УДК 517. 968

С. Г. Солодкий (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

СЛОЖНОСТЬ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА II РОДА С ЯДРАМИ ИЗ АНИЗОТРОПНЫХ КЛАССОВ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

We find an exact order of complexity of solving Fredholm equations with periodic kernels, which have a dominated mixed partial derivative.

Знайдено точний порядок складності наближеного розв'язування рівнянь Фредгольма з періодичними ядрами, що мають домінуючу мішану частинну похідну.

1. Пусть L_2 — пространство суммируемых в квадрате на $(0, 2\pi)$ функций $f(t)$ с обычной нормой $\|f\| = \left\{ \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, dt \right\}^{1/2}$, а L_2^r, $r = 1, 2, \ldots$, — пространство 2π-периодических функций $f(t)$, у которых $f^{(r-1)}$-я производная абсолютно непрерывна на $[0, 2\pi]$, и $f^{(r)} \in L_2$. При этом норма в L_2^r определяется соотношением $\|f\|_r = \|f\| + \|f^{(r)}\|$. Шар радиуса γ в L_2^r с центром в нуле будем обозначать через $L_{2,\gamma}^r$. Через S_n обозначим частные суммы ряда Фурье функции $f \in L_2$, задаваемые соотношением

$$S_n f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(1/2 + \sum_{k=1}^{n} \cos k(t - \tau) \right) f(\tau) \, d\tau.$$

Пусть $W_2^{r,s}$, $r, s = 1, 2, \ldots$, — линейное пространство 2π-периодических по каждой переменной функций $h(t, \tau)$, частные производные $h^{(i,j)}(t, \tau) = \partial^{i+j} h(t, \tau) / \partial t^i \partial \tau^j$, $i = 0, 1, \ldots, r$, $j = 0, 1, \ldots, s$, которых непрерывны на $Q = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, а

$$W_{2,\alpha}^{r,s} = \left\{ h : h \in W_2^{r,s}, \ \|h\|_{r,s} := \sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{s} \left(\int_Q (h^{(i,j)}(t,\tau))^2 \, dt d\tau \right)^{1/2} \le \alpha \right\}.$$

Обозначим через $\mathcal{H}^{r,s} = \mathcal{H}^{r,s}(\alpha, \beta)$ класс интегральных операторов H из L_2 в L_2 вида

$$H f(t) = \int_0^{2\pi} h(t, \tau) f(\tau) \, d\tau,$$

для которых $\|(I - H)^{-1}\|_{L_2 \to L_2} \le \beta$ (I — тождественный оператор), а ядра $h(t, \tau)$ принадлежат классу $W_{2,\alpha}^{r,s}$. Класс уравнений Фредгольма II рода

$$z = Hz + f \tag{1}$$

с операторами $H \in \mathcal{H}^{r,s}(\alpha, \beta)$ и свободными членами $f \in L_{2,\gamma}^r$ будем обозначать через $\Psi^{r,s} = \Psi^{r,s}(\alpha, \beta, \gamma)$.

Под способом задания информации об уравнениях класса $\Psi^{r,s}$ будем понимать произвольный набор $T = \{\delta_i\}_{i=1}^m$ непрерывных функционалов, из которых $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$ определены на множестве $\mathcal{H}^{r,s}$, а $\delta_{k+1}, \ldots, \delta_m$ — на множестве L_2^r. Через $\mathcal{T}_M$ обозначим совокупность всех таких наборов T, состоящих не более чем из M функционалов. При фиксированном наборе каждому уравнению (1) ставится в соответствие числовой вектор

$$T(H,f) = (\delta_1(H), \dots, \delta_k(H), \delta_{k+1}(f), \dots, \delta_m(f)), \tag{2}$$

называемый информацией об уравнении (1).

Под алгоритмом A приближенного решения уравнений из $\Psi^{r,s}$ будем понимать оператор, сопоставляющий вектору (2) в качестве приближенного решения уравнения (1) такую функцию $A(T(H,f)) \in L_2$, которую можно однозначно задать некоторым числовым вектором. При этом для построения $A(T(H,f))$, т. е. для вычисления компонент этого вектора, допускается выполнение лишь некоторого конечного числа элементарных операций (э.о.). (К э.о. относим простейшие арифметические и логические операции.) Через $\mathcal{A}_N(T)$ обозначим множество алгоритмов A, которые используют информацию $T(H,f)$ и требуют для построения $A(T(H,f))$ выполнения не более N э.о. над компонентами $T(H,f)$. Рассматривая алгоритмы из $\mathcal{A}_N(T)$, естественно полагать, что $T \in \mathcal{T}_N$. Как обычно, погрешностью алгоритма A на классе $\Psi^{r,s}$ будем называть величину

$$e(\Psi^{r,s}, A) = \sup_{\substack{z=Hz+f \\ H\in\mathcal{H}^{r,s},\ f\in L_{2,\gamma}^r}} \| z - A(T(H,f)) \|.$$

Величина

$$E_N(\Psi^{r,s}) = \inf_{T\in\mathcal{T}_N} \inf_{A\in\mathcal{A}_N(T)} e(\Psi^{r,s}, A)$$

показывает, какую минимальную погрешность можно получить на классе $\Psi^{r,s}$, выполнив N э.о. Таким образом, величина $E_N(\Psi^{r,s})$ характеризует сложность приближенного решения уравнений из $\Psi^{r,s}$.

Проблеме оптимизации в смысле величины E_N алгоритмов решения уравнений II рода были посвящены работы [1–5]. При этом в статьях [1, 2, 4] изучались уравнения Фредгольма с ядрами из соболевских классов, в [5] исследовались классы уравнений Вольтерра с бесконечно дифференцируемыми ядрами, а в [3] рассматривались уравнения Фредгольма с ядрами из изотропных классов дифференцируемых функций с доминирующей смешанной частной производной, т. е. уравнения из классов $\Psi^{r,r}$. Отметим, что использованный в работе [3] подход не может быть обобщен на случай произвольных r и s для анизотропных классов $\Psi^{r,s}$, исследованию сложности которых и посвящена настоящая статья. Однако общая идея использования так называемого гиперболического креста заимствована нами из [3].

2. Как обычно, под номером коэффициента Фурье вида

$$\int_Q h(t,\tau) \cos\left(it - \frac{\pi\xi}{2}\right) \cos\left(j\tau - \frac{\pi\eta}{2}\right) dt\,d\tau, \quad i,j = 0, 1, \dots, \ \xi, \eta = 0, 1,$$

будем понимать точку на плоскости с целочисленными координатами $((-1)^\xi i, (-1)^\eta j)$. Рассмотрим способ задания информации T_M об уравнениях (1) из класса $\Psi^{r,s}$, определяемый набором функционалов

$$T_M(H,f) = \left\{ \int\limits_Q h(t,\tau)\cos\left(it-\frac{\pi\xi}{2}\right)\cos\left(j\tau-\frac{\pi\eta}{2}\right)dt\,d\tau,\ \int\limits_0^{2\pi} f(t)\cos\left(it-\frac{\pi\xi}{2}\right)dt \right\},$$

$$i,j=0,1,\ldots,\ \xi,\eta=0,1,\ ij^{1+s/r}\le M. \tag{3}$$

В набор T_M входят коэффициенты Фурье ядер $h(t,\tau)$ с номерами из гиперболического креста

$$\Gamma_M^{r,s} = \left\{(t,\tau)\colon |t\tau^{1+s/r}|\le M,\ |t|\le M,\ |\tau|\le M^{r/(r+s)}\right\}.$$

Через $c, c_0, c_1, \ldots$ обозначим различные константы, зависящие только от параметров $\alpha, \beta, \gamma, r, s$, входящих в определение класса $\Psi^{r,s}$. Всюду в дальнейшем запись $a_n \prec b_n$ означает, что существует постоянная c_0, при которой неравенство $a_n \le c_0 b_n$ справедливо для всех $n \ge n_0$. Запись $a_n \asymp b_n$ означает, что $a_n \prec b_n$ и $b_n \prec a_n$. Как легко видеть,

$$T_M \in \mathcal{T}_N,\quad N \asymp M. \tag{4}$$

Поставим в соответствие каждому оператору $H \in \mathcal{H}^{r,s}$ конечномерный оператор

$$H_M\varphi(t) = \int\limits_0^{2\pi} h_M(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau,$$

где

$$h_M(t,\tau) = (2\pi)^{-2}\int\limits_Q h(u,v)\,du\,dv + (2\pi^2)^{-1}\sum_{i=1}^{M}\int\limits_Q \cos i(t-u)h(u,v)\,du\,dv +$$

$$+(2\pi^2)^{-1}\sum_{j=1}^{[M^{r/(r+s)}]}\int\limits_Q \cos j(\tau-v)h(u,v)\,du\,dv +$$

$$+\pi^{-2}\sum_{ij^{1+s/r}\le H}\int\limits_Q \cos i(t-u)\cos j(\tau-v)h(u,v)\,du\,dv$$

— частная сумма ряда Фурье ядра оператора H с гармониками из гиперболического креста $\Gamma_M^{r,s}$ ($[a]$ — целая часть числа a).

Лемма 1. *Для произвольного* $H \in \mathcal{H}^{r,s}$ *имеем*

$$\|H-H_M\|_{L_2\to L_2} \le c_1 M^{-rs/(r+s)}, \tag{5}$$

$$\|H-H_M\|_{L_2^r\to L_2} \le c_2 M^{-r}. \tag{6}$$

Доказательство. Докажем неравенство (6). Соотношение (5) доказывается аналогично.

Рассмотрим произвольный элемент $f \in L_2^r$. Учитывая определение H_M и используя разложения функций f и Hf в ряды Фурье, которые для $f \in L_2^r$ и $H \in \mathcal{H}^{r,s}$ сходятся абсолютно и равномерно, получаем

$$\|(H-H_M)f\| \le$$

$$\leq \left\| \pi^{-2} \sum_{ij^{1+s/r}>M} \int_0^{2\pi} \cos i(t-u) \left(\int_Q h(u,v) f(\tau) \cos j(\tau - v)\, dv d\tau \right) du \right\| +$$

$$+ \left\| (2\pi^2)^{-1} \sum_{i=M+1}^{\infty} \int_0^{2\pi} f(\tau)\, d\tau \int_Q h(u,v) \cos i(t-u)\, dv du \right\| +$$

$$+ \left\| (2\pi^2)^{-1} \sum_{j=[M^{r/(r+s)}]+1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \left(\int_Q h(u,v) f(\tau) \cos j(\tau - v)\, dv d\tau \right) du \right\|. \qquad (7)$$

Оценим в (7) лишь первое слагаемое (остальные оцениваются аналогично). Интегрируя по частям, находим

$$\int_0^{2\pi} \cos i(t-u) \left(\int_Q h(u,v) f(\tau) \cos j(\tau - v)\, dv d\tau \right) du =$$

$$= i^{-(r+s)} \int_Q \left(\int_0^{2\pi} \cos i(t-u) h^{(0,s)}(u,v)\, du \right) \cos\left(j(\tau - v) - \frac{\pi(r+s)}{2} \right) f^{(r)}(\tau)\, d\tau dv =$$

$$= (ij^{1+s/r})^{-r} \int_0^{2\pi} \cos\left(i(t-u) - \frac{\pi r}{2} \right) \times$$

$$\times \left(\int_Q h^{(r,s)}(u,v) \cos\left(j(\tau - v) - \frac{\pi(r+s)}{2} \right) f^{(r)}(\tau)\, d\tau dv \right) du.$$

Тогда

$$F := \left\| \pi^{-2} \sum_{ij^{1+s/r}>M} \int_0^{2\pi} \cos i(t-u) \left(\int_Q h(u,v) f(\tau) \cos j(\tau - v)\, dv d\tau \right) du \right\| =$$

$$= \left\| \int_0^{2\pi} f^{(r)}(\tau) \left[\pi^{-2} \sum_{ij^{1+s/r}>M} (ij^{1+s/r})^{-r} \int_Q h^{(r,s)}(u,v) \cos\left(i(t-u) - \frac{\pi r}{2} \right) \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \cos\left(j(\tau - v) - \frac{\pi(r+s)}{2} \right) du dv \right] d\tau \right\|.$$

Выражение, стоящее в последнем соотношении под знаком нормы, есть образ $f^{(r)}$ при действии интегрального оператора, ядром которого является сумма в квадратных скобках. Используя известную оценку нормы интегрального оператора из L_2 в L_2 через норму ядра [6, с. 419] и тот факт, что величина $\| h^{(r,s)} \|^2_{L_2(Q)}$ равна сумме квадратов коэффициентов Фурье $h^{(r,s)}(u,v)$, окончательно будем иметь

$$F \leq \| f^{(r)} \| \left\{ \int_Q \left[\pi^{-2} \sum_{ij^{1+s/r}>M} (ij^{1+s/r})^{-r} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \int_Q h^{(r,s)}(u,v) \cos\left(i(t-u) - \frac{\pi r}{2} \right) \cos\left(j(\tau - v) - \frac{\pi(r+s)}{2} \right) du dv \right]^2 dt d\tau \right\}^{1/2} \leq$$

$$\leq M^{-r}\|f^{(r)}\|\,\|h^{(r,s)}\|_{L_2(Q)} \leq \alpha M^{-r}\|f\|_r .$$

Из последнего неравенства этой формулы вытекает утверждение леммы 1.

Лемма 2. *При* $n \asymp M^{1/3}$ *имеем*

$$\|H_M - H_M S_n\|_{L_2 \to L_2} \leq \begin{cases} c_3 M^{-s/3}, & r \geq s/2; \\ c M^{-rs/(r+s)}, & r \leq s/2, \end{cases} \tag{8}$$

$$\|H_M - H_M S_n\|_{L_2^r \to L_2} \leq \begin{cases} c_4 M^{-(r+s)/3}, & r \geq s/2; \\ c M^{-r}, & r \leq s/2. \end{cases} \tag{9}$$

Доказательство. Докажем неравенство (9) при $r \geq s/2$. Остальные соотношения доказываются аналогично.

Заметим прежде всего, что для любого $H \in \mathcal{H}^{r,s}$

$$\|H - H S_n\|_{L_2 \to L_2} = \|H^* - S_n H^*\|_{L_2 \to L_2} \leq$$
$$\leq \|H^*\|_{L_2 \to L_2^s} \|I - S_n\|_{L_2^s \to L_2} \leq c\alpha n^{-s}.$$

Тогда

$$\|H - H S_n\|_{L_2^r \to L_2} = \|(H - H S_n)(I - S_n)\|_{L_2^r \to L_2} \leq$$
$$\leq \|H - H S_n\|_{L_2 \to L_2} \|I - S_n\|_{L_2^r \to L_2} \leq c_5 n^{-(r+s)}.$$

В силу леммы 1 и последнего соотношения имеем

$$\|H_M - H_M S_n\|_{L_2^r \to L_2} \leq \|H - H_M\|_{L_2^r \to L_2} + \|H - H S_n\|_{L_2^r \to L_2} +$$
$$+ \|(H - H_M) S_n\|_{L_2^r \to L_2} \leq c_2 M^{-r} + c_5 n^{-(r+s)} + \|H - H_M\|_{L_2^r \to L_2} +$$
$$+ \|H - H_M\|_{L_2 \to L_2} \|I - S_n\|_{L_2^r \to L_2} \leq c_4 M^{-(r+s)/3}.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть* $\varphi(t)$ — *произвольный тригонометрический многочлен порядка не выше* M. *Тогда для представления тригонометрического многочлена* $H_M \varphi(t)$ *в стандартном виде*

$$a_0 + \sum_{k=1}^{M} a_k \cos kt + b_k \sin kt \tag{10}$$

требуется выполнить не более $O(M)$ *э.о. над коэффициентами Фурье ядра оператора* $H \in \mathcal{H}^{r,s}$ *и коэффициентами многочлена* $\varphi(t)$.

Доказательство. Пусть

$$\varphi(t) = x_0 + \sum_{k=1}^{M} x_k \cos kt + y_k \sin kt.$$

Из определения оператора H_M следует, что

$$H_M(y_k \sin kt) = y_k \Bigg(\frac{1}{2\pi} \int_Q h(u,v) \sin kv \, du dv +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{l=1}^{[k^{M(1+s/r)^{-1}}]} \cos lt \int_Q h(u,v) \cos lu \sin kv \, du dv + \sin lt \int_Q h(u,v) \sin lu \sin kv \, du dv \Bigg).$$

Таким образом, для представления многочлена $H_M(y_k \sin kt)$ в виде (10) нужно выполнить не более $2[Mk^{-(1+s/r)}]+1$ операций умножения. Аналогично для представления $H_M(x_k \cos kt)$ в виде (10) нужно выполнить $2[Mk^{-(1+s/r)}]+1$ операций. Это означает, что число э.о., которые нужно выполнить для представления всех многочленов

$$x_k H_M \cos kt,\ y_k H_M \sin kt, \quad k = 1, 2, \ldots, M, \tag{11}$$

в виде (10) не превышает величину

$$p = \sum_{k=1}^{M} \left(4[Mk^{-(1+s/r)}] + 2 \right) \leq 4M \sum_{k=1}^{M} k^{-(1+s/r)} + 2M \leq cM.$$

Для завершения доказательства остается заметить, что после представления всех многочленов (11) в виде (10) для перехода от представления

$$H_M \varphi(t) = H_M x_0 + \sum_{k=1}^{M} x_k H_M \cos kt + y_k H_M \sin kt$$

к представлению (10) (т.е. для приведения подобных членов) нужно выполнить еще $O(M)$ э.о.

3. Для произвольного уравнения (1) из $\Psi^{r,s}$ определим последовательность элементов

$$z_0 = 0,\ z_k = z_{k-1} + (I - H_M S_n)^{-1} (H_M z_{k-1} - z_{k-1} + S_M f), \tag{12}$$

$$k = 1, 2, \ldots,\ n \asymp M^{1/3}.$$

Для построения элементов $z_1, z_2, \ldots$ достаточно иметь информацию $T_M(H, f)$ (3) и решить уравнение невязки

$$\varepsilon_k = H_M S_n \varepsilon_k + (H_M z_{k-1} - z_{k-1} + S_M f),\ \ k = 1, 2, \ldots,$$

$$z_k = z_{k-1} + \varepsilon_k.$$

Рассмотрим теперь алгоритм A_M, где $A_M(T_M, H, f) = z_{k^*}, k^* = l, (l-1)s/2 < r \leq ls/2$. Подсчитаем число э.о., которое нужно выполнить для представления z_{k^*} в виде тригонометрического многочлена (10) порядка M.

Прежде всего отметим, что в силу определения H_M для $\xi, \eta = 0, 1$

$$\int_0^{2\pi} \cos\left(i\tau - \frac{\xi\pi}{2}\right) H_M \cos\left(j\tau - \frac{\eta\pi}{2}\right) d\tau =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos\left(i\tau - \frac{\xi\pi}{2}\right) H \cos\left(j\tau - \frac{\eta\pi}{2}\right) d\tau & \text{при} \quad ((-1)^{\xi} i, (-1)^{\eta} j) \in \Gamma_M^{r,s}; \\ 0 & \text{при} \quad ((-1)^{\xi} i, (-1)^{\eta} j) \notin \Gamma_M^{r,s}. \end{cases}$$

Если функцию $\varepsilon_k(t)$ определять из уравнения

$$\varepsilon_k(t) = H_M \left(x_0 + \sum_{i=1}^{M} x_i \cos it + y_i \sin it \right) + H_M z_{k-1}(t) - z_{k-1}(t) + S_M f(t), \tag{13}$$

то для нахождения неизвестных коэффициентов x_i, y_i получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$x_0 = \frac{1}{2\pi}\left(\sum_{j=0}^{n} x_j \int_0^{2\pi} H\cos j\tau\, d\tau + \sum_{j=1}^{n} y_j \int_0^{2\pi} H\sin j\tau\, d\tau + \int_0^{2\pi} g_k(\tau)\, d\tau\right),$$

$$x_i = \frac{1}{\pi}\left(\sum_{j=0}^{n_i} x_j \int_0^{2\pi} \cos i\tau H\cos j\tau\, d\tau + \sum_{j=1}^{n_i} y_j \int_0^{2\pi} \sin i\tau H\sin j\tau\, d\tau + \int_0^{2\pi} g_k(\tau)\cos i\tau\, d\tau\right), \tag{14}$$

$$y_i = \frac{1}{\pi}\left(\sum_{j=1}^{n_i} x_j \int_0^{2\pi} \cos i\tau H\cos j\tau\, d\tau + \sum_{j=1}^{n_i} y_j \int_0^{2\pi} \sin i\tau H\sin j\tau\, d\tau + \int_0^{2\pi} g_k(\tau)\sin i\tau\, d\tau\right),$$

$$i = 1, 2, \ldots, n,\ n_i = n \text{ при } r \ge s \text{ и } n_i = \min\{n, (M/i)^{r/(r+s)}\} \text{ при } r \le s,$$

$$g_k(t) = H_M z_{k-1}(t) - z_{k-1}(t) + S_M f(t).$$

Заметим теперь, что если нам известны функционалы из $T_M(H, f)$, то для решения системы (14) при $k = 1$ $(g_1(t) = S_M f(t))$ требуется выполнить не более $cn^3 \asymp M$ э.о. Далее, как следует из леммы 3, для перехода от представления $\varepsilon_1(t)$ в виде (13) к стандартному виду (10) необходимо выполнить еще $O(M)$ э.о.. Затем нужно представить функцию $g_2(t)$ в виде

$$g_2(t) = H_M z_1(t) - z_1(t) + S_M f(t) = a_0 + \sum_{i=1}^{M} a_i \cos it + b_i \sin it$$

(это потребует также $O(M)$ э.о.). После этого для $k = 2, 3, \ldots, k^*$ мы повторяем схему, описанную выше. Таким образом, справедлива следующая лемма.

Лемма 4. *При алгоритме* A_M *для представления приближенного решения* $A_M(T_M, H, f) = z_{k^*}$, $k^* = l$, $(l-1)s/2 < r \le ls/2$ *любого уравнения из* $\Psi^{r,s}$ *в виде* (10) *требуется выполнить не более* $O(M)$ *э.о. над значениями функционалов из набора* T_M.

4. Оценим теперь погрешность алгоритма A_M на классе уравнений $\Psi^{r,s}$. Поставим в соответствие каждому уравнению (1) уравнение

$$\hat{z} = H_M \hat{z} + S_M f. \tag{15}$$

Из соотношений (5) и (8), а также из теоремы о разрешимости приближенного уравнения [6, с. 517] следует, что для любого оператора $H \in \mathcal{H}^{r,s}$

$$\|(I - H_M)^{-1}\|_{L_2\to L_2} \le \frac{\|(I-H)^{-1}\|_{L_2\to L_2}}{1 - \|(I-H)^{-1}\|_{L_2\to L_2}\|H - H_M\|_{L_2\to L_2}} \le$$

$$\le \frac{\beta}{1 - \beta c_1 M^{-rs/(r+s)}} \le c_6, \tag{16}$$

$$\|(I - H_M S_n)^{-1}\|_{L_2\to L_2} \le \frac{c_6}{1 - c_6\|H_M - H_M S_n\|_{L_2\to L_2}} \le c_7. \tag{17}$$

Для произвольных $H \in \mathcal{H}^{r,s}$ и $f \in L^r_{2,\gamma}$ справедлива оценка

$$\|z\|_r = \|Hz + f\|_r = \|H(I-H)^{-1}f + f\|_r \le$$

$$\le \|H\|_{L_2\to L_2^r}\|(I-H)^{-1}\|_{L_2\to L_2}\|f\| + \|f\|_r \le \gamma(\alpha\beta + 1). \tag{18}$$

Учитывая (6), (16), (18), имеем

$$\| z - \hat{z} \| = \| (I - H_M)^{-1}(f - S_M f + (H - H_M)z) \| \le c_8 M^{-r}. \tag{19}$$

Заметим, что решение $\hat{z}$ уравнения (15) при любых $k = 1, 2, \ldots$ имеет вид

$$\hat{z} = z_{k-1} + (I - H_M)^{-1}(H_M z_{k-1} - z_{k-1} + S_M f). \tag{20}$$

Из (12) и (20) получаем

$$\hat{z} - z_k = \{(I - H_M)^{-1} - (I - H_M S_n)^{-1}\}(I - H_M)(\hat{z} - z_{k-1}) =$$

$$= \{I - (I - H_M S_n)^{-1}(I - H_M)\}(\hat{z} - z_{k-1}) = (I - H_M S_n)^{-1}(H_M - H_M S_n)(\hat{z} - z_{k-1}). \tag{21}$$

Отсюда следует

$$\| \hat{z} - z_k \| \le \| (I - H_M S_n)^{-1} \|^{k-1}_{L_2 \to L_2} \| H_M - H_M S_n \|^{k-1}_{L_2 \to L_2} \| \hat{z} - z_1 \|. \tag{22}$$

Рассмотрим случай $r > s/2$. Тогда из (21) $(k = 1)$, (8), (9), (17) – (19) находим

$$\| \hat{z} - z_1 \| \le \| (I - H_M S_n)^{-1}(H_M - H_M S_n)\hat{z} \| \le$$

$$\le c_7 \| (H_M - H_M S_n)z \| + c_7 \| (H_M - H_M S_n)(z - \hat{z}) \| \le$$

$$\le c_4 c_7 \gamma(\alpha\beta + 1) M^{-(r+s)/3} + c_3 c_7 c_8 M^{-r-s/3} \le c_9 M^{-(r+s)/3}.$$

В силу последнего соотношения и оценок (19), (22) $(k = k^*)$ получаем

$$\| z - A_M(T_M, H, f) \| = \| z - z_{k^*} \| \le \| z - \hat{z} \| + \| \hat{z} - z_{k^*} \| \le$$

$$\le c_8 M^{-r} + (c_3 c_7)^{k^*-1} c_9 M^{-(r+s)/3 - s(k^*-1)/3} \prec M^{-r}.$$

Таким образом, при $r > s/2$ справедлива оценка

$$e(\Psi^{r,s}, A_M) \prec M^{-r}. \tag{23}$$

В случае $r \le s/2$ соотношение (23) устанавливается аналогично.

Теорема 1. *При* $r, s = 1, 2, \ldots$ $E_N(\Psi^{r,s}) \asymp N^{-r}$. *Оптимальный порядок величины* E_N *реализуют способ задания информации* T_M *и алгоритм* A_M.

Доказательство. Для получения оценки снизу $E_N(\Psi^{r,s}) \succ N^{-r}$ достаточно повторить рассуждения, приведенные в [7] при доказательстве соотношений (8), (9). Эти рассуждения основаны на оценке $a_n(L^r_{2,\gamma}, L_2) \ge N^{-r}$ [8, с. 247] для поперечника Александрова a_N. Оценка сверху следует из леммы 3, формул (4) и (23). Теорема доказана.

1. *Переверзев С. В.* О сложности задачи нахождения решений уравнений Фредгольма II рода с гладкими ядрами. I // Укр. мат. журн. – 1988. – **40**, № 1. – С. 89–91.
2. *Переверзев С. В.* О сложности задачи нахождения решений уравнений Фредгольма II рода с гладкими ядрами. II // Там же. – 1989. – **41**, № 2. – С. 189–193.
3. *Переверзев С. В.* Гиперболический крест и сложность приближенного решения интегральных уравнений Фредгольма II рода с дифференцируемыми ядрами // Сиб. мат. журн. – 1991. – **32**, № 1. – С. 107–115.
4. *Pereversev S. V., Scharipov C. C.* Information complexity of equations of the second kind with compact operators in Hilbert space // J. Complexity. – 1992. – **8**. – p. 176–202.
5. *Солодкий С. Г.* Оптимизация алгоритмов приближенного решения уравнений Вольтерра с бесконечно дифференцируемыми ядрами // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 11. – С. 1534–1545.
6. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 744 с.
7. *Переверзев С. В.* Об оптимизации адаптивных методов приближенного решения интегральных уравнений с дифференцируемыми ядрами // Укр. мат. журн. – 1986. – **38**, № 1. – С. 55–63.
8. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближения. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 304 с.

Получено 04.01.95