УДК 517. 949. 2

Д. И. Мартынюк, В. Я. Данилов (Киев. ун-т),
В. Г. Паньков (Каменец-Под. пед. ин-т)

ВТОРАЯ ТЕОРЕМА Н. Н. БОГОЛЮБОВА ДЛЯ СИСТЕМ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

A theorem, which is an analog of the second Bogolyubov theorem, is proved for a system of difference equations.

Доведено теорему, що є аналогом другої теореми М. М. Боголюбова для системи різницевих рівнянь.

Расмотрим систему конечно-разностных уравнений с малым положительным параметром вида

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n = \varepsilon X(n, x_n), \tag{1}$$

где $x_n \in R^m$, $n \in Z$, $\varepsilon > 0$. Если в каждой точке некоторой области $D \in R^m$ равномерно по $n \in Z$ существует предел

$$X_0(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=n}^{n+N} X(k, x),$$

то системе (1) можно поставить в соответствие усредненную систему

$$\Delta \xi_n = \varepsilon X_0(\xi_n). \tag{2}$$

Вопросам близости соответствующих решений систем (1) и (2) на конечных интервалах посвящена, например, работа [1]. Полученные в ней результаты являются аналогом первой теоремы Н. Н. Боголюбова для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Поведение решений системы (1) на бесконечном интервале времени, что есть содержанием второй теоремы Н. Н. Боголюбова, еще довольно мало изучено. Цель данной работы — получение аналога второй теоремы Н. Н. Боголюбова для системы вида (1).

Пусть усредненная система (2) имеет изолированное положение равновесия $\xi = \xi_0$, $X_0(\varepsilon_0) = 0$. В дальнейшем будем считать, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ все собственные числа матрицы

$$\varepsilon \frac{\partial X_0(\xi_0)}{\partial x} + E \tag{3}$$

по модулю не равны 1.

Предположим, что правые части системы (1) удовлетворяют следующим условиям:

а) функция $X(n, x)$ и ее частные производные по x первого порядка ограничены и равномерно непрерывны по x в области

$$n \in Z, \ x \in D_\rho, \tag{4}$$

где D_ρ — некоторая ρ-окрестность точки ξ_0;

б) в каждой точке этой области

$$\frac{1}{N} \sum_{k=n}^{n+N} X(k, x) \to X_0(x) \tag{5}$$

при $N \to \infty$ равномерно по $n \in Z$.

1. Преобразование уравнений к стандартной форме. Для упрощения преобразуем систему (1) к некоторому специальному виду. Положив в (1)

$x = \xi_0 + b$, где ξ_0 — положение равновесия (2), а b — новые переменные, получим

$$\Delta b_n = \varepsilon[X(n, \xi_0 + b_n) - X_0(\xi_0 + b_n) + X_0(\xi_0 + b_n) + \varepsilon H b_n - \varepsilon H b_n] = \\ = \varepsilon H b_n + \varepsilon B(n, b_n), \tag{6}$$

где

$$B(n, b_n) = X(n, \xi_0 + b_n) - X_0(\xi_0 + b_n) + X_0(\xi_0 + b_n) - H b_n, \; H = \frac{\partial X_0(\xi_0)}{\partial x}.$$

При этом в ρ-окрестности точки $b = 0$ функция $B(n, b)$ и ее частные производные непрерывны в области

$$n \in Z, \; |b| \le \rho. \tag{7}$$

Кроме того, в каждой точке рассматриваемой области равномерно по $n \in Z$ имеем

$$\frac{1}{N} \sum_{k=n}^{n+N} B(k, b) \to B(b) = X_0(\xi_0 + b) - X_0(\xi_0) - Hb, \; N \to \infty, \tag{8}$$

а при выполнении известной теоремы о дифференцировании рядов получаем

$$\frac{1}{N} \sum_{k=n}^{n+N} \frac{\partial B(k, b)}{\partial b} \to \frac{\partial B(b)}{\partial b} = \frac{\partial X_0(\xi_0 + b)}{\partial b} - H \tag{9}$$

при $N \to 0$ равномерно по $n \in Z$.

Поскольку $B(b)$ обращается в нуль при $b = 0$ со своими частными производными первого порядка, то из условия, которому для $b' \le \bar{b} \le b''$ удовлетворяет функция $B(b)$,

$$|B(b') - B(b'')| = \left| \frac{\partial B(b)}{\partial b} \right|_{b=\bar{b}} |b' - b''|$$

следует, что при $|b'| < \sigma$, $|b''| < \sigma$ $(\sigma < \rho)$ справедливо неравенство

$$|B(b') - B(b'')| \le \eta(\sigma) |b' - b''|,$$

где $\eta(\sigma) \to 0$ при $\sigma \to 0$.

Для дальнейшего исследования удобно преобразовать уравнение (6) к виду

$$\Delta h_n = \varepsilon H h_n + \varepsilon Q(n, h_n, \varepsilon),$$

в котором функция $Q(n, h, \varepsilon)$ была бы малой при достаточно малых h и ε. Для этого, прежде всего, сделаем ряд замечаний относительно характера функций $B(n, b)$.

Рассмотрим функции

$$B_1(n, b) = B(n, b) - B(b)$$

и

$$\frac{\partial B_1(n, b)}{\partial b} = \frac{\partial B(n, b)}{\partial b} - \frac{\partial B(b)}{\partial b}.$$

Согласно условиям (8) и (9) имеем

$$\frac{1}{N} \sum_{k=n}^{n+N} B_1(k, b) \to 0, \; N \to \infty,$$

равномерно по $N \in Z$ для $|b| \le \rho$.

Следовательно, можно построить такие функции $\varepsilon_1(N)$, $\varepsilon_2(N)$, стремящиеся к нулю при $N \to \infty$, что будут выполняться неравенства

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{k=n}^{n+N} B_1(k, b)\right| \le \varepsilon_1(N),$$

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{k=n}^{n+N} \frac{\partial B_1(k, b)}{\partial b}\right| \le \varepsilon_2(N).$$

Построим функции

$$B_{1\eta}(n, b) = \sum_{k=-\infty}^{n} \eta^{n-k} B_1(k-1, b),$$

$$\frac{\partial B_{1\eta}(n, b)}{\partial b} = \sum_{k=-\infty}^{n} \eta^{n-k} \frac{\partial B_1(k-1, b)}{\partial b},$$

где $0 < \eta < 1$ — пока произвольный параметр. Как следует из [2], функции $B_{1\eta}(n, b)$ и $\partial B_1(n, b)/\partial b$ допускают оценку

$$|B_{1\eta}(n, b)| \le \frac{\varphi_1(\eta)}{1-\eta},$$

$$\left|\frac{\partial B_{1\eta}(n, b)}{\partial b}\right| \le \frac{\varphi_2(\eta)}{1-\eta}, \tag{10}$$

где $\varphi_i(\eta) \to 0$, $i = 1, 2$, при $\eta \to 1$ в области (7).

Произведем в (6) замену переменных

$$b = h + \varepsilon V(n, h). \tag{11}$$

Здесь

$$V(n, h) = B_{1\eta}(n, b) = \sum_{k=-\infty}^{n} \eta^{n-k} B_1(k, b).$$

Для определения области изменения h в качестве величины η возьмем некоторую функцию η_ε от параметра ε таким образом, чтобы $\eta_\varepsilon \to 1$, $\dfrac{\varepsilon}{1-\eta} \to$ $\to \text{const}$ при $\varepsilon \to 0$. Тогда $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon\dfrac{\varphi_1(\eta)}{1-\eta} \to 0$. Выберем столь малое положительное ε_1, чтобы для $\varepsilon > 0$, не превышающего ε_1, выполнялось неравенство

$$\varepsilon\frac{\varphi_1(\eta)}{1-\eta} < \rho - \rho_1,$$

где $0 < \rho_1 < \rho$.

Для $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, согласно (10) и (11), $b \in D_\rho$ при $h \in D_{\rho_1}$. Подставляя (11) в (6), получаем

$$\Delta b_n = b_{n+1} - b_n = h_{n+1} + \varepsilon V(n+1, h_{n+1}) - h_n - \varepsilon V(n, h_n) =$$
$$= \Delta h_n + \varepsilon[V(n+1, h_{n+1}) - V(n, h_n)],$$

$$V(n+1, h_{n+1}) - V(n, h_n) = V(n+1, h_{n+1}) - V(n+1, h_n) + V(n+1, n) - V(n, h_n) =$$
$$= \frac{\partial V(n+1, \tilde{h})}{\partial h}(h_{n+1} - h_n) + V(n+1, h_n) - V(n, h_n),$$

где $h_n < \tilde{h} < h_{n+1}$.

Учитывая обратимость замены (11), выражение $b = h + \varepsilon V(n, h)$ при указанных выше ε и h можно разрешить относительно h. Получим $h = C(n, b, \varepsilon)$, $C(n, b, \varepsilon) \to b$, $\varepsilon \to 0$. Поэтому, учитывая (6), имеем

$$h_{n+1} = C(n, b_{n+1}, \varepsilon) = C[n, b_n + \varepsilon H b_n + \varepsilon B(n, b_n)] =$$

$$= C[n, h_n + \varepsilon V(n, h_n) + \varepsilon H(h_n + \varepsilon V(n, h_n)) + \varepsilon B(n, h_n + \varepsilon V(n, h_n))]. \quad (12)$$

Тогда промежуточная точка $\tilde{h}$, зависящая от h_n и h_{n+1}, с учетом (12) будет зависеть только от h_n:

$$V(n+1, h) - V(n, h) = \sum_{k=-\infty}^{n+1} \eta^{n+1-k} B_1(k-1, h) - \sum_{k=-\infty}^{n} \eta^{n-k} B_1(k-1, h) =$$

$$= B_1(n, h) + \sum_{k=-\infty}^{n} (\eta^{n+1-k} - \eta^{n-k}) B_1(k-1, h) =$$

$$= B_1(n, h) + (\eta - 1) \sum_{k=-\infty}^{n} \eta^{n-k} B_1(k-1, h) = B_1(n, h) + (\eta - 1) B_1(n, h).$$

Поэтому

$$\Delta b_n = \Delta h_n + \varepsilon \left[\Delta h_n \frac{\partial V(\tilde{h})}{\partial h} + B_1(n, h_n) + (\eta - 1) B_1(n, h_n) \right] =$$

$$= \varepsilon H[h_n + \varepsilon V(n, h_n)] + \varepsilon B[n, h_n + \varepsilon V(n, h_n)]. \quad (13)$$

Из (13) имеем

$$\left(E + \varepsilon \frac{\partial V(\tilde{h})}{\partial h} \right) \Delta h_n + \varepsilon B(n, h_n) + \varepsilon(\eta - 1) B_1(n, h_n) =$$

$$= \varepsilon H h_n + \varepsilon^2 H V(n, h_n) + \varepsilon B(n, h_n + \varepsilon V(n, h_n)),$$

откуда

$$\left(E + \varepsilon \frac{\partial V(h)}{\partial h} \right) \Delta h_n = \varepsilon H h + \varepsilon^2 H V(n, h_n) + \varepsilon(1 - \eta) V(n, h_n) +$$

$$+ \varepsilon[B(n, h_n + \varepsilon V(n, h_n)) - B(n, h_n)] + \varepsilon B(h_n).$$

Вводя обозначения

$$L(n, h_n, \varepsilon) = \varepsilon H V(n, h_n) +$$

$$+ (1 - \eta) V(n, h_n) + B(n, h_n + \varepsilon V(n, h_n)) - B(n, h_n),$$

получаем

$$\left(E + \varepsilon \frac{\partial V(\tilde{h})}{\partial h} \right) \Delta h_n = \varepsilon H h_n + \varepsilon L(n, h_n, \varepsilon) + \varepsilon B(h_n). \quad (14)$$

Очевидно, выражение $L(n, h_n, \varepsilon)$ и его частные производные первого порядка по h в области $n \in Z, h \in D_{\rho_1}$ ограничены некоторой функцией от ε, стремящейся к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Согласно неравенству (10) и условию $\dfrac{\varepsilon}{1 - \eta_\varepsilon} \to \text{const}$ при $\varepsilon \to 0$ имеем

$$\left| \varepsilon \frac{\partial V(\tilde{h})}{\partial h} \right| \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

$$\frac{\varepsilon}{1-q(\varepsilon)}\lambda(\varepsilon, D)C \leq 1. \tag{24}$$

Такой выбор $D = D(\varepsilon)$ возможен, поскольку при $\varepsilon \to 0$, $D \to 0$

$$M(\varepsilon) \to 0, \quad \lambda(\varepsilon, D) \to 0, \quad \frac{\varepsilon}{1-q(\varepsilon)} \to \text{const}.$$

Тогда для $\varepsilon \leq \varepsilon_1$ согласно неравенствам (21), (22) получаем

$$|S_n(F)| \leq D(\varepsilon),$$

$$|S_n(F) - S_n(\overline{F}_n)| \leq \frac{\|F_n - \overline{F}_n\|}{2}. \tag{25}$$

Отсюда следует, что s — оператор сжатия, отображающий полное нормированное пространство $\mathfrak{M}(D)$ (его полнота следует из полноты пространства $\mathfrak{M}$-ограниченных последовательностей и замкнутости $\mathfrak{M}(D)$ в $\mathfrak{M}(D)$). Следовательно, согласно теореме Банаха уравнение

$$F = S(F) \tag{26}$$

имеет в $\mathfrak{M}(D)$ единственное решение. Обозначим его через $F = f_n$. Как следует из [3], эта последовательность и будет решением уравнения (15).

Пусть в дополнение к условиям а) – в) последовательность $Q(n, h, \varepsilon)$ почти периодическая по n, т. е. существует последовательность целых чисел $\{P_k\}$ такая, что для любого положительного $\varepsilon \leq \varepsilon_1$ последовательность $Q(n, h, \varepsilon)$ в области $n \in Z$, $h \in D_\rho$ равномерно удовлетворяет соотношению

$$|Q(n + p_k, h, \varepsilon) - Q(n, h, \varepsilon)| \to 0, \ k \to \infty.$$

Покажем, что тогда решение уравнения (15) также почти периодично, т. е. для $\varepsilon \leq \varepsilon_1$ равномерно по отношению к n

$$|f_{n+p_k} - f_n| \to 0$$

при $k \to \infty$.

Для этого снова рассмотрим некоторую последовательность F_n из класса $\mathfrak{M}(D)$, где, как и выше, $D = D(\varepsilon), D(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Имеем

$$S_{n+p}(F) - S_n(F) \leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} [\varepsilon G(n + p - j) Q(j, F_j, \varepsilon) - \varepsilon G(n - j) Q(j, F_j, \varepsilon)] =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varepsilon G(m) [Q(n - m + p, F_{n-m+p}, \varepsilon) - Q(n - m, F_{n-m}, \varepsilon)].$$

Мажорируя правую часть этого неравенства и принимая во внимание неравенства (17) и (20), получаем

$$|S_{n+p}(F) - S_n(F)| \leq \{\| Q_p - Q \| + \lambda(\varepsilon, D) \| F_p - F \|\} \frac{\varepsilon C}{1-q(\varepsilon)}, \tag{27}$$

где

$$\| Q_p - Q \| = \sup_{n \in Z} |Q(n + p, h, \varepsilon) - Q(n, h, \varepsilon)|,$$

$$\| F_p - F \| = \sup_{n \in Z} |F(n + p) - Q(n)|.$$

Пусть D и $\lambda(\varepsilon, D)$ выбраны согласно соотношениям (23) и (24). Тогда из неравенства (27) получим

$$|S_{n+p}(F)-S_n(F)| \le$$
$$\le \frac{\|F_p-F\|}{2} + \frac{\varepsilon C}{1-q(\varepsilon)}\|Q_p-Q\|. \tag{28}$$

Уравнение (26), как отмечалось выше, согласно теореме Банаха имеет единственное решение $F=f_n$, которое может быть найдено, например, методом последовательных приближений. Рассмотрим последовательно:

$$F_0 = 0, \quad F_1 = SF_0, \dots, F_{n+1} = SF_n, \dots$$

В силу неравенства (25)

$$\|F_{n+1}-F_n\| = \|SF_n-SF_{n-1}\| \le \frac{1}{2}\|F_n-F_{n-1}\|$$

имеем

$$\|F_{n+m}-F_n\| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\|F_1\|$$

и, следовательно, последовательность $\{F_n\}$ равномерно сходится к f:

$$\|F_N-f\| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}\|F_1\| \to 0,\ N\to\infty. \tag{29}$$

Вводя обозначения

$$\sigma_p = \frac{\varepsilon C}{1-q(\varepsilon)}\|Q_p-Q\|,$$

из неравенства (28) получаем

$$\|(F_1)_p-F_1\| \le \sigma_p,$$
$$\|(F_2)_p-F_2\| \le (1+1/2)\sigma_p,$$
$$\|(F_3)_p-F_3\| \le (1+1/2+1/4)\sigma_p,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

В общем случае

$$\|(F_N)_p-F_N\| \le 2\sigma_p.$$

Отсюда, переходя к пределу при $N\to\infty$, на основании (29) убеждаемся, что

$$\|(f)_p-f\| \le 2\sigma_p, \tag{30}$$

или согласно с введенными выше обозначениями имеем соотношение

$$|f_{n+p}-f_n| \le \frac{2\varepsilon C}{1-q(\varepsilon)}\|Q_p-Q\|,$$

которое выполняется для любого $p\in Z$.

Пусть $\{p_k\}$ — последовательность из Z такая, что для любого положительного $\varepsilon\le\varepsilon_1$ в области $n\in Z$, $|h|\le\rho_1$ равномерно по n выполняется соотношение (22). Тогда $\|(Q_{pk}-Q\|\to 0$, $k\to\infty$, и, следовательно, согласно неравенству (30) для всех целых чисел равномерно выполняется соотношение

$$|f_{n+pk}-f_n| \to 0, \quad p_k \to \infty.$$

3. Устойчивость полученных решений. Перейдем к рассмотрению вопроса об устойчивости полученного решения $h=f_n$ — о свойствах притяжения (или отталкивания) этим решением любых близких к нему решений системы уравнений (22).

Для этого рассмотрим уравнение

$$h_n = \sum_{j=j_0}^{\infty} \varepsilon G(n-j)Q(j,h_j,\varepsilon)+G(n-j)A, \; j_0 \le n, \tag{31}$$

где A — некоторый произвольный фиксированный вектор из R^m.

Используя для исследования уравнений (31) полученные выше оценки, нетрудно установить следующий результат: можно указать такие положительные ε_1, σ_0, σ_1, подчиненные условиям

$$\varepsilon_1 < \varepsilon_0, \; D(\varepsilon_1) < \sigma_0, \; \sigma_0 < \sigma_1 < \rho,$$

что для любого значения параметра ε и любого вектора A из R^m, удовлетворяющих неравенствам $0<\varepsilon<\varepsilon_1$, $|A|<\sigma_0$;

а) уравнение (31) при всех $n>j_0$ имеет единственное решение $h_n \in D_{\sigma_1}$;

б) для этого решения $h_n=f(j_0,n,A)$, где $f(j_0,n,A)$ — непрерывная по A функция, справедливо неравенство Липшица вида

$$|f(j_0,n,A')-f(j_0,n,A'')| \le L(\varepsilon,D)(q(\varepsilon))^{n-j_0}|A'-A''|, \tag{32}$$

где $L(\varepsilon,D) \to L$ при $\varepsilon \to L, D \to 0$.

Аналогично изложенному выше можно убедиться, что решения уравнения (31) есть и решениями уравнения (15).

Назовем решением типа S любое решение уравнения (15), для которого $h_0 \in D_{\sigma_0}$, $h_n \in D_{\sigma_1}$ для всех $n \ge j_0$.

Нетрудно показать, проводя выкладки, аналогичные проведенным в [3], что всякое решение $h=h_n$ системы (15) типа S является также решение уравнения (31) при $A=h_0$ $(h_0=h_{j_0})$, и поэтому

$$h_n = f(j_0,n,A), \quad |A|<\sigma_0. \tag{33}$$

Согласно изложенному выше решение системы (15) $h_n=f_n$ удовлетворяет условию $|f_n| \le D(\varepsilon)<\sigma_0$ и, следовательно, принадлежит типу S и является одновременно решением уравнения (31) для некоторого $A=A'$. Представим это решение в виде

$$h = f_n = f(j_0,n,A'). \tag{34}$$

Подставляя в неравенство (32) вместо одного решения решение (34), а вместо другого — произвольное решение типа S, получаем неравенство, справедливое для любого решения h_n типа S:

$$|f_n-h_n| \le L(\varepsilon,D)(q(\varepsilon))^{n-j}|f_{j_0}-h_0|. \tag{35}$$

Рассмотрим множество точек $\{h\}$ из области D_{σ_0}, для которых $h=f(j_0,n,A)$, $|A|<\sigma_0$, соответствующее данным фиксированным j_0, и обозначим его $\mathfrak{M}(j_0)$. Поскольку для любого решения типа S выполняется соотношение (33), то, положив в нем $n=j_0$, получим

$$h_0 = f(j_0,j_0,A), \; |A|<\sigma_0.$$

Следовательно, для любого решения типа S h_0 должно принадлежать $\mathfrak{M}(j_0)$.

Отсюда следует, что если для $n=j_0$ $h_n \in D_{\sigma_0}$, $h_n \in \mathfrak{M}(j_0)$, то соответствующее этим начальным значениям решение h_n не может принадлежать типу S (так как согласно изложенному выше для решения h типа S при $n=j_0$ $h_n \in \in \mathfrak{M}(j_0)$ и, следовательно, согласно определению решений типа S h_n не будет оставаться в области D_{σ_1} для $n \geq j_0$.

Покажем, что $\mathfrak{M}(j_0)$ состоит только из начальных значений решений типа S. Как отмечалось, решение уравнения (31), имеющее свойства а) и б), существование которого установлено выше, является также решением уравнения (15).

Благодаря свойству б) имеем

$$h_0 = f(j_0, j_0, A), \ |A| < \sigma_0, \tag{36}$$

а так как решение уравнения (15) определяется начальными условиями, то, очевидно, если h_n — какое-либо решение уравнения (15), для которого справедливо (36), то оно также является решением уравнения (31) и имеет свойства а) и б).

Таким образом, если для некоторого решения уравнения (15) при $n=j_0$ $h_n \in \mathfrak{M}(j_0)$, то оно принадлежит типу S, и поэтому для него выполняется неравенство (35).

Предположим, что $s=0$. Согласно определению матрицы $G(n)$ имеем $G(n) = -(\varepsilon H + E)^n$ при $n<0$ и $G(n)=0$ при $n>0$, вследствие чего уравнение (31) примет вид

$$h_n = \sum_{j=n}^{\infty} \varepsilon(\varepsilon H + E)_-^{n-j} Q(j, h_j, \varepsilon), \quad n \geq j_0,$$

в котором нет произвольного вектора A. Отсюда следует, что $\mathfrak{M}(j_0)$, состоящее из начальных условий h_n, вырождается в точку, и так как всегда $f_{j_0} \in \in \mathfrak{M}(j_0)$, то $\mathfrak{M}(j_0)$ состоит из одной точки $h_0 = f_{j_0}$.

Пусть теперь $S=n$. Тогда согласно определению (19) матрицы $G(n)$ имеем $G(n)=0$ при $n<0$, а при $n>0$ $G(n) = (\varepsilon H + E)^n$ и, следовательно, уравнение (31) примет вид

$$h_n = \sum_{j=j_0}^{\infty} \varepsilon(\varepsilon H + E)_+^n Q(j, h_j, \varepsilon) + (\varepsilon H + E)_+^{n-j_0} A, \quad j_0 < n. \tag{37}$$

Отсюда, в частности, имеем $A = h_0$. Таким образом, поскольку уравнение (37) есть тождество для любого решения уравнения (15) при любом h_0, то $\mathfrak{M}(j_0) = D_{\sigma_0}$.

Пусть, наконец, $S \neq 0$, $n - s \neq 0$. В этом случае член $G(n-j_0)A$, посредством которого вектор A входит в уравнение (31), может быть представлен в виде

$$\begin{pmatrix} (\varepsilon H + E)_+^n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} (\varepsilon H + E)_+^n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} a,$$

где

$$a = \begin{pmatrix} 1s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A$$

и $1S$ — S-мерная единичная матрица.

Отсюда можно заключить, что тождественно

$$f(j_0, n, A) = f(j_0, n, a).$$

С другой стороны, при произвольном A вектор a, определенный выше, имеет всего s независимых компонент $a_1, a_2, \ldots, a_s$, вследствие чего уравнение $h = f(j_0, j_0, A)$, характеризующее многообразие $\mathfrak{M}(j_0)$, может быть записано в виде $h = h(a_1, \ldots, a_s)$, где $h(a_1, \ldots, a_s)$ — функция s параметров, удовлетворяющая согласно (32) условию Липшица по $a_1, \ldots, a_s$.

Таким образом, $\mathfrak{M}(j_0)$ — S-мерное многообразие.

Итак, если хоть одно собственное число матрицы $(\varepsilon H + E)$ по модулю больше единицы, то рассматриваемое решение $h_n = f_n$ имеет свойство отталкивания всех близких к нему решений, за исключением решений, начальные значения которых лежат на особом точечном многообразии $\mathfrak{M}(j_0)$; при этом размерность меньше размерности всего фазового пространства. Следовательно, любое решение $h_n = f_n$ оказывается неустойчивым.

Если все собственные числа матрицы $(\varepsilon H + E)$ по модулю меньше единицы (при $\varepsilon > 0$), то найденное решение, наоборот, имеет свойство притяжения близких решений по закону

$$|h_n - f_n| \le C|h_j - f_j|(q(\varepsilon))^{n-j}. \tag{38}$$

4. Вторая теорема Н. Н. Боголюбова для системы разностных уравнений. Резюмируя изложенное выше и возвращаясь к переменной x, приходим ко второй основной теореме метода усреднения для систем разностных уравнений, которая является аналогом второй теоремы Н. Н. Боголюбова для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Теорема. *Пусть функция $X(n, x)$ в уравнении*

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n = \varepsilon X(n, x_n) \tag{39}$$

удовлетворяет условиям:

а) *усредненная система* (2) *имеет изолированное положение равновесия* $\xi = \xi_0, X_0(\xi_0) = 0$;

б) *при достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *все собственные числа матрицы* $\varepsilon \dfrac{\partial X_0(\xi_0)}{\partial x} + E$ *по модулю не равны* 1;

в) *можно указать такую* ρ-*окрестность* D_ρ *точки* ξ_0, *в которой* $X(n, x)$ *являются почти периодическими по* n *последовательностями, равномерными относительно* $x \in D_\rho$;

г) *функция* $X(n, x)$ *и ее частные производные по* x *первого порядка ограничены и равномерно непрерывны по* x *на множестве* $n \in Z$, $x \in D_\rho$;

д) *в каждой точке этой области равномерно по* $n \in Z$ *выполняется соотношение* (5).

Тогда можно указать такие положительные ε', σ_0, σ_1 *(причем* $\sigma_0 \le \sigma < \rho$*), что для любого положительного* $\varepsilon < \varepsilon'$ *будут справедливы следующие утверждения:*

1. *Уравнение* (39) *имеет единственное решение* $x = x_n^*$, *определенное на* $n \in Z$, *для которого* $|x_n^* - \xi_0| < \sigma_0, n \in Z$.

2. *Это решение почти периодическое с частотным базисом* $X(n, x)$.

3. *Можно указать такую функцию* $\delta(\varepsilon)$, *стремящуюся к нулю вместе с* $\varepsilon \to 0$, *что будет выполняться неравенство*

$$|x_n^* - \xi_0| < \delta(\varepsilon), \quad n \in Z.$$

4. *Если* x_n — *любое решение уравнения* (39), *отличное от* x_n^*, *при некотором* $n = j_0$ *удовлетворяющее неравенству*

$$|x_n - \xi_0| < \sigma_0,$$

и вещественные части всех собственных чисел матрицы (3) *по модулю меньше единицы, то разность* $|x_n - x_n^*|$ *стремится к нулю при* $n \to \infty$, *причем*

$$|x_n - x_n^*| \le C(q(\varepsilon))^{n-j}, \tag{40}$$

где C — *положительная постоянная.*

Если все собственные числа по модулю больше единицы, то можно найти $n_1 > j_0$, *для которого*

$$|x_{n_1} - \xi_0| > \sigma_1. \tag{41}$$

Если S *собственных чисел по модулю меньше единицы, а остальные больше единицы, то в* σ_0*-окрестности точки* ξ_0 *существует* S*-мерное точечное многообразие* $\mathfrak{M}(j_0)$ *такое, что из соотношения* $x_{j_0} \in \mathfrak{M}(j_0)$ *вытекает экспоненциальное стремление к нулю (при* $n \to \infty$*) разности* $|x_n - x_n^*|$, *а из соотношения* $x_j \overline{\in} \mathfrak{M}(j_0)$ *следует справедливость неравенства* (41).

***Замечание* 1.** Если функция $X(n, x)$ является периодической по n с периодом p, не зависящим от x, то предел (5) существует и

$$X_0(\xi) = \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{p} X(n, \xi),$$

а из теоремы следует, что последовательность x_n^* — периодическая с периодом p.

***Замечание* 2.** Условие б) теоремы, очевидно, выполняется, если среди собственных чисел матрицы H нет нулевых, а собственные числа матрицы $(\varepsilon H + E)$ выражаются в радикалах. Тогда проверка условия $|\lambda(\varepsilon_n)| = 1$, где $\lambda(\varepsilon_n)$ — собственные числа матрицы $(\varepsilon H + E)$, сводится к решению алгебраического уравнения m-й степени. Поэтому, очевидно, существует лишь конечный набор ε такой, что $|\lambda(\varepsilon)| = 1$. Исключив их из рассмотрения (за счет малости ε), добьемся выполнения условия $|\lambda(\varepsilon)| \ne 1$ для достаточно малых ε.

В общем же случае надлежит проверить возможность существования последовательности $\{\varepsilon_n\}, \varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$, такой, что для любого $n \in Z$ $|\lambda(\varepsilon_n)| = 1$, где $\lambda(\varepsilon_n)$ — собственные числа матрицы $(\varepsilon H + E)$. Однако, данная проблема имеет чисто алгебраический характер и ее исследования выходят за рамки настоящей работы.

1. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1971. – 440 с.
2. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. – М.: Мир, 1971. – 309 с.
3. *Гулов Х. М.* Ограниченные решения систем разностных уравнений // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложений. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1993. – С. 40–43.

Получено 13.11.95