УДК 517. 927

Р. Мустафокулов (Таджик. ун-т, Душанбе)

О НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА НА ГРАФЕ

We study the question of nondegeneracy of some boundary-value problems for a certain class of fourth order differential equations on a geometrical graph (topological net). Conditions that imply existence of the Green's function for the considered boundary-value problems are given, and the main properties of the Green's function are determined.

Досліджується питання про невиродженість деяких крайових задач для одного класу диференціальних рівнянь четвертого порядку на геометричному графі (топологічній сітці). Наводяться умови існування функції Гріна розглядуваних крайових задач, визначаються основні її властивості.

1. Связный открытый граф Γ имеет, по определению (см. [1, 2]), следующую структуру. Он состоит из набора $\{\gamma_i\}_{i=1}^m$ непересекающихся прямолинейных интервалов (ребер) и совокупности $J(\Gamma)$ некоторых их общих концов (внутренних вершин). Множество $\partial\Gamma$ остальных концов γ_i, $i=\overline{1,m}$, — граничные вершины Γ.

На графе Γ рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение

$$Ly \equiv \frac{d^2}{dx^2}\left(p(x)\frac{d^2y}{dx^2}\right) = f(x), \tag{1}$$

где функция $p(x)$ предполагается имеющей равномерно непрерывную вторую производную на каждом ребре γ_i, $i=\overline{1,m}$, и $p(x)>0$ при всех $x\in\bigcup_{i=1}^m\gamma_i = R(\Gamma)$, а $f(x)$ — равномернонепрерывная на каждом ребре γ_i, $i=\overline{1,m}$.

Под решением уравнения (1) понимается функция $y\colon \Gamma\Rightarrow R^1$, удовлетворяющая на каждом ребре γ_i уравнению

$$L_i y \equiv \frac{d^2}{dx^2}\left(p_i(x)\frac{d^2y_i}{dx^2}\right) = f_i(x), \tag{1'}$$

($y_i(\cdot)$ есть сужение $y(\cdot)$ на y_i), а во внутренних вершинах $a\in J(\Gamma)$ условиям согласования

$$\begin{gathered} y_i(a) = y_j(a), \quad i,j\in I(a), \\ y_i''(a) = 0, \quad i\in I(a), \\ \sum_{i\in X(a)}\left[(p_iy_i'')' - q_iy_i'\right](a+0) = 0. \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $I(a)$ — множество индексов ребер, примыкающих к a, $u_i'(a+0)$ означает производную функции $u_i(\cdot)$, вычисленную в точке a вдоль ребра γ_i по направлению „от a", а $q_i(a)$ — набор неотрицательных чисел, соответствующих вершине a.

Уравнение (1) на графе имеет ряд физических интерпретаций [3 – 5]. Система (1′), (2) описывает, например, малые поперечные деформации плоской решетки стержней с упругими шарнирами в промежуточных сочленениях (во внутренних вершинах $a\in J(\Gamma)$). Коэффициент $p_i(\cdot)$ характеризует реакцию на изгиб, а $f_i(\cdot)$ — интенсивность внешней нагрузки на i-е ребро. При этом условия (2) означают непрерывность шарнирного закрепления и равновесия сил, приложенных к шарниру с учетом реакции на кручение $q_i(\cdot)$ i-го ребра.

Уравнение (1) на графе Γ может быть дополнено до краевой задачи заданием каких-нибудь краевых условий на граничных вершинах $\partial\Gamma$. Ниже наряду с уравнением (1) будем рассматривать краевые условия вида

$$[(py'')-qy'](b-0)-y(b) = 0,$$
$$\beta(b)y''(b)+y'(b-0) = 0, \qquad (3)$$

заданные в каждой граничной вершине $b\in\partial\Gamma$. Здесь $u'(b-0)$ означает производную функции $u(x)$, вычисленную в точке b вдоль соответствующего ребра по направлению „к b". Всюду в дальнейшем предполагается, что $\beta\geq 0$; при этом будем считать, что $\beta(b)=\infty$ соответствует случаю, когда $y''(b)=0$ и $y'(b-0)\neq 0$. Условия (3) с этими предположениями охватывают все реально известные случаи упругого закрепления концов стержней [6].

Ниже исследуется вопрос о невырожденности краевой задачи (1)–(3) на графе Γ. Отметим, что подобный вопрос ранее был изучен лишь для уравнения второго порядка на графе (см. библиографию в [1–3]), а для уравнения четвертого порядка — в одном частном случае, когда граф состоит из цепочки натянутых стержней [7].

2. В настоящем пункте рассматривается однородное уравнение

$$Ly \equiv (py'')''(x) = 0 \qquad (4)$$

сначала на промежутке $[a,b]$ числовой оси R^1 и устанавливаются некоторые свойства его решений (аналог принципа максимума), затем эти свойства распространяются на случай, когда уравнение (4) задано на произвольном геометрическом графе Γ пространства R^n.

Лемма 1. *Пусть* $\inf_{(a,b)}p(\cdot)>0$. *Если* $y(x)\not\equiv \mathrm{const}$ *является решением однородного уравнения* (4) *в промежутке* (a,b), *удовлетворяющим граничным условиям*

$$y''(a) = 0, \qquad (5)$$

$$\beta(b)y''(b)+y'(b) = 0 \quad (\beta(b)\geq 0), \qquad (6)$$

то $y(x)$ *не имеет точек экстремума в интервале* (a,b).

Доказательство. Если $Ly(x)=0$, то $(py'')'(x)\equiv c$ $(c=\mathrm{const})$. Допустим сначала, что $c>0$. Тогда $(py'')(x)$ является возрастающей в (a,b) функцией. Поэтому в силу (5) и положительности $p(x)$ имеем $y''(x)>0$. Отсюда следует, что $y'(x)$ также является возрастающей в (a,b) функцией. Так как $y''(b)>0$, то из (6) имеем $y'(b)\leq 0$. Поэтому $y'(x)<0$ при $x\in(a,b)$, а это означает, что $y(x)$ является возрастающей в (a,b) функцией.

Аналогично показывается, что если $c<0$, то $y(x)$ является убывающей в (a,b) функцией.

Таким образом, при $c\neq 0$ функция $y(x)$ является монотонной в интервале (a,b), следовательно, не имеет точек экстремума в (a,b).

Пусть теперь $c=0$. Тогда $(py'')(x)\equiv\mathrm{const}$ при всех $x\in(a,b)$. Отсюда в силу (5) и положительности $p(\cdot)$ следует, что $y''(x)\equiv 0$ при $x\in(a,b)$. Поэтому из условия (6) следует $y'(b)=0$, если $\beta(b)<\infty$, и $y'(b)\neq 0$, если $\beta(b)=\infty$. В первом случае $y(x)\equiv\mathrm{const}$, а во втором случае $y(x)$ — линейная в (a,b) функция, следовательно, она не имеет в (a,b) точек экстремума. Лемма доказана.

При доказательстве леммы 1 определились некоторые свойства решений уравнения (4) на отрезке (a, b), которые будут использованы в дальнейшем. Сформулируем эти свойства отдельно.

Следствие. *Пусть* $y(x)$ *удовлетворяет условиям леммы* 1 *и* $c \equiv \equiv (p y'')'(x)$. *Если* $c \neq 0$, *то для любых* $x', x'' \in (a, b)$, $x' < x''$, *выполняется неравенство*

$$c[y(x'') - y(x')] < 0.$$

Если же $c = 0$, *то* $y(x) \equiv \mathrm{const}$ *при* $y'(b) = 0$ *и* $y(x)$ *— линейная в* (a, b) *функция при* $y'(b) \neq 0$.

Рассмотрим теперь однородное уравнение (4) на графе Γ. Напомним [1, 2], что ребро γ графа Γ называется плечевым, если один из его концов является граничной вершиной графа Γ. Если оба конца ребра γ являются внутренними вершинами графа Γ, то его назовем внутренним ребром Γ. Введем также следующую классификацию вершин графа Γ. Назовем вершинами нулевого ранга все граничные вершины графа Γ, вершинами первого ранга — те из внутренних вершин, к которым примыкает хотя бы одно плечевое ребро. Все оставшиеся внутренние вершины графа Γ назовем вершинами второго ранга. Рангом графа Γ назовем максимальный ранг его вершин.

Ниже всюду предполагается, что $\inf_\Gamma p(\cdot) > 0$.

Лемма 2. *Пусть в условии* (2) *коэффициент* $q(a) \neq 0$ *для любой вершины* $a \in J(\Gamma)$. *Если* $y(x) \neq \mathrm{const}$ *является решением уравнения* (4) *на графе* Γ, *удовлетворяющим в граничных вершинах* $b \in \partial\Gamma$ *условию* (6), *то* $y(x)$ *не имеет точек экстремума во внутренних точках графа* Γ.

Доказательство. Отметим прежде всего, что для решения $y(x)$ уравнения (4) на внутренних ребрах графа Γ, в силу второго равенства условий (2) и положительности $p(\cdot)$, справедливо равенство $y''(x) \equiv 0$. Поэтому $y(x)$ является линейной функцией, следовательно, она не имеет точек экстремума во внутренних ребрах графа Γ. Из леммы 1 следует, что $y(x)$ не имеет точек экстремума и в плечевых ребрах графа Γ. Для доказательства леммы 2 остается показать, что $y(x)$ не имеет экстремума также во внутренних вершинах графа Γ.

Пусть $a \in J(\Gamma)$, в которой, например, $y(a) = y_{\max}$. Тогда $y_i'(a+0) \leq 0$ вдоль каждого ребра γ_i, примыкающего к вершине a. Если a — вершина второго ранга, то в силу линейности $y(x)$ имеем $c_i \equiv (p y_i'')'(x) = 0$ для всех $i \in \in I(a)$. Поэтому последнее равенство условий (2) для этой вершины примет вид

$$\sum_{i \in I(a)} q_i(a) y_i'(a+0) = 0. \tag{7}$$

Отсюда в силу положительности $q(a)$ имеем $y_i'(a+0) = 0$ для всех $i \in I(a)$.

Если же a — вершина первого ранга, то упомянутое выше условие можно переписать в виде

$$\sum_{i \in I_1(a)} (p_i y_i'')'(a+0) = \sum_{i \in I(a)} q_i(a) y_i'(a+0), \tag{8}$$

где $I_1(a)$ — множество индексов плечевых ребер, примыкающих к вершине a. Отсюда в силу неравенства $y_i'(a+0) \leq 0$, $i \in I(a)$, и положительности $q_i(a)$ получаем

$$\sum_{i \in I_1(a)} (p_i y_i'')'(a+0) \leq 0. \tag{9}$$

Если $c_{i_0} \equiv (p_{i_0} y_{i_0}'')'(x) \neq 0$ при каком-то $i_0 \in I_1(a)$, то в силу следствия из леммы 1 имеем $c_{i_0} > 0$, что невозможно ввиду (9). Поэтому $c_i = 0$ для всех $i \in I_1(a)$. Тогда из (8) заключаем, что $y_i'(a+0) = 0$ для всех $i \in I(a)$.

Таким образом, для любой внутренней вершины $a \in J(\Gamma)$, в которой $y(a) = y_{\max}$, имеем $y_i'(a+0) = 0$ вдоль всех ребер γ_i, примыкающих к вершине a. Это означает, что $y_i(x) \equiv y_{\max}$ на всех γ_i. Но тогда $y(x)$ принимает значение $y_{\max}$ не только в вершине a, но и во всех вершинах, смежных с a. Повторяя проведенные рассуждения для каждой из этих смежных вершин, мы переберем все внутренние вершины и ребра графа Γ и получим, что $y(x) \equiv y_{\max}$ на всем Γ. Полученное противоречие с предположением $y(x) \not\equiv \text{const}$ доказывает лемму 2.

Рассмотрим теперь случай, когда в условиях леммы 2 коэффициент $q(a) = 0$ для некоторой вершины $a \in J(\Gamma)$. Если a — вершина второго ранга, то условие (7) для нее выполняется автоматически, независимо от значений $y_i'(a+0)$. Поэтому $y(x)$ в точке $x = a$ может достигать своего экстремума. Другими словами, справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. *Если в условиях леммы 2 коэффициент $q(a) = 0$ для некоторых вершин a второго ранга, то $y(x) \not\equiv \text{const}$ может иметь экстремумы как в граничных вершинах $b \in \partial\Gamma$, так и во внутренних $a \in J(\Gamma)$, для которых $q(a) = 0$.*

Пусть теперь a — вершина первого ранга. Тогда условие (8) для этой вершины примет вид

$$\sum_{i \in I_1(a)} (p_i y_i'')'(a+0) = 0. \tag{10}$$

Отсюда следует, что либо среди чисел $c_i = (p_i y_i'')'(a+0)$ имеются с противоположными знаками, либо $c_i = 0$ для всех $i \in I_1(a)$.

Рассмотрим первый случай. Пусть существуют индексы $i_1, i_2 \in I_1(a)$, для которых, например, $c_{i_1} < 0$ и $c_{i_2} > 0$. Тогда в силу следствия из леммы 1 имеем $y_{i_1}(b_1) = y_{\max}$ и $y_{i_2}(b_2) = y_{\min}$, где b_1, b_2 — граничные вершины графа, к которым примыкают ребра соответственно γ_{i_1} и γ_{i_2}. Таким образом, в рассматриваемом случае функция $y(x)$ не имеет экстремума во внутренних точках графа Γ.

Рассмотрим теперь случай, когда $c_i = 0$ для всех $i \in I_1(a)$. В этом случае опять в силу следствия из леммы 1 следует, что $y(x)$ на каждом плечевом ребре γ_i, примыкающем к a, является либо константой (при $y_i'(b-0) = 0$), либо линейной функцией (при $y_i'(b-0) \neq 0$), причем $y_i(b) \equiv y_{\max}$, если $y_i'(b-0) > 0$, и $y_i(b) \equiv y_{\min}$, если $y_i'(b-0) < 0$.

Таким образом, для графов Γ первого ранга справедливо следующее утверждение.

Лемма 4. *Пусть в условиях леммы 2 граф Γ — первого ранга и $q(a) = 0$ для внутренней вершины Γ. Тогда:*

1) *$y(x)$ не имеет экстремума во внутренних точках графа Γ, если среди чисел $c_i = (p_i y_i'')'(x), i \in I_1(a)$, имеются с противоположными знаками, либо $c_i = 0$ для всех $i \in I_1(a)$ и среди чисел $d_i = y'(b_i - 0)$ (b_i — смежные с a граничные вершины) имеются с противоположными знаками;*

2) *$y(x)$ может иметь экстремум во внутренней вершине a, где $q(a) = 0$, если все числа $d_i \neq 0$ и одного знака;*

3) $y_i(x) \equiv \mathrm{const}$ *на всех плечевых ребрах* γ_i, *примыкающих к вершине* a, *если* $d_i = 0$.

3. Рассмотрим уравнение (1) на графе Γ вместе с краевыми условиями (3).

Теорема 1. *Пусть* Γ — *произвольный граф,* $\inf_\Gamma p(x) > 0$ *и* $q(a) > 0$ *для всех* $a \in I(\Gamma)$. *Тогда краевая задача* (1)–(3) *невырождена, т. е. однозначно разрешима для любой правой части.*

Доказательство. Невырожденность краевой задачи (1)–(3) эквивалентна невырожденности системы уравнений (1′) с краевыми условиями (2), (3). Векторная двухточечная краевая задача (1′)–(3), согласно общей теории, при любых непрерывных $f_i(x)$, $i = \overline{1, m}$, имеет единственное решение, если при $f_i(x) \equiv \equiv 0$ соответствующая однородная задача имеет только тривиальное решение, или в векторной записи, однородное уравнение (4) при краевых условиях (3) имеет на графе Γ только тривиальное решение.

Решение $y(x)$ уравнения (4) в силу леммы 2 либо константа, либо достигает своего экстремума только в граничных вершинах $b \in \partial\Gamma$. Пусть $b \in \partial\Gamma$, в которой, например, $y_i(b) = y_{\max}$. Тогда $y_i(x)$ является возрастающей на соответствующем ребре $\gamma_i \in \Gamma$. Отсюда следует, что $y_i'(x) > 0$, следовательно, $y_i'(b-0) > 0$. Тогда из второго равенства условия (3) имеем $y_i''(b) < 0$. Так как $y_i''(x)$ является линейной функцией на γ_i и $y_i''(a) = 0$, то $y_i''(x)$ монотонно убывает на γ_i. Поэтому $c_i = (p_i y_i'')_i'(x) < 0$. Отсюда и из первого равенства условия (3) получаем $y_i(b) < 0$ и, так как $y_i(x)$ — возрастающая на γ_i функция, то $y_i(a) < 0$, где $a \in J(\Gamma)$ — левый конец ребра γ_i.

Аналогично показывается, что если $y(b) = y_{\max}$, то $y_i(a) > 0$. Отсюда в силу непрерывности $y(x)$ во внутренних вершинах графа получаем, что $y(x)$ в смежных с a граничных вершинах может иметь либо только максимумы, либо только минимумы.

Пусть a — вершина первого ранга графа Γ и во всех смежных с a граничных вершинах $b \in \partial\Gamma$ функция $y(x)$ имеет максимумы. Тогда $y(a) = y_{\min}$, поэтому $y_i'(a+0) > 0$ на всех плечевых ребрах γ_i, примыкающих к a, и, как было показано выше, в этом случае $c_i = (p_i y_i'')'(a+0) < 0$ для всех $i \in I(a)$. А это противоречит последнему равенству условий (2), следовательно, $y(x)$ не имеет максимумов в вершинах $b \in \partial\Gamma$. Аналогично показывается, что $y(x)$ не имеет также минимумов в граничных вершинах $b \in \partial\Gamma$. Тогда $y_i(x) \equiv \mathrm{const}$ на всех плечевых ребрах γ_i, примыкающих к вершине a. Поэтому в силу первого равенства условия (9) имеем $y(b) = 0$ для всех $b \in \partial\Gamma$, смежных с a. Так как a — произвольно выбранная внутренняя вершина графа Γ, то равенство $y(b) = = 0$ справедливо для любого $b \in \partial\Gamma$. Отсюда следует, что $y(x) \equiv 0$ на всем графе Γ, следовательно, краевая задача (1)–(3) на Γ невырождена. Теорема доказана.

В случае $q(a) = 0$ для некоторых внутренних вершин $a \in J(\Gamma)$ справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $q(a) = 0$ *для некоторых вершин второго ранга графа* Γ. *Тогда краевая задача* (1)–(3) *вырождена и размерность пространства ее решений равна числу вершин* a *второго ранга, для которых* $q(a) = 0$.

Доказательство. В силу леммы 3 решение $y(x)$ уравнения (4) может иметь экстремумы как в граничных вершинах $b \in \partial\Gamma$, так и во внутренних $a \in \in J(\Gamma)$, где $q(a) = 0$.

Аналогичными доказательству теоремы 1 рассуждениями показывается, что

$y(x)$ при условиях (3) не может иметь экстремумы в граничных вершинах $b \in \partial\Gamma$. Поэтому $y(x)$ — это любая линейная на ребрах, примыкающих к вершине a, и нулевая на остальных ребрах функция, непрерывная на всем Γ. Из таких функций строится нетривиальное решение однородной задачи (4), (3). Отсюда следует, согласно общей теории, что соответствующая неоднородная задача (1) – (3) на графе Γ является вырожденной. Теорема доказана.

Несколько по-иному обстоит дело для графов ранга один.

Теорема 3. *Пусть* Γ *является графом первого ранга и* $q(a)=0$ *для* $a \in J(\Gamma)$. *Тогда краевая задача* (1) – (3) *на графе* Γ *является невырожденной, если существует граничная вершина* $b \in \partial\Gamma$, *смежная с* a *такая, что* $y'(b-0)=0$, *и вырожденной, если* $y'(b-0) \neq 0$ *для всех* $b \in \partial\Gamma$, *смежных с* a.

Доказательство. Пусть Γ — граф первого ранга и $q(a)=0$ для $a \in J(\Gamma)$. Пусть $y(x) \not\equiv 0$ является решением краевой задачи (1) – (3). Если существуют плечевые ребра γ_{i_1} и γ_{i_2}, примыкающие к вершине a, для которых, например, $c_{i_1}<0$ и $c_{i_2}>0$, то в силу леммы 4 и следствия из леммы 1 имеем $y_{i_1}(b_1)=y_{\max}$ и $y_{i_2}(b_2)=y_{\min}$, где b_1 и b_2 — концы ребер соответственно γ_{i_1} и γ_{i_2}. Однако из первого равенства в условии (3) получаем $y_{i_1}(b_1)<0$ и соответственно $y_{i_2}(b_2)>0$, т. е. $y_{\max}<y_{\min}$, что невозможно. Полученное противоречие означает, что $c_i=0$ для всех $i \in I_1(a)$. Тогда опять из леммы 4 имеем, что экстремум функции $y(x)$ достигается в граничных вершинах, если среди чисел $y'(b_i-0)$, $b_i \in \partial\Gamma$, имеются с противоположными знаками. Пусть, например, $y'(b_{i_1}-0)>0$ и $y'(b_{i_2}-0)<0$. Тогда $y(b_{i_1})=y_{\max}$ и $y(b_{i_2})=y_{\min}$. Из первого равенства в условии (3) имеем $y(b_{i_1})<0$ и соответственно $y(b_{i_2})>0$, т. е. опять приходим к противоречию. Поэтому значения $y'(b-0)$ для всех $b \in \partial\Gamma$, смежных с a, имеют один знак. Тогда в силу леммы 4 функция $y(x)$ является линейной на всех ребрах γ_i, примыкающих к вершине a. Т. е. однородная задача (4), (3) имеет нетривиальное решение.

Пусть теперь существует граничная вершина b, смежная с a, такая, что $y'(b-0)=0$. Тогда в силу леммы 4 $y_i(x)\equiv\text{const}$ на ребре γ_i, соединяющем a с граничной вершиной b. Из первого равенства условий (3) имеем $y_i(b)=0$, поэтому $y_i(x)\equiv 0$ на ребре γ_i. Отсюда следует $y(a)=0$. Если $y'(c-0)\neq 0$ для $c \in \partial\Gamma \backslash b$, то, например, при $y'(c-0)>0$ имеем $y_{\max}=y(c)<0$, что невозможно, так как $y(a)=0$. Поэтому $y'(c-0)=0$ для всех смежных с a граничных вершин $c \in \partial\Gamma$. Следовательно, в силу леммы 4 получаем $y(x)\equiv 0$ на всем Γ. Теорема доказана.

4. Как известно, во многих сингулярных случаях краевая задача однозначно разрешима для любой правой части тогда и только тогда, когда соответствующая однородная задача имеет только тривиальное решение. Этот факт для краевой задачи (1) – (3) на графе обосновывается (см.п.3) путем перехода к эквивалентной краевой задаче (1′) – (3) для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Этим же способом обеспечивается существование функции Грина. При этом под функцией Грина краевой задачи (1) – (3) понимаем функцию двух переменных $G(x, s)$, заданную на $\Gamma\times\Gamma$ и такую, что для каждой непрерывной на Γ функции $f(x)$ решение задачи (1) – (3) может быть представлено в виде

$$y(x) = \int_{\Gamma} G(x,s)f(s)\,ds.$$

Теорема 4. *В условиях теоремы* 1 *существует функция Грина* $G(x, s)$

краевой задачи (1) – (3), *которая является единственной в классе непрерывных на* $\Gamma \times \Gamma$ *функций и имеет следующие свойства:*

1) *при каждом фиксированном* $s_0 \in \bigcup_{i=1}^{m} \gamma_i$ *функция* $g(x) = G(x, s_0)$ *удовлетворяет*

а) *однородному уравнению* (4) *внутри каждого ребра* γ_i *при* $x \# s_0$;

б) *условиям гладкости* (2) *во внутренних вершинах* $a \in J(\Gamma)$;

в) *граничным условиям* (3) *в вершинах* $b \in \partial\Gamma$;

2) *сумма производных третьего порядка функции* $g(x)$ *в точке* $x = s_0 \in \gamma_i$ *(подсчитанных в обоих направлениях „от* s_0*") равна* $-\dfrac{1}{p_i(s_0)}$.

То же утверждение справедливо для тех задач с $q(a) = 0$, *которые имеют свойство невырожденности (см. теорему* 3*).*

Отметим, что свойства 1, 2 позволяют не только изучить достаточно полно функцию Грина, но и однозначно определить ее.

Автор выражает искреннюю благодарность профессору Ю. В. Покорному за постановку задачи и ценные советы.

1. *Пенкин О. М., Покорный Ю. В.* О краевой задаче на графе // Дифференц. уравнения. – 1988. – **24**, № 4. – С. 701–703.
2. *Покорный Ю. В., Карелина И. Г.* О функции Грина задачи Дирихле на графе // Докл. АН СССР. – 1991. – **318**, № 3. – С. 542–544.
3. *Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Провоторова Е. Н.* Краевые задачи / Об одной векторной краевой задаче. – Пермь: Перм. политехн. ин-т, 1983. – С. 64–70.
4. *Nicaise S.* Estimée du spectre du laplacien sur un réseau topologique fini // C. R. Sc. Paris. Ser. A. – 1986. – **303**, № 8. – P. 343–346.
5. *Павлов Б. С., Фадеев Л. Д.* Модель свободных электронов и задача рассеяния // Теорет. и мат. физика. – 1983. – **55**, № 2. – С. 257–269.
6. *Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г.* Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. – М.; Л.: Гостехиздат, 1950. – 359 с.
7. *Покорный Ю. В., Лазарев К. П.* Некоторые осцилляционные теоремы для многоточечных задач // Дифференц. уравнения. – 1987. – **23**, № 4. – С. 658–670.

Получено 21.09.94