оси:

$$\left| \overset{(n(l))}{x}_s(t) \right| \le \gamma, \quad t \in \mathbb{R}, \quad s = 1, 2, \ldots , \tag{5}$$

а также выполняется неравенство

$$\left| \overset{(n(l))}{x}_s(t + \Delta t) - \overset{(n(l))}{x}_s(t) \right| \le \int_t^{t+\Delta t} \left| x_s\left(\overset{(n(l))}{x}(\tau) \right) \right| d\tau \le (\alpha + \varepsilon(0)\gamma)\Delta t,$$

$$t \in \mathbb{R}, \quad s = 1, 2, \ldots . \tag{6}$$

Используя теорему Арцела и прием диагонализации, описанный при доказательстве теоремы 1.1 [3, с. 9], из последовательности (4) можем выделить подпоследовательность

$$\overset{(k(1))}{x}\left(t, \overset{(k(1))}{x_0}\right), \ldots, \overset{(k(p))}{x}\left(t, \overset{(k(p))}{x_0}\right), \ldots, \quad k(p) \to 0, \quad p \to \infty,$$

для которой равномерно на всей оси и при каждом натуральном s

$$\lim_{p \to \infty} \overset{(k(p))}{x_s}\left(t, \overset{(k(p))}{x_0}\right) = x_s(t, x_0).$$

При этом $x(t, x_0) = f(\lambda t + \psi_0)$ является квазипериодическим решением системы (1).

Замыкание траектории $x(t, x_0)$ состоит из точек $M \subset \mathfrak{M}$, определяемых уравнением

$$x = f(\varphi), \quad \varphi \in T_m.$$

Как замыкание траектории динамической системы множество M является инвариантным.

В тождестве

$$f(\lambda t + \psi_0) = f(\psi_0) + \int_0^t X(f(\lambda t + \psi_0))\, d\tau,$$

полагая t равным $t + t_n$ и используя $\lim_{n \to \infty} f(\lambda t_n + \psi_0) = \psi \bmod 2\pi$, где ψ — произвольная точка T_m, получаем

$$f(\lambda t + \lambda t_n + \psi_0) = f(\lambda t_n + \psi_0) + \int_{t_n}^{t_n + t} X(f(\lambda \tau + \lambda t_n + \psi_0))\, d\tau.$$

Отсюда следует

$$f(\lambda t + \psi) = f(\psi) + \lim_{n \to \infty} \int_{t_n}^{t_n + t} X(f(\lambda \tau + \lambda t_n + \psi_0))\, d\tau =$$

$$= f(\psi) + \int_0^t X(f(\lambda t + \psi))\, d\tau$$

для всех $t \in \mathbb{R}$. Это означает, что

$$x(t, f(\psi)) = f(\lambda t + \psi) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \forall\, \varphi \in T_m.$$

Следовательно, множество M заполнено квазипериодическими траекториями.

Исследуем поведение решений системы (1), начинающихся в малой окрестности многообразия M.

Обозначим $k = k(p)$. Для k-укороченных систем известно [4], что при условии существования матрицы

$$\left[\frac{\partial \overset{(k)}{f}(\varphi)}{\partial \varphi}, \overset{(k)}{B}(\varphi)\right]^{-1},$$

где $\overset{(k)}{B}(\varphi)$ — непрерывная, 2π-периодическая матрица на T_m, можно вместо координат $\overset{(k)}{x} = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots)$ в окрестности многообразия $\overset{(k)}{M}$, определенного уравнением $\overset{(k)}{x} = \overset{(k)}{f}(\varphi)$, $\varphi \in T_m$, ввести локальные координаты $\left(\varphi, \overset{(k)}{h}\right)$, где $\varphi \in T_m$, $\overset{(k)}{h} = (h_1, \ldots, h_{k-m}, 0, \ldots)$ по формуле

$$\overset{(k)}{x} = \overset{(k)}{f}(\varphi) + \overset{(k)}{B}(\varphi)\overset{(k)}{h}.$$

При этом малая окрестность $\overset{(k)}{M}$ отобразится в малую окрестность $\left\|\overset{(k)}{h}\right\| \le \delta$, $\varphi \in T_m$ множества $\overset{(k)}{h} = 0$, $\varphi \in T_m$, а система (2) примет вид

$$\frac{d\varphi}{dt} = \lambda + \overset{(k)}{A}\left(\varphi, \overset{(k)}{h}\right)\overset{(k)}{h},$$
$$\frac{d\overset{(k)}{h}}{dt} = \overset{(k)}{P}\left(\varphi, \overset{(k)}{h}\right)\overset{(k)}{h}, \tag{7}$$

где $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \in T_m$, $\overset{(k)}{h} = (h_1, \ldots, h_k, 0, \ldots) \in \mathfrak{M}$, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ — вектор частот,

$$\overset{(k)}{A}\left(\varphi, \overset{(k)}{h}\right) = \left[\overset{(k)}{A_1}\left(\varphi, \overset{(k)}{h}\right), 0\right], \quad \overset{(k)}{A_1}\left(\varphi, \overset{(k)}{h}\right) = \left[\overset{(k)}{a_{sj}}\left(\varphi, \overset{(k)}{h}\right)\right]_{s=1,\, j=1}^{m \quad k},$$

$$\overset{(k)}{P}\left(\varphi, \overset{(k)}{h}\right) = \begin{bmatrix} \overset{(k)}{P_1}\left(\varphi, \overset{(k)}{h}\right) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \overset{(k)}{P_1}\left(\varphi, \overset{(k)}{h}\right) = \left[\overset{(k)}{p_{sj}}\left(\varphi, \overset{(k)}{h}\right)\right]_{s,\, j=1}^{k}.$$

Рассмотрим вопрос о введении локальных координат (φ, h) в окрестности многообразия M.

Обозначим через $\begin{bmatrix} \overset{(k)}{L_1}(\varphi) \\ \overset{(k)}{L_2}(\varphi) \end{bmatrix}$ матрицу такую, что выполняются следующие равенства:

$$\overset{(k)}{L_1}(\varphi)\frac{\partial \overset{(k)}{f}(\varphi)}{\partial\varphi} = E, \quad \overset{(k)}{L_1}(\varphi)\overset{(k)}{B}(\varphi) = 0,$$

$$\overset{(k)}{L_2}(\varphi)\frac{\partial \overset{(k)}{f}(\varphi)}{\partial\varphi} = 0, \quad \overset{(k)}{L_2}(\varphi)\overset{(k)}{B}(\varphi) = E,$$

где E и 0 — единичная и нулевая матрицы соответствующих размеров.

Предположим, что

$$\left\{\left[\frac{\partial \overset{(k)}{f}(\varphi)}{\partial\varphi}, \overset{(k)}{B}(\varphi)\right], \ k = k(p) \in \mathbb{N}\right\}, \quad \left\{\begin{bmatrix} \overset{(k)}{L_1}(\varphi) \\ \overset{(k)}{L_2}(\varphi) \end{bmatrix}, \ k = k(p) \in \mathbb{N}\right\}$$

— равномерно правильные последовательности матриц.

Обозначим через $B(\varphi)$ матрицу, к которой покоординатно сходится последовательность $\left\{\overset{(k)}{B}(\varphi), \ k = k(p) \in \mathbb{N}\right\}$, а через $\begin{bmatrix} L_1(\varphi) \\ L_2(\varphi) \end{bmatrix}$ — матрицу — покоординатный предел последовательности

$$\left\{ \begin{bmatrix} \overset{(k)}{L}_1(\varphi) \\ \overset{(k)}{L}_2(\varphi) \end{bmatrix}, \; k = k(p) \in \mathbb{N} \right\}.$$

Заметим, что последовательность матриц

$$\left\{ \left[\frac{\partial \overset{(k)}{f_s}(\varphi)}{\partial \varphi_j} \right]_{s=1,\; j=1}^{k \qquad m}, \; k = k(p) \in \mathbb{N} \right\},$$

покоординатно сходится к матрице

$$\left[\frac{\partial \overset{(k)}{f_s}(\varphi)}{\partial \varphi_j} \right]_{s=1,\; j=1}^{\infty \qquad m} = \frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi}.$$

В дальнейшем под нормой бесконечной матрицы $A = \left[a_{ij} \right]_{i,\, j=1}^{\infty}$ будем понимать выражение $\| A \| = \sup\limits_i \sum\limits_{j=1}^{\infty} | a_{ij} |$.

Можно показать, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Для указанных выше матриц справедливы равенства*

$$L_1(\varphi) \frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi} = E, \quad L_1(\varphi) B(\varphi) = 0, \quad L_2(\varphi) \frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi} = 0, \quad L_2(\varphi) B(\varphi) = E,$$

где E *и* 0 *— единичная и нулевая матрицы соответствующих размеров.*

Доказательство. Докажем первое равенство

$$L_1(\varphi) \frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi} = E.$$

Введем обозначения

$$L_1(\varphi) = \left[l_{sj}^1(\varphi) \right]_{s=1,\; j=1}^{m \qquad \infty}, \quad \overset{(k)}{L}_1(\varphi) = \left[\overset{(k)}{l_{sj}^1}(\varphi) \right]_{s=1,\; j=1}^{m \qquad k},$$

$$\frac{\partial \overset{(k)}{f}(\varphi)}{\partial \varphi} = \left[\frac{\partial \overset{(k)}{f_s}(\varphi)}{\partial \varphi_j} \right]_{s=1,\; j=1}^{k \qquad m}.$$

Из равенства

$$\overset{(k)}{L}_1(\varphi) \frac{\partial \overset{(k)}{f}(\varphi)}{\partial \varphi} = E$$

следует

$$\delta_{sj} = \sum_{i=1}^{k} \overset{(k)}{l_{si}^1}(\varphi) \frac{\partial \overset{(k)}{f_i}(\varphi)}{\partial \varphi_j} = \sum_{i=1}^{\infty} \overset{(k)}{l_{si}^1}(\varphi) \frac{\partial \overset{(k)}{f_i}(\varphi)}{\partial \varphi_j}, \quad s, j = 1, \ldots, m,$$

где слагаемые для $i > k$ заменены нулями.

Заметим, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \overset{(k)}{l_{si}^1}(\varphi) \frac{\partial \overset{(k)}{f_i}(\varphi)}{\partial \varphi_j} \le \sum_{i=1}^{\infty} \left| \overset{(k)}{l_{si}^1}(\varphi) \right| \left\| \frac{\partial \overset{(k)}{f}(\varphi)}{\partial \varphi} \right\| = \left\| \frac{\partial \overset{(k)}{f}(\varphi)}{\partial \varphi} \right\| \sum_{i=1}^{\infty} \left| \overset{(k)}{l_{si}^1}(\varphi) \right|.$$

Этот ряд сходится равномерно по $k=k(p)\in\mathbb{N}$ и $\varphi\in T_m$, так как

$$\left\{\overset{(k)}{L}_1(\varphi),\ k=k(p)\in\mathbb{N}\right\}$$

— равномерно правильная последовательность матриц. При этом имеет место покоординатная сходимость

$$\lim_{k\to\infty}\overset{(k)}{l^1_{si}}(\varphi) = l^1_{si}(\varphi),\quad \lim_{k\to\infty}\frac{\partial\overset{(k)}{f_i}(\varphi)}{\partial\varphi_j} = \frac{\partial f_i(\varphi)}{\partial\varphi_j}.$$

Тогда согласно лемме 12.1 из [3, с. 128] получаем равенство

$$\delta_{sj} = \sum_{i=1}^{\infty} l^1_{si}(\varphi)\frac{\partial f_i(\varphi)}{\partial\varphi_j},\quad s,j=1,\ldots,m,$$

т. е. выполняется первое равенство.

Аналогично доказываем и остальные равенства.

Введем в окрестности многообразия M локальные координаты так, чтобы многообразие приняло вид $h=0$, $\varphi\in T_m$.

Новые координаты вводим по формуле

$$x = f(\varphi) + B(\varphi)h, \tag{8}$$

где

$$f(\varphi) = \lim_{k\to\infty}\overset{(k)}{f}(\varphi),\quad B(\varphi) = \lim_{k\to\infty}\overset{(k)}{B}(\varphi)$$

покоординатно.

Тогда справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. *Для каждого достаточно малого* $\delta>0$ *можно указать такое* $\delta_1=\delta_1(\delta)>0$, *что любая точка* $x\in\mathfrak{M}$, *удовлетворяющая* $\rho(x,M)<\delta$, *имеет локальные координаты* (φ,h) *такие, что* $\|h\|<\delta_1$, $\varphi\in T_m$ $(\delta_1\to 0,\ \delta\to 0)$.

Доказательство. Имеем

$$\rho(x,M) = \inf_{y\in M}\rho(x,y) = \inf_{\varphi\in T_m}\|x-f(\varphi)\| = \|x-f(\psi)\|$$

для некоторого $\psi\in T_m$. Тогда неравенство $\rho(x,M)<\delta$ означает, что $\|x-f(\psi)\|<\delta$.

Положим $x=f(\psi+z)$ и покажем, что при достаточно малом $\delta>0$ уравнение

$$f(\psi) + z = f(\varphi) + B(\varphi)h$$

однозначно разрешимо относительно φ, h из области $\|\varphi-\psi\|<\delta_1$, $\|h\|<\delta_1$, $\|z\|<\delta$, где $\delta_1=\delta_1(\delta)$, $\delta_1\to 0$, $\delta\to 0)$.

Для этого запишем

$$\frac{\partial f(\psi)}{\partial\varphi}(\varphi-\psi) + B(\psi)h =$$

$$= z + f(\psi) - f(\varphi) - B(\varphi)h + B(\psi)h + \frac{\partial f(\psi)}{\partial\varphi}(\varphi-\psi),$$

или

$$\frac{\partial f(\psi)}{\partial\varphi}(\varphi-\psi) + B(\psi)h =$$

$$= z - \left[f(\varphi)-f(\psi)-\frac{\partial f(\psi)}{\partial\varphi}(\varphi-\psi)\right] - [B(\varphi)-B(\psi)]h.$$

Разрешая это уравнение относительно $(\varphi-\psi)$, h с учетом леммы 1, получаем

$$\varphi-\psi = L_1\left\{z-\left[f(\psi+(\varphi-\psi))-f(\psi)-\frac{\partial f(\psi)}{\partial\varphi}(\varphi-\psi)\right]-\right.$$

$$\left.-\left[B(\psi+(\varphi-\psi))-B(\psi)\right]h\right\},$$

$$h = L_2\left\{z-\left[f(\psi+(\varphi-\psi))-f(\psi)-\frac{\partial f(\psi)}{\partial\varphi}(\varphi-\psi)\right]-\right.$$

$$\left.-\left[B(\psi+(\varphi-\psi))-B(\psi)\right]h\right\},$$

где $L_1=L_1(\psi)$, $L_2=L_2(\psi)$ — матрицы из леммы 1.

Заметим, что здесь по $\delta>0$ можно указать $\delta_1=\delta_1(\delta)>0$ такое, чтобы в области $\|\varphi-\psi\|<\delta_1$, $\|h\|<\delta_1$, $\|z\|<\delta$, оператор в правой части был сжимающим в пространстве векторов $\varphi-\psi$, h. Тогда эта система однозначно разрешается относительно $\varphi-\psi$, h при соответствующем выборе δ_1 и достаточно малом $\delta>0$. Локальные координаты (φ, h): $\|h\|<\delta_1$, $\varphi\in T_m$ имеет любая точка x: $\rho(x,M)<\delta$.

Поскольку $x=f(\varphi)+B(\varphi)h$, то $h=L_2(\varphi)[x-f(\varphi)]$. Так как

$$\left\{\overset{(k)}{L_2}(\varphi),\ k=k(p)\in\mathbb{N}\right\}$$

— равномерно правильная последовательность, то $\|L_2(\varphi)\|\le L=\mathrm{const}<\infty$. Тогда

$$\|h\| \le \|L_2(\varphi)\|\,\|x-f(\varphi)\| \le L\|x-f(\varphi)\|.$$

Из этой оценки следует, что малая окрестность многообразия M отображается в малую окрестность множества $h=0$, $\varphi\in T_m$.

Запишем систему (1) в окрестности M в локальных координатах (φ, h).

Теорема. *Пусть матрицы* $\overset{(k)}{A}\left(\varphi, \overset{(k)}{h}\right)$, $\overset{(k)}{P}\left(\varphi, \overset{(k)}{h}\right)$, $k=k(p)$, *k-укороченных систем составляют равномерно правильные последовательности, а также являются равномерно правильными последовательности*

$$\left\{\left[\frac{\partial \overset{(k)}{f}(\varphi)}{\partial\varphi}, \overset{(k)}{B}(\varphi)\right],\ k=k(p)\in\mathbb{N}\right\},\quad \left\{\begin{bmatrix}\overset{(k)}{L_1}(\varphi)\\ \overset{(k)}{L_2}(\varphi)\end{bmatrix},\ k=k(p)\in\mathbb{N}\right\}.$$

Тогда система (1) *при выполнении указанных выше требований в окрестности инвариантного многообразия M в локальных координатах (φ, h), вводимых по формуле* (8), *примет вид*

$$\frac{d\varphi}{dt} = \lambda + A(\varphi,h)h,$$

$$\frac{dh}{dt} = P(\varphi,h)h, \tag{9}$$

где $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \in T_m$, $h \in \mathfrak{M}$, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ *— вектор частот,*

$$P(\varphi, h) = \lim_{k\to\infty} \overset{(k)}{P}\left(\varphi, \overset{(k)}{h}\right), \quad A(\varphi, h) = \lim_{k\to\infty} \overset{(k)}{A}\left(\varphi, \overset{(k)}{h}\right)$$

покоординатно.

Доказательство. Рассмотрим равенство $\overset{(k)}{x} = \overset{(k)}{f}(\varphi) + \overset{(k)}{B}(\varphi)\overset{(k)}{h}$, где

$$\overset{(k)}{h} = \overset{(k)}{L_2}(\varphi)\left[\overset{(k)}{x} - \overset{(k)}{f}(\varphi)\right], \quad \overset{(k)}{L_2}(\varphi) = \left[\overset{(k)}{l_{sj}}(\varphi)\right]_{s=1,\ j=1}^{k-m\ k},$$

i-я координата вектора $\overset{(k)}{h}$ имеет вид

$$\overset{(k)}{h_i} = \sum_{k=1}^{s} \overset{(k)}{l_{is}}(\varphi)\left(\overset{(k)}{x_s} - \overset{(k)}{f_s}(\varphi)\right).$$

Заменяя произведения в этой сумме нулями при $s > k$, получаем

$$\overset{(k)}{h_i} = \sum_{k=1}^{s} \overset{(k)}{l_{is}}(\varphi)\left(\overset{(k)}{x_s} - \overset{(k)}{f_s}(\varphi)\right) = \sum_{s=1}^{\infty} \overset{(k)}{l_{is}}(\varphi)\left(\overset{(k)}{x_s} - \overset{(k)}{f_s}(\varphi)\right).$$

Так как $\overset{(k)}{x}$ рассматриваем в окрестности $\overset{(k)}{M}$, то

$$\exists\, \delta > 0: \left\|\overset{(k)}{x} - \overset{(k)}{f}(\varphi)\right\| < \delta.$$

Тогда

$$\sum_{s=1}^{\infty} \overset{(k)}{l_{is}}(\varphi)\left(\overset{(k)}{x_s} - \overset{(k)}{f_s}(\varphi)\right) < \left\|\overset{(k)}{x} - \overset{(k)}{f}(\varphi)\right\| \sum_{s=1}^{\infty} \left|\overset{(k)}{l_{is}}(\varphi)\right|.$$

Этот ряд сходится равномерно по $\varphi \in T_m$, поскольку $\left\{\overset{(k)}{L_2}(\varphi),\ k = k(p) \in \mathbb{N}\right\}$ — равномерно правильная последовательность матриц.

Заметим, что при условии, что $\overset{(k)}{x} = \left(\overset{(k)}{x_1}, \ldots, \overset{(k)}{x_k}, 0, \ldots\right)$ удовлетворяет системе (2),

$$x_s = \lim_{k\to\infty} \overset{(k)}{x_s}, \quad s = 1, 2 \ldots,$$

удовлетворяет системе (1).

Тогда согласно лемме 12.1 из [3, с. 128]

$$h_i = \lim_{k\to\infty} \overset{(k)}{h_i} = \lim_{k\to\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \overset{(k)}{l_{is}}(\varphi)\left(\overset{(k)}{x_s} - \overset{(k)}{f_s}(\varphi)\right) = \sum_{s=1}^{\infty} l_{is}(\varphi)(x_s - f_s(\varphi)).$$

Покажем, что (φ, h) — решение системы (9). Рассмотрим первое уравнение этой системы

$$\frac{d\varphi_s}{dt} = \lambda_s + \sum_{j=1}^{\infty} \overset{(k)}{a_{sj}}\left(\varphi, \overset{(k)}{h}\right)\overset{(k)}{h_j}, \quad s = 1, \ldots, m$$

(слагаемые при $j > k$ равны нулю).

Поскольку

$$\sum_{j=1}^{\infty} \overset{(k)}{a}_{sj}\left(\varphi, \overset{(k)}{h}\right)\overset{(k)}{h}_j \le \sum_{j=1}^{\infty} \left|\overset{(k)}{a}_{sj}\left(\varphi, \overset{(k)}{h}\right)\right| \left\|\overset{(k)}{h}\right\| \le \left\|\overset{(k)}{h}\right\| \sum_{j=1}^{\infty} \left|\overset{(k)}{a}_{sj}\left(\varphi, \overset{(k)}{h}\right)\right|,$$

этот ряд сходится равномерно относительно $k = k(p) \in \mathbb{N}$.
Кроме того,

$$\overset{(k)}{a}_{sj}\left(\varphi, \overset{(k)}{h}\right)\overset{(k)}{h}_j \to a_{sj}(\varphi, h)h_j, \quad k \to \infty; \quad \left[a_{sj}(\varphi, h)\right]_{s=1,\, j=1}^{m \quad \infty} = A(\varphi, h).$$

Поэтому, применяя лемму 12.1 из [3, с. 128], получаем

$$\frac{d\varphi_s}{dt} = \lambda_s + \sum_{j=1}^{\infty} a_{sj}(\varphi, h)h_j, \quad s = 1, \ldots, m.$$

Аналогично для

$$\frac{d\overset{(k)}{h}_s}{dt} = \sum_{j=1}^{\infty} \overset{(k)}{p}_{sj}\left(\varphi, \overset{(k)}{h}\right)\overset{(k)}{h}_j, \quad s = 1, 2 \ldots,$$

ряд в правой части сходится равномерно относительно $k = k(p) \in \mathbb{N}$ и

$$\overset{(k)}{p}_{sj}\left(\varphi, \overset{(k)}{h}\right)\overset{(k)}{h}_j \to p_{sj}(\varphi, h)h_j, \quad k \to \infty; \quad \left[p_{sj}(\varphi, h)\right]_{s,\, j=1}^{\infty} = P(\varphi, h).$$

Тогда после применения леммы 12.1 из [3, с. 128] получаем

$$\frac{dh_s}{dt} = \lim_{k\to\infty} \frac{d\overset{(k)}{h}_s}{dt} = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \overset{(k)}{p}_{sj}\left(\varphi, \overset{(k)}{h}\right)\overset{(k)}{h}_j = \sum_{j=1}^{\infty} p_{sj}(\varphi, h)h_j.$$

Таким образом, (φ, h) удовлетворяет системе (9), что и завершает доказательство теоремы.

1. *Персидский К. П.* Бесконечные системы дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения в нелинейных пространствах. – Алма-Ата: Наука, 1976. – 247 с.
2. *Валеев К. Г., Жаутыков О. А.* Бесконечные системы дифференциальных уравнений. – Алма-Ата: Наука, 1974. – 415 с.
3. *Самойленко А. М., Теплинский Ю. В.* Счетные системы дифференциальных уравнений. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1993. – 308 с.
4. *Самойленко А. М.* Исследование динамической системы в окрестности квазипериодической траектории. – Киев, 1990. – 43 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 90.35).
5. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 303 с.

Получено 28.02.95