УДК 517.432

С. О. Кужіль (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО АБСТРАКТНУ СХЕМУ РОЗСІЯННЯ ЛАКСА–ФІЛЛІПСА ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ*

An abstract analog of Lax–Phillips scattering scheme is constructed for the differential-operator equation $u_{tt} = -Lu$ with some condition imposed on the abstract operator L. In particular, the existence of incoming and outgoing subspaces is proved, singularities of the scattering matrix are described in terms of positive spaces of bounded values.

Для абстрактного диференціально-операторного рівняння $u_{tt} = -Lu$ при деяких умовах на оператор L розвинуто схему розсіяння Лакса–Філліпса. Зокрема, побудовано вхідний та вихідний підпростори; в термінах просторів граничних значень описані сингулярності матриці розсіяння.

Розглянемо диференціально-операторне рівняння другого порядку

$$u_{tt} = -Lu, \tag{1}$$

де L — самоспряжений оператор в гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$.

Як відомо [1, 2], можливість застосування схеми Лакса–Філліпса (Lax–Phillips) до вивчення динаміки системи, що задається рівнянням (1), залежить від існування вхідного та вихідного підпросторів для групи розв'язків цього рівняння у просторі даних Коші. Починаючи з класичних результатів Лакса–Філліпса, існує багато робіт (див., наприклад, огляд в [3, 4]), в яких такі підпростори були отримані як деяка модифікація вхідного та вихідного підпросторів для незбуреного хвильового рівняння (при цьому конкретний оператор L в рівнянні (1) розглядався як збурення певного типу вільного гамільтоніану $-\Delta$).

У зв'язку з цим виникає задача означення абстрактного класу операторів, що описують вільну динаміку в рівнянні (1) (незбурені оператори), і побудови на їх основі абстрактної схеми розсіяння Лакса–Філліпса, що включала б в себе, як частинний випадок, різні збурення класичного хвильового рівняння. При цьому зрозуміло, що методи дослідження в такій схемі будуть суттєво залежати від вигляду збурення. Зокрема, у даній роботі схема розсіяння Лакса–Філліпса вивчається для збурень, що задаються за допомогою простору граничних значень, і які можна розглядати як абстрактний аналог збурень у точці оператора Лапласа.

Збуренням, що враховують вплив потенціалу чи обмеженої перешкоди, будуть присвячені окремі роботи.

1. Незбурені оператори. Нехай B — простий максимальний симетричний оператор в $\mathfrak{H}$. Не обмежуючи загальності будемо вважати, що в нижній півплощині дефектне число оператора B дорівнює нулю.

Лема 1. *Оператор* $L_0 = B^2$ *— замкнений щільно визначений симетричний оператор і при цьому*:

а) $L_0^* = B^*B^*$;

б) $\operatorname{Ker}\left(L_0^* + \xi^2 I\right) = \operatorname{Ker}(B^* + i\xi I), \quad \xi > 0$;

в) $\overline{B\mathcal{D}(L_0)} = \mathfrak{H}$.

Доведення. Оскільки в нижній півплощині дефектне число оператора B дорівнює нулю, то для довільного $\xi > 0$ існує обмежений оператор $M = (B + i\xi I)^{-1}$, визначений на всьому просторі $\mathfrak{H}$. Але тоді безпосередньо перевіряє-

* Частково підтримана Фондом фундаментальних досліджень при Державному комітеті України з питань науки і технологій.

ться, що оператор $L_0 + \xi^2 I = (B + i\xi I)(B - i\xi I)$ (а значить, і оператор L_0) є замкненим. При цьому

$$\mathcal{D}(L_0) = M\,\mathcal{D}(B), \tag{2}$$

звідки, враховуючи щільність множини $\mathcal{D}(B)$ у просторі $\mathfrak{H}$ і рівність $\operatorname{Ker} M^* = \operatorname{Ker}(B^* - i\xi I)^{-1} = \{0\}$, приходимо до висновку, що оператор L_0 щільно визначений в $\mathfrak{H}$.

Користуючись (2), неважко переконатись у тому, що $L_0^* + \xi^2 I = (B^* - i\xi I)(B^* + i\xi I)$ і, отже, твердження а) і б) справджуються.

З простоти, максимальності і симетричності оператора B випливає, що $\operatorname{Ker}(B^* - \mu I) = \{0\}$ при всіх $\mu \in \mathbb{R}$. Зокрема, $\operatorname{Ker} B^* = \{0\}$ і, отже, множина $B\,\mathcal{D}(L_0) = MB\,\mathcal{D}(B)$ щільна в $\mathfrak{H}$.

Означення. *Самоспряжене розширення L симетричного оператора B^2 будемо називати незбуреним, якщо при всіх $u \in \mathcal{D}(L)$ виконується рівність*

$$(Lu, u) = \|B^* u\|^2. \tag{3}$$

Множину всіх незбурених розширень оператора B^2 позначимо через $\mathfrak{M}$. Користуючись перетворенням Радона, неважко перевірити, що вільний гамільтоніан $-\Delta$ в просторі $L_2(\mathbb{R}^n)$ (n — непарне) є незбуреним (див. п. 3). Відмітимо також, що з твердження а) леми 1 і рівності $\operatorname{Ker} B^* = \{0\}$ випливає, що для довільного самоспряженого розширення L оператора B^2 вірно $\operatorname{Ker} L = \{0\}$.

Нехай L — додатне самоспряжене розширення оператора B^2. Поповнення лінеалу $\mathcal{D}(L)$ за нормою

$$\|u\|_L^2 = (Lu, u) \tag{4}$$

позначимо через $\mathfrak{H}_L$. У просторі даних Коші $H_L = \mathfrak{H}_L \oplus \mathfrak{H}$ оператор

$$Q_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -L & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(Q_0) = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \,\middle|\, \{u, v\} \subset \mathcal{D}(L) \right\}$$

в істотному кососамоспряжений і тому його замикання $Q = \overline{Q_0}$ є генератором унітарної в H_L групи розв'язків задачі Коші $W(t) = e^{Qt}$ рівняння (1).

Замикання в H_L лінеалів

$$D_-^0 = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ -iBu \end{pmatrix} \,\middle|\, u \in \mathcal{D}(B^2) \right\}, \quad D_+^0 = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ iBu \end{pmatrix} \,\middle|\, u \in \mathcal{D}(B^2) \right\} \tag{5}$$

позначимо відповідно через D_- і D_+.

Теорема 1. *Якщо $L \in \mathfrak{M}$, то $H_L = D_- \oplus D_+$ і підпростори D_- і D_+ є відповідно вхідним та вихідним підпросторами для групи $W(t)$, тобто при всіх $t \geq 0$:*

1) $W(t)D_+ \subset D_+$, $W(-t)D_- \subset D_-$;

2) $\bigcap\limits_{t \geq 0} W(t)\,D_+ = \bigcap\limits_{t \geq 0} W(-t)\,D_- = \{0\}$;

3) $\bigvee\limits_{\mathbb{R}} W(t)\,D_+ = \bigvee\limits_{\mathbb{R}} W(t)\,D_- = H_L$**.

** $\bigvee\limits_{\mathcal{A}} z_\alpha$ — замкнена лінійна оболонка многовидів z_α при всіх $\alpha \in \mathcal{A}$.

оператора C легко перевірити, що $\operatorname{Ker} G = \operatorname{Ker} C \oplus \operatorname{Ker}(I - 2\xi^2 C)$, отже, виконується рівність (12). З означення ПГЗ випливає, що оператору L_μ в рівності (11) відповідає оператор $C = 0$. В свою чергу, враховуючи, що $\mathcal{D}(L_\mu) \cap \cap \mathcal{D}(L_M) = \mathcal{D}(B^2)$, з рівностей (10), (12) одержуємо, що розширенню L_M відповідає оператор $C = (1/2\xi^2)I$.

2. Властивості матриці розсіяння. Нехай $\tilde{L}$ — довільне незбурене розширення. Визначаючи самоспряжений оператор L як деяке збурення оператора $\tilde{L}$, можна розвивати абстрактну схему розсіяння Лакса – Філліпса для рівняння (1), яка включала б в себе, як частинний випадок $(\tilde{L} = -\Delta)$, різні збурення класичного хвильового рівняння. У цій роботі розглядається випадок, коли оператор L є самоспряженим розширенням симетричного оператора B^2 і має скінченну кількість власних значень на від'ємній півосі. Для спрощення викладення будемо вважати, що оператор L — додатний, а в кінці цього пункту стисло обговоримо, яких змін потребує доведення у загальному випадку.

Теорема 3. *Нехай L — самоспряжене додатне розширення оператора B^2. Тоді підпростори D_- і D_+ є відповідно вхідним та вихідним підпросторами для групи розв'язків $W(t)$ рівняння* (1).

Доведення. З означення просторів $D_\pm$ випливає, що $H_L \supset D_\pm$. Міркуючи аналогічно доведенню теореми 1, переконуємось, що підпростори $D_\pm$ задовольняють співвідношення 1, 2 теореми 1 для групи $W(t)$.

Для доведення співвідношення 3 теореми 1 у просторі $K_L = H_L \ominus (D_- \oplus \oplus D_+)$ розглянемо стискуючий оператор $A = P_{K_L} U|_{K_L}$, де P_{K_L} — ортопроектор в H_L на K_L, а оператор U — когенератор групи $W(t)$. Як відомо [1, 9, 10], у схемі Лакса – Філліпса властивості оператора A однозначно визначають особливості процесу розсіяння. Зокрема, рівність з теореми 1 еквівалентна умові

$$A^n y \to 0, \quad (A^*)^n y \to 0, \qquad n \to \infty, \tag{13}$$

при всіх $y \in K_L$.

З'ясуємо деякі властивості оператора A. З представлень (5) і твердження в) леми 1 випливає, що $\begin{pmatrix} 0 \\ \mathfrak{H} \end{pmatrix} \subset D_- \oplus D_+$, де $\begin{pmatrix} 0 \\ \mathfrak{H} \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \middle| \, x \in \mathfrak{H} \right\}$ і, отже, враховуючи (6), можна зробити висновок, що $\begin{pmatrix} \mathcal{D}(L) \\ 0 \end{pmatrix} \subset \bigvee_{\mathbb{Z}} U^n (D_- \oplus D_+) = \mathcal{L}$, а значить, $\mathcal{L} = H_L$. З останньої рівності дістаємо, що A — цілком неунітарний оператор [9]. Крім того, покажемо, що оператор A — самоспряжений. Справді, із рівності (6) маємо $P_{\mathfrak{H}_L} U P_{\mathfrak{H}_L} = P_{\mathfrak{H}_L} U^* P_{\mathfrak{H}_L}$, де $P_{\mathfrak{H}_L}$ — ортопроектор в H_L на $\mathfrak{H}_L$. При цьому з означення простору K_L випливає що $K_L \subset \mathfrak{H}_L$ і, отже, $Ay = P_{K_L} P_{\mathfrak{H}_L} U y = P_{K_L} U^* y = A^* y$ при всіх $y \in K_L$.

Самоспряженість оператора A означає, що перетин його спектра з одиничним колом має міру нуль, і тому (твердження 6.7, гл. 2, [9]) виконується (13), що завершує доведення теореми.

З теореми 3 випливає, що оператор L визначає в рівнянні (1) таку динаміку $W(t)$, для якої справедливі всі результати абстрактної схеми розсіяння Лакса – Філліпса. Зокрема, це означає, що властивості матриці розсіяння для групи $W(t)$ визначаються спектром генератора асоційованої півгрупи $Z(t) = = P_{K_L} W(t)|_{K_L}$, або, що еквівалентно, спектром її когенератора — оператора A.

Розглянемо докладніше структуру простору K_L і властивості оператора A.

Поповнення лінеалу $\mathcal{D}(B^2)$ за нормою $\|\cdot\|_L$ позначимо через $\mathfrak{H}_{L_0}$. На підставі (4) при всіх $u \in \mathcal{D}(B^2)$ справджується рівність $\|u\|_L = \|Bu\|$ і, отже, послідовність елементів $\{u_n\}$, $u_n \in \mathcal{D}(B^2)$, фундаментальна в $\mathfrak{H}_L$ тоді і тільки тоді, коли послідовність $\{Bu_n\}$ фундаментальна у просторі $\mathfrak{H}$.

Будемо говорити, що послідовність $\{u_n\}$ збігається в $\mathfrak{H}_L$ до елемента x_z, якщо послідовність $\{Bu_n\}$ збігається в просторі $\mathfrak{H}$ до елемента z.

З урахуванням твердження в) леми 1 отримуємо, що у просторі $\mathfrak{H}_L$ лінеал $\mathcal{D}(B^2)$ можна ототожнити з лінеалом $\{x_{Bu} | \ u \in \mathcal{D}(B^2)\}$, а підпростір $\mathfrak{H}_{L_0}$ — з простором $\{x_z | \ z \in \mathfrak{H}\}$, де

$$(x_{z_1}, x_{z_2})_L = (z_1, z_2). \tag{14}$$

При цьому для довільних $f \in \mathcal{D}(L)$ і $z \in \mathfrak{H}$

$$(f, x_z)_L = \lim_{n\to\infty} (f, u_n)_L = \lim_{n\to\infty} (B^*f, Bu_n) = (B^*f, z). \tag{15}$$

Скориставшись рівностями (14), (15), безпосередньо перевіряємо, що замикання в H_L лінеалу

$$\left\{ \hat{y}_f = \begin{pmatrix} y_f \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \ y_f = f - x_{B^*f} \quad \forall f \in \mathcal{D}(L) \right\} \tag{16}$$

збігається з K_L і при цьому $\|y_f\|_L^2 = (Lf, f) - \|B^*f\|^2$. Оскільки оператор L — самоспряжене розширення оператора B^2, то в ПГЗ $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ він задається деяким оператором C і, отже, з останньої рівності і леми 2

$$(y_f, y_g)_L = (G\Gamma_1 f, \Gamma_1 g), \quad \{f, g\} \subset \mathcal{D}(L). \tag{17}$$

З'ясуємо, як діє оператор A на елементах $\hat{y}_f$ з K_L.

Справедливе таке твердження.

Лема 3. *Якщо* $\{f, g\} \subset \mathcal{D}(L)$, *то*

$$(A\hat{y}_f, \hat{y}_g)_{H_L} = ((I - 4\xi^2 C)G\Gamma_1 f, \Gamma_1 g).$$

Доведення. Нехай послідовність $\{u_n\}$, $u_n \in \mathcal{D}(B^2)$, збігається в $\mathfrak{H}_L$ до елемента x_{B^*f}. Тоді, враховуючи рівності (6) і (16), дістаємо

$$(A\hat{y}_f, \hat{y}_g)_{H_L} = \lim_{n\to\infty} ((L - \xi^2 I)R(f - u_n), y_g)_L =$$

$$= (y_f, y_g)_L - 2\xi^2 \lim_{n\to\infty} (R(f - u_n), y_g)_L. \tag{18}$$

Покладемо $R(f - u_n) = t_n$. На підставі рівностей (10), (11) робимо висновок, що $G\Gamma_1 t_n = \Gamma_2 t_n = CP_{\mathcal{H}}(f - u_n)$ і, отже, беручи до уваги (17), одержуємо

$$(t_n, y_g)_L = (y_{t_n}, y_g)_L = (f - u_n, G\Gamma_1 g). \tag{19}$$

При цьому, враховуючи твердження б) леми 1, маємо $(u_n, G\Gamma_1 g) = = -\frac{i}{\xi}(Bu_n, G\Gamma_1 g)$ і, отже, з рівняння (19) випливає

$$\lim_{n\to\infty}(t_n, y_g)_L = \frac{i}{\xi}((B^* - i\xi I)f, G\Gamma_1 g). \tag{20}$$

Запишемо елемент f у вигляді $f = u + h$, де $u \in \mathcal{D}(L_\mu)$, $h \in \mathcal{H}$, і, користуючись рівностями (10), (11), перепишемо праву частину рівності (20) у вигляді

$$\frac{i}{\xi}((B - i\xi I)u - 2i\xi h, G\Gamma_1 g) = 2(\Gamma_2 f, G\Gamma_1 g) = (2C\Gamma_1 f, G\Gamma_1 g).$$

Таким чином, $\lim_{n\to\infty}(t_n, y_g)_L = (2C\Gamma_1 f, G\Gamma_1 g)$, що з урахуванням (17) і (18) завершує доведення леми.

Використовуючи лему 3, неважко отримати зв'язок між операторами A і C. Справді, оскільки оператор L — додатний, то з леми 2 випливає, що оператор G — невід'ємний в $\mathcal{H}$. З урахуванням рівності (17) одержуємо, що замикання оператора Ω, який на елементах $\hat{y}_f$ визначається формулою $\Omega\hat{y}_f = \sqrt{G}\,\Gamma_1 f$, ізометрично відображає простір K_L на $\overline{G\mathcal{H}}$. При цьому на підставі леми 3 робимо висновок, що $\Omega A\hat{y}_f = (I - 4\xi^2 C)\Omega\hat{y}_f$ і, отже, для довільного $y \in K_L$ справджується рівність

$$Ay = \Omega^{-1}(I - 4\xi^2 C)\Omega y. \tag{21}$$

Оператор C, що визначає в ПГЗ $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ оператор L, в певному сенсі характеризує збурення цього оператора по відношенню до незбуреного розширення L_μ. Тому природно сподіватися, що спектральні властивості оператора C будуть визначати сингулярності матриці розсіяння для групи $W(t)$. Справедливе таке твердження.

Теорема 4. *Нехай додатний оператор L є самоспряженим розширенням симетричного оператора B^2. Тоді матриця розсіяння $S(\delta)$ групи $W(t)$ аналітична і унітарна при $\delta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ і є граничним значенням аналітичної в нижній півплощині операторнозначної функції $S(z)$. При цьому*

а) *матриця розсіяння $S(\delta)$ аналітична при $\delta = 0$ тоді і тільки тоді, коли $1/2\xi^2 \in \rho\left(C|_{\overline{(C-(1/2\xi^2)I)\mathcal{H}}}\right)$;*

б) *у нижній півплощині точки сингулярності функції $S(z)$ розміщені на уявній осі і складаються з точок $z = -i|z|$, в яких оператор $S(z)$ не має оберненого, або його обернений оператор є необмеженим і при цьому*

$$0 \in \sigma_\alpha(S(z)) \Leftrightarrow \frac{1}{2\xi(\xi + |z|)} \in \sigma_\alpha(C), \quad \alpha \in \{p, c\}.$$

Доведення теореми полягає у використанні добре відомих результатів теорії розсіяння Лакса – Філліпса та теорії характеристичних функцій Секефальві-Надя – Фояша. Наведемо його основні етапи. Оскільки L — самоспряжене розширення оператора B^2, то з теореми 3 і [1] випливає, що для групи $W(t)$ існують вхідне та вихідне спектральні зображення, що побудовані по підпросторах D_- і D_+, і відповідна матриця розсіяння $S(\delta)$ є граничним значенням аналітичної в нижній півплощині операторнозначної функції $S(z)$. Функція $S(z)$, по суті, є характеристичною функцією генератора асоційованої півгрупи, або (з точністю до дробово-лінійного перетворення) характеристичною функцією стискуючого оператора A [10]. Використовуючи тепер теорему 4.1 з [9], гл. 6, і рівність (21), завершуємо доведення теореми.

Зауваження. За побудовою підпростори $D_\pm$, якими в схемі розсіяння Лакса – Філліпса визначається матриця розсіяння $S(\delta)$, не залежать від вибору незбуреного розширення. Тому використання нами для опису властивостей функції $S(z)$ ПГЗ $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$, що відповідає жорсткому розширенню L_μ, обумовлено лише зручністю доведення і більшою наочністю формул у твердженнях а) і б) теореми 4. Результати, аналогічні теоремі 4, неважко отримати, використовуючи при побудові ПГЗ довільне незбурене розширення.

Нехай $\tilde{L} = L_{\tilde{C}}$ — незбурене розширення (оператор $\tilde{C}$ визначає оператор $\tilde{L}$ в ПГЗ $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$). Замінимо в розкладі (9) оператор L_μ на $L_{\tilde{C}}$ і за допомогою формул (10) визначимо канонічний позитивний ПГЗ $(H, \tilde{\Gamma}_1, \tilde{\Gamma}_2)$, що відповідає розширенню $L_{\tilde{C}}$. Оскільки оператор L — розширення оператора B^2, то в цьому ПГЗ його визначає деякий обмежений самоспряжений оператор C', який можна розглядати як показник збурення оператора L по відношенню до незбуреного розширення $L_{\tilde{C}}$.

Використовуючи співвідношення (10), (11), неважко переконатись, що для операторів C і C' справджується рівність $C = C' + \tilde{C}$. Отже, якщо оператор L задається в ПГЗ $(H, \tilde{\Gamma}_1, \tilde{\Gamma}_2)$, то в твердженнях а) і б) теореми 4 оператор C необхідно замінити на $C' + \tilde{C}$.

Припустимо тепер, що спектр оператора L на від'ємній півосі складається з скінченної кількості нормальних власних значень $-\eta_1^2, \ldots, -\eta_n^2$, і стисло обговоримо, які зміни необхідно зробити в цій роботі для досягнення результату, подібного теоремі 4.

Перш за все зазначимо, що рівність (4) визначає на $\mathcal{D}(L)$ індефінітну метрику*** $[u, u] = (Lu, u)$.

Поповнення лінеалу $\mathcal{D}(L)$ за нормою $\|u\|_{|L|} = (|L|u, u)$, де $|L|$ — модуль оператора L, позначимо через $\mathfrak{H}_L$. Простір $\mathfrak{H}_L$ є простором Понтрягіна з індефінітною метрикою $[\cdot, \cdot]$ і рангом індефінітності, рівним кратності спектра оператора L на від'ємній півосі. У просторі Понтрягіна H_L оператор Q є генератором π-унітарної групи $W(t)$ і його спектр складається з точок неперервного спектра на уявній осі та $2n$ дійсних власних значень $\mp\eta_1, \ldots, \mp\eta_n$ $(\eta_i > 0)$. Через P_0 позначимо π-ортогональний проектор в H_L на невироджений підпростір $\mathcal{P} = \sum_{i=1}^n \dotplus (\operatorname{Ker}(Q - \eta_i I) \dotplus \operatorname{Ker}(Q + \eta_i I))$.

Теорема 3′. *Для групи $W(t)$ і підпросторів $D_\pm$ справджуються співвідношення* 1, 2 *теореми* 1, *а рівність* 3 *замінюється на*

$$3') \quad (I - P_0) \bigvee_{\mathbb{R}} W(t) D_+ = (I - P_0) \bigvee_{\mathbb{R}} W(t) D_- = (I - P_0) H_L.$$

Доведення. Вибираючи ξ так, що $\xi \,\overline{\in}\, \{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$, і міркуючи аналогічно доведенню теореми 1, переконуємось у тому, що співвідношення 1 та 2 справджуються.

У просторі Понтрягіна K_L π-стискуючий оператор A є також π-самоспряженим і його спектр зовні одиничного кола складається з n нормальних власних значень $-(\xi + \eta_i)/(\xi - \eta_i) = \gamma_i$. Підпростір $K_L^- = \sum_{i=1}^n \dotplus \operatorname{Ker}(A - \gamma_i I)$ — максимальний від'ємний у просторі K_L і тому його π-ортогональне доповнення $K_L^+ = K_L [-] K_L^-$ є максимальним додатним підпростором. На підставі рівності $\bigvee_{\mathbb{Z}} U^n (D_- \dotplus D_+) = H_L$ і [12] дістаємо, що умова 3′ еквівалентна умові $A^n y \to 0$ $(\forall\, y \in K_L^+)$, справедливість якої доводиться аналогічно доведенню співвідношення (13) теореми 3, що і завершує доведення теореми 3′.

*** З приводу означення просторів Понтрягіна та загальноприйнятої „індефінітної" термінології див. [11].

Покладемо для визначеності $n=3$ і докладніше опишемо оператор B_1^2. Для цього у просторі N розглянемо ортонормований базис $\left\{Y_k^l(\omega)\right\}_{k=0}^{\infty}$, $l = 0, \pm 1, \ldots, \pm k$, сферичних гармонік. Використовуючи зв'язок між перетвореннями Фур'є та Радона [13, 14] та теореми 4.1, 4.5 з [15], гл. 4, можна показати, що оператор B_1^2 збігається із звуженням оператора $-\Delta$ на множину

$$\mathcal{D} = \left\{ f(x) \in W_2^2\left(\mathbb{R}^3\right) \;\middle|\; f(0) = 0,\ \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{f(x)}{|x|^{\alpha_k}} Y_k^l\left(\frac{x}{|x|}\right) dx = 0 \right\},$$

де $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_k = 2$ при непарних і $\alpha_k = 3$ при парних k (в останньому випадку інтеграл розуміється у сенсі головного значення).

Таким чином, якщо в правій частині рівняння (1) стоїть довільне самоспряжене розширення $-\Delta'$ (з скінченною кількістю власних значень на від'ємній півосі) оператора $-\Delta|_{\mathcal{D}}$, то наведені у цій роботі результати дозволяють отримати інформацію про сингулярності відповідної матриці розсіяння. При цьому зрозуміло, що $L = -F\Delta' F^{-1}$ є самоспряженим розширенням B^2 і матриці розсіяння для груп розв'язків, що визначаються в рівнянні (1) операторами $-\Delta'$ і L, збігаються (при певному виборі спектральних зображень). Таким чином, вивчення сингулярностей матриць розсіяння для динамік, що задаються в (1) самоспряженими розширеннями оператора B_1^2, зводиться до аналогічної задачі для самоспряжених розширень оператора B^2, які зручніше задавати в термінах ПГЗ.

Покладемо $\mathcal{H} = \operatorname{Ker}(B^*B^* + \xi^2 I) = \{n(\omega)e^{-\xi s} \mid n(\omega) \in N\}$. З урахуванням (10) і (24) безпосередньо перевіряємо, що трійка $(H, \tilde{\Gamma}_1, \tilde{\Gamma}_2)$, де оператори $\tilde{\Gamma}_i: \mathcal{D}(B^*B^*) = W_2^2(\mathbb{R}_+, N) \to \mathcal{H}$ визначаються формулами

$$\tilde{\Gamma}_1(g(s)) = 2\xi(g'(0) + \xi g(0))e^{-\xi s}, \quad \left(g(s) \in W_2^2(\mathbb{R}_+, N)\right),$$

$$\tilde{\Gamma}_2(g(s)) = \left(P_+ g(0) - \frac{1}{\xi} P_+ g'(0)\right) e^{-\xi s}$$

$(P_+$ (P_-) — ортопроектор в N на множину парних (непарних) функцій$)$, є канонічним позитивним ПГЗ симетричного оператора B^2, що відповідає незбуреному розширенню $\tilde{L}$.

Відмітимо, що розширення $\tilde{L}$ не є жорстким. Враховуючи (24), одержуємо, що в ПГЗ $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$, що відповідає жорсткому розширенню $L_\mu = B^*B$ (і яке будується аналогічно випадку хвильового рівняння на півосі), розширення $\tilde{L}$ визначається оператором $\tilde{C}$ таким, що

$$\tilde{C}\left(n(\omega)e^{-\xi s}\right) = \frac{1}{2\xi^2} P_- n(\omega) e^{-\xi s}. \tag{26}$$

Нехай $S(\delta)$ — матриця розсіяння для групи $W(t)$, що визначається в (1) оператором $-\Delta'$. Не обмежуючи загальності, виберемо ξ так, що $-\xi^2 \in \rho(-\Delta')$. Тоді в ПГЗ $(H, \tilde{\Gamma}_1, \tilde{\Gamma}_2)$ самоспряжений оператор $L = -F\Delta' F^{-1}$ визначається деяким обмеженим оператором C'. Користуючись теоремами 4 і 4′ і враховуючи зауваження до теореми 4, отримуємо зв'язок між сингулярностями $S(\delta)$ та спектральними властивостями оператора $C' + \tilde{C}$.

Зокрема, для випадку, коли оператор $-\Delta'$:

$$\mathcal{D}(-\Delta') = \left\{ f(x) + f(0)\,\beta\,\frac{e^{-\xi\|x\|}}{\|x\|} \;\middle|\; \beta \in \mathbb{R},\;\; f(x) \in W_2^2(\mathbb{R}^3) \right\},$$

є самоспряженим розширенням звуження оператора $-\Delta$ на множину $\left\{ f(x) \in W_2^2(\mathbb{R}^3) \mid f(0) = 0 \right\}$, дістаємо $C' = \frac{\beta}{2\xi} P_1$, де P_1 — ортопроектор в $\mathcal{H}$ на лінійну оболонку вектора $e^{-\xi s}$. З урахуванням (26) робимо висновок, що спектр оператора $C' + \tilde{C}$ складається з власних значень $0, \frac{1}{2\xi^2}, \frac{\beta}{2\xi}$ і, отже, матриця розсіяння $S(\delta)$ при $\beta \in \left\{0, \frac{1}{\xi}\right\}$ не має сингулярностей в комплексній площині (випадок незбурених розширень); при $\beta \in \left(0, \frac{1}{\xi}\right)$ функція $S(z)$ не має оберненого в точці $z = -i\left(\frac{1}{\beta} - \xi\right)$; при $\beta \in \mathbb{R} \setminus \left[0, \frac{1}{\xi}\right]$ у функції $S(z)$ з'являється полюс першого порядку в точці $z = -i\left(\xi - \frac{1}{\beta}\right)$.

1. *Лакс П. Д., Филлипс Р. С.* Теория рассеяния. – М.: Мир, 1971. – 310 с.
2. *Лакс П. Д., Филлипс Р. С.* Теория рассеяния для автоморфных функций. – М.: Мир, 1979. – 324 с.
3. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики: В 4-х т. – М.: Мир, 1982. – Т. 3. – 324 с.
4. *Baumgartel H., Wollenberg M.* Mathematical scattering theory. – Berlin: Akademie-Verlag, 1983. – 449 p.
5. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1966. – 543 с.
6. *Крейн М. Г.* Теория самосопряженных расширений полуограниченных операторов и ее приложения // Мат. сб. – 1947. – **20**, № 3. – С. 431–495.
7. *Кочубей А. Н.* О расширениях положительно определенного симметрического оператора // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1979. – № 3. – С. 168–171.
8. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 283 с.
9. *Секефальви-Надь Б., Фояш Ч.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Мир, 1970. – 431 с.
10. *Адамян В. М., Аров Д. З.* Об одном классе операторов рассеяния и характеристических оператор-функций сжатий // Докл. АН СССР. – 1965. – **160**, № 1. – С. 9–12.
11. *Азизов Т. Я., Иохвидов И. С.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. – М.: Наука, 1986. – 351 с.
12. *Кужель С. А.* Абстрактная схема рассеяния Лакса – Филлипса в пространствах Понтрягина. – Киев, 1994. – 39 с. – (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики; 32.94).
13. *Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я.* Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений / Обобщенные функции. – 1962. – Вып. 5. – 278 с.
14. *Lax P. D., Phillips R. S.* Scattering theory for the acoustic equation in an even number of space dimensions // Indiana Univ. Math. J. – 1972. – **22**, № 2. – P. 101–134.
15. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. – М.: Мир, 1974. – 333 с.

Одержано 04.01.95