УДК 517.5

С. Б. Вакарчук (Ин-т геотехн. механики НАН Украины, Днепропетровск)

О ТОЧНЫХ ПОРЯДКОВЫХ ОЦЕНКАХ НЕКОТОРЫХ n-ПОПЕРЕЧНИКОВ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ, АНАЛИТИЧЕСКИХ В ОДНОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

In the spaces $E_q(\Omega)$, $1 < q < \infty$, which were introduced by V. I. Smirnov, we obtain exact order estimates of projective and spectral n-widths of the classes $W^r E_p(\Omega)$ and $W^r E_p(\Omega)\,\Phi$ when p and q are not equal. Extremal subspaces and operators are found for these approximations.

У просторах $E_q(\Omega)$, $1 < q < \infty$, які були введені В. І. Смирновим, одержано точні порядкові оцінки проекційного та спектрального n-поперечників класів $W^r E_p(\Omega)$ та $W^r E_p(\Omega)\,\Phi$ при неспівпадаючих p та q, а також вказано екстремальні підпростори та оператори для розглянутих апроксимативних величин.

Пусть Ω — односвязная область комплексной плоскости $\mathbb{C}$, ограниченная спрямляемой замкнутой жордановой кривой γ, причем дополнением к $\overline{\Omega} = \Omega \cup \gamma$ служит односвязная область G, содержащая точку $z = \infty$. Полагаем, что γ является кривой Ляпунова с показателем 1, а $E_p(\Omega)$, $p \ge 1$, есть банахово пространство В. И. Смирнова аналитических в Ω функций $f(z)$, имеющих почти всюду на γ угловые граничные значения, для которых $\|f\|_{E_p} = \left\{\int_\gamma |f(\xi)|^p |d\xi|\right\}^{1/p} < \infty$.

Под $W^r E_p(\Omega)$, $r \in \mathbb{N}$, $p \ge 1$, понимаем класс функций $f(z) \in E_p(\Omega)$, r-е производные которых $f^{(r)}(z)$ принадлежат $E_p(\Omega)$ и удовлетворяют условию $\|f\|_{E_p} \le 1$ [1–3].

Пусть $\Phi(x)$, $x > 0$, — неотрицательная неубывающая функция, для которой $\lim\limits_{x\to 0} \Phi(x) = \Phi(0) = 0$, $\omega(f,h)_p = \sup\left\{\left[\int\limits_\gamma |f(z(s+\sigma)) - f(z(s))|^p\, ds\right]^{1/p} : |\sigma| \le h\right\}$ — интегральный модуль непрерывности функции $f(z) \in E_p(\Omega)$ на кривой γ; $z(s)$ — натуральное уравнение γ; s — длина дуги кривой, отсчитываемая от некоторой фиксированной точки на γ. Через $W^r E_p(\Omega)\,\Phi$, $r \in \mathbb{N}$, $p \ge 1$, обозначим класс функций $f(z) \in E_p(\Omega)$, у которых интегральные модули непрерывности r-х производных $f^{(r)}(z) \in E_p(\Omega)$ удовлетворяют условию [2] $(m/4)\int_0^{\pi/m} \omega(f^{(r)},h)_p\, dh \le \Phi(\pi/m)$; $m \in \mathbb{N}$.

Пусть при всех $0 \le x < \pi$ для мажорирующей функции $\Phi(x)$ справедливы неравенства

$$\frac{\Phi(\lambda x)}{\Phi(x)} \ge \begin{cases} \dfrac{2}{\lambda}\sin^2(\pi\lambda/4), & \text{если } 0 < \lambda \le 1; \\ \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{\lambda}\left(\dfrac{\pi}{2} - 1\right), & \text{если } \lambda \ge 1. \end{cases} \qquad (1)$$

В [1, 2] получены точные порядковые оценки колмогоровского, линейного, бернштейновского и александровского n-поперечников классов $W^r E_p(\Omega)$ и

$W^r E_p(\Omega)\Phi$ (при выполнении условий (1)) в метрике пространства $E_q(\Omega)$ при $p \neq q$. Заметим, что соотношениям (1) удовлетворяет, например, функция $\Phi(x) = x^{\pi/2-1}$. Вопросы, связанные с поиском экстремальных подпространств для n-поперечников классов аналитических функций и получением в некоторых довольно редких случаях их точных оценок, рассматривались В. М. Тихомировым, Л. В. Тайковым, А. Пинкусом, Фишером и другими (см., например, [4–9]).

В настоящей статье продолжена указанная тематика и вычисляются точные порядковые оценки для проекционного и спектрального n-поперечников классов $W^r E_p(\Omega)$ и $W^r E_p(\Omega)\Phi$ в $E_q(\Omega)$ при $p \neq q$.

Проекционным n-поперечником класса $\mathfrak{N}$, принадлежащего банахову пространству X, называют величину [4]

$$\pi_n(\mathfrak{N}, X) = \inf\{\inf\{\sup\{\|f - \Lambda f\|_X : f \in \mathfrak{N}\} : \Lambda X \subset L_n\} : L_n \subset X\},$$

где L_n — n-мерное подпространство, принадлежащее X; Λ — непрерывный линейный проектор, переводящий X в L_n.

Спектральным n-поперечником называют величину [10] $\mathrm{tr}_n(\mathfrak{N}, X) = \inf\{\sup\{\|f - Tf\|_X : f \in \mathfrak{N}\} : T\}$, где инфимум берется по всем конечномерным линейным непрерывным операторам $T: X \to X$, для которых след оператора T $\mathrm{tr}\, T = n$, $n \in \mathbb{R}$. При этом конечномерность оператора означает конечномерность области значений.

Напомним [11], что если T — конечномерный линейный непрерывный оператор, например, $T: X \to L_N$; $L_N \subset X$; $L_N = \mathrm{lin}\{x_1, \ldots, x_N\}$, то существуют функционалы $\varphi_j \in X^*$, $j = \overline{1, N}$, такие, что действие оператора T на каждую функцию $f \in X$ запишется в виде $Tf = \sum_{j=1}^N \varphi_j(f)\, x_j$. При этом $\mathrm{tr}\, T = \sum_{j=1}^N \varphi_j(x_j)$ не зависит от выбора базиса $\{x_j\}_{j=1}^N$ в L_N и функционалов $\{\varphi_j\}_{j=1}^N \subset X^*$.

Если $n \in \mathbb{N}$, то проекторы на подпространство $L_N \subset X$ размерности n имеют след, равный n, и (см., например, [4, 10])

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{tr}_n(\mathfrak{N}, X) \\ \delta_n(\mathfrak{N}, X) \end{array}\right\} \leq \pi_n(\mathfrak{N}, X), \tag{2}$$

где δ_n — линейный n-поперечник.

Пусть функция $w = \Psi(z)$ однолистно и конформно отображает область G на область $|w| > 1$ при условиях $\Psi(\infty) = \infty$; $\Psi^{(1)}(\infty) = \alpha > 0$, а функция $z = \psi(w)$ является обратной к ней и отображает область $|w| > 1$ на G. Совокупность членов с неотрицательными степенями в лорановском разложении функции $[\Psi(z)]^k$ в окрестности точки $z = \infty$ называют многочленами Фабера k-го порядка $P_k(z)$. Далее нам потребуется следующее утверждение.

Теорема А [12, с. 108]. *Пусть γ — спрямляемая жорданова кривая такая, что $\psi^{(1)}(w)$ в области $|w| > 1$ принадлежит классу $H_t(|w| > 1)$, $t > 1$, а $f(z) \in E_s(\Omega)$, $s > 1$, где t и s удовлетворяют условию $1/s + 1/t = 1$. Если справедливо неравенство $\int_\gamma |f(\xi)|^s |\Psi^{(1)}(\xi)|\,|d\xi| = \int_{|t|=1} |f(\psi(t))|^s |dt| < \infty$, то функция $f(z)$ разлагается в ряд Фабера*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k P_k(z), \tag{3}$$

где $c_k = (2\pi i)^{-1} \int_\gamma f(\xi)\,\Psi^{(1)}(\xi)\,\Psi^{-n-1}(\xi)\,d\xi$; $k \in \mathbb{Z}_+$, *сходящийся равномерно внутри области* Ω.

Для $1 \le p \le \infty$ и $1 < q < \infty$ обозначим $J_{p,q}(n) \overset{\mathrm{df}}{=} \{1$, если $1 < q \le p$ $(q \ne \infty)$; $n^{1/p-1/q}$, если $1 \le p \le q < \infty$ $(q \ne 1)\}$.

Теорема 1. *Пусть* Ω *— конечная односвязная область в* $\mathbb{C}$, *граница которой* γ *является кривой Ляпунова с показателем* 1; $\Phi(x)$, $x > 0$, *— неотрицательная неубывающая функция, удовлетворяющая условиям* (1), *и* $\lim\limits_{x\to 0}\Phi(x) = \Phi(0) = 0$. *Тогда для всех натуральных чисел* $n \ge r \ge 2$ *справедливы соотношения*

$$\Pi_n(W^r E_p(\Omega), E_q(\Omega)) \asymp n^{-r} J_{p,q}(n), \tag{4}$$

$$\Pi_n(W^r E_p(\Omega)\Phi, E_q(\Omega)) \asymp \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) n^{-r} J_{p,q}(n), \tag{5}$$

где $\Pi_n(\cdot)$ *— любой из* n*-поперечников* $\pi_n(\cdot)$ *или* $\mathrm{tr}_n(\cdot)$.

Доказательство. Прежде чем приступить к основным рассуждениям, отметим, что при $p \le q$ $W^r E_p(\Omega) \subsetneq E_q(\Omega)$ и $W^r E_p(\Omega)\Phi \subsetneq E_q(\Omega)$ [1, 2]. Поскольку граница γ области Ω является кривой Ляпунова с показателем 1, то известно [13], что функции $\Psi(z)$ и $\psi(w)$ непрерывно дифференцируемы в замкнутых областях $\overline{\Omega}$ и $|w| \ge 1$ соответственно, причем $\Psi^{(1)}(z) \in \mathrm{Lip}\,1$ и $\psi^{(1)}(w) \in \mathrm{Lip}\,1$. Следовательно, выполнены все условия теоремы А и любая функция $f(z) \in E_q(\Omega)$, $1 < q < \infty$, разлагается в ряд Фабера (3). Его частную сумму обозначим символом $F_n(f, z) \overset{\mathrm{df}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} c_k P_k(z)$, а наилучшее приближение функции $f(z) \in E_q(\Omega)$ подпространством полиномов $\mathcal{P}_n$ степени $\le n-1$ — через $\mathcal{E}(f, \mathcal{P}_n, E_q(\Omega)) \overset{\mathrm{df}}{=} \inf\{\|f - u_n\|_{E_q} : u_n(z) \in \mathcal{P}_n\}$.

Для любого $n \in \mathbb{N}$ при $1 < q < \infty$ справедливо соотношение

$$\mathcal{E}(f, \mathcal{P}_n, E_q(\Omega)) \asymp \|f - F_n(f)\|_{E_q}. \tag{6}$$

Покажем справедливость неравенства $\|f - F_n(f)\|_{E_q} \preccurlyeq \mathcal{E}(f, \mathcal{P}_n, E_q(\Omega))$. Известно [12], что для аналитической на множестве $|z| < 1$ функции $g(z)$, имеющей почти всюду на $|z| = 1$ угловые граничные значения, при условии $\int_{|z|=1} |g(z)|\,|\psi^{(1)}(z)|\,|dz| < \infty$ существует интеграл типа Коши $f(z) = (2\pi i)^{-1} \int_\gamma g(\Psi(t))(t - z)^{-1} dt$; $z \in \Omega$, который является интегральным оператором Фабера $F_0 \colon g \to f$ для области Ω, т. е. $f(z) = (F_0 g)(z)$. Выражение вида $g(w) = (F_0^{-1} f)(w) = (2\pi i)^{-1} \int_{|t|=1} f(\psi(t))(t - w)^{-1} dt$; $|w| < 1$, является обратным оператором Фабера, который существует, если $\int_\gamma |f(t)| \times |\Psi^{(1)}(t)|\,|dt| < \infty$.

Обозначая для функции $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \in H_q(|z|<1)$ через $S_n(g,z) \overset{\mathrm{df}}{=}$ $\overset{\mathrm{df}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} c_k z^k$ частную сумму ее ряда Тейлора и используя утверждение 1 из [1], а также изложенное выше, имеем

$$\|f - F_n(f)\|_{E_q} \le \|F_0\| \, \|g - S_n(g)\|_{H_q}. \tag{7}$$

Поскольку при $1 < p < \infty$ норма оператора S_n ограничена [14], то

$$\|g - S_n(g)\|_{H_q} \le \{1 + \|S_n\|\} \mathscr{E}(g, \mathscr{P}_n, H_q(|z|<1)). \tag{8}$$

На основании соображений, используемых при получении (7), запишем

$$\|F_0^{-1}\|^{-1} \mathscr{E}(g, \mathscr{P}_n, H_q(|z|<1)) \le \mathscr{E}(f, \mathscr{P}_n, E_q(\Omega)). \tag{9}$$

Из (7)–(9) следует оценка $\|f - F_n(f)\|_{E_q} \le \{\|F_0\| (1 + \|S_n\|) \|F_0^{-1}\|^{-1}\} \times$ $\times \mathscr{E}(f, \mathscr{P}_n, E_q(\Omega))$. Учитывая последнее неравенство и очевидное соотношение $\mathscr{E}(f, \mathscr{P}_n, E_q(\Omega)) \le \|f - F_n(f)\|_{E_q}$, получаем (6).

Аналогично [1] доказывается справедливость неравенства типа А. А. Конюшкова для величин наилучших полиномиальных приближений, а именно:

пусть функция $f(z) \in E_p(\Omega)$; $1 \le p < q \le \infty$, и

$$\sum_{p,q,n} \overset{\mathrm{df}}{=} \sum_{j=n+1}^{\infty} j^{1/p-1/q-1} \mathscr{E}(f, \mathscr{P}_j, E_p(\Omega)) < \infty;$$

тогда $f(z) \in E_q(\Omega)$ и

$$\mathscr{E}(f, \mathscr{P}_n, E_q(\Omega)) \preccurlyeq n^{1/p-1/q} \mathscr{E}(f, \mathscr{P}_n, E_p(\Omega)) + \sum\nolimits_{p,q,n}. \tag{10}$$

Используя результаты С. А. Альпера об оценке сверху погрешности наилучшего полиномиального приближения [15], а также (6) и (10), для $n \ge r$ получаем

$$\pi_n(W^r E_p(\Omega), E_q(\Omega)) \le \sup\{\|f - F_n(f)\|_{E_q} : f \in W^r E_p(\Omega)\} \preccurlyeq$$
$$\preccurlyeq n^{-r} J_{p,q}(n). \tag{11}$$

На основании аналогичных соображений и леммы 3 из [2] для $n \ge r$ имеем

$$\pi_n(W^r E_p(\Omega) \Phi, E_q(\Omega)) \preccurlyeq \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) n^{-r} J_{p,q}(n). \tag{12}$$

Перейдем к получению оценок снизу. Символом l_p^m, $p \ge 1$, обозначим m-мерное банахово пространство упорядоченных систем из m комплексных чисел $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{C}^m$ с нормой $\|\xi\|_{l_p^m} = \left\{\sum_{j=1}^m |\xi_j|^p\right\}^{1/p} < \infty$, $1 \le p < \infty$; $\|\xi\|_{l_\infty^m} = \max\{|\xi_j| : j = \overline{1,m}\} < \infty$. Также полагаем $\varepsilon B_p^m \overset{\mathrm{df}}{=} \{x \in l_p^m :$ $\|x\|_{l_p^m} \le \varepsilon\}$; $B_p^m \overset{\mathrm{df}}{=} 1 \cdot B_p^m$.

Зафиксируем произвольное число $j \in \mathbb{N}$, для которого $4n \le 2^j < 8n$. На основании рассуждений, использованных в теореме 1 из [1] при получении оценки снизу колмогоровского n-поперечника $d_n(W^r E_p(\Omega), E_q(\Omega))$, для $n \ge r$ получим

$$\operatorname{tr}_n(W^r E_p(\Omega), E_q(\Omega)) \succcurlyeq (2^j - r + 1)^{-r+1/p-1/q} \operatorname{tr}_n\left(B_p^{2^j-r+1}, l_q^{2^j-r+1}\right). \quad (13)$$

В силу тех же соображений и предложения 3 из [2] для $n \geq r$ запишем

$$\operatorname{tr}_n(W^r E_p(\Omega)\Phi, E_q(\Omega)) \succcurlyeq$$

$$\succcurlyeq \Phi\left(\frac{\pi}{2^j - r + 1}\right)(2^j - r + 1)^{-r+1/p-1/q} \operatorname{tr}_n\left(B_p^{2^j-r+1}, l_q^{2^j-r+1}\right). \quad (14)$$

Используя (1), (13), (14), полученные в [10] оценки спектральных n-поперечников конечномерных множеств и учитывая ограничения, наложенные на выбор числа j, получаем оценки снизу $\operatorname{tr}_n(W^r E_p(\Omega), E_q(\Omega)) \succcurlyeq n^{-r} J_{p,q}(n)$; $\operatorname{tr}_n(W^r E_p(\Omega)\Phi, E_q(\Omega)) \succcurlyeq \Phi(\pi/n) n^{-r} J_{p,q}(n)$. Тогда оценки (4), (5) следуют из (2), (11), (12) и двух последних соотношений.

Из проведенных рассуждений и определений проекционного и спектрального n-поперечника следует, что подпространство алгебраических полиномов комплексного переменного $\mathcal{P}_n$ и оператор $F_n(f, z) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k P_k(z)$ являются экстремальными в смысле достижения точного порядка для величин $\text{п}_n(W^r E_p(\Omega), E_q(\Omega))$ и $\text{п}_n(W^r E_p(\Omega)\Phi, E_q(\Omega))$, где $\text{п}_n(\cdot)$ есть $\pi_n(\cdot)$ либо $\operatorname{tr}_n(\cdot)$. Теорема 1 доказана.

1. *Вакарчук С. Б.* О поперечниках некоторых классов аналитических функций. I // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 3. – С. 324–333.
2. *Вакарчук С. Б.* О поперечниках некоторых классов аналитических функций. II // Там же. – № 8. – С. 1135–1138.
3. *Вакарчук С. Б.* Аналитические сплайны и поперечники функциональных классов // Докл. НАН Украины. - 1994. – № 5. – С. 7–11.
4. *Pinkus A.* n-Widths in approximation theory. – Berlin: Springer, 1985. – 292 p.
5. *Vakarchuk S. B.* Diameters of classes of analytic functions // Optimal Recovery: Proc. Second Int. Symp. Optimal Algorithms (Varna, May 29 – June 2 1989). – New York: Nova Scie. Publ. – 1992. – P. 297–310.
6. *Фарков Ю. А.* О поперечниках некоторых классов аналитических функций // Успехи мат. наук. – 1984. – **39**, № 1. – С. 161–162.
7. *Олейник В. Л.* Оценки поперечников компактных множеств аналитических функций в L_p с весом // Вестн. Ленингр. ун-та. – 1975. – № 7. – С. 47–51.
8. *Fischer S. D., Micchelli C. A.* The n-width of sets of analytic functions // Duke Math. J. – 1980. – **47**, № 4. – P. 789–801.
9. *Вакарчук С. Б.* О точных оценках поперечников некоторых классов аналитических функций многих комплексных переменных // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 7. – С. 3–6.
10. *Галеев Э. М.* О спектральных поперечниках конечномерных множеств // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. – 1988. – № 5. – С. 41–44.
11. *Глазман И. Н., Любич Ю. И.* Конечномерный линейный анализ. – М.: Наука, 1969. – 476 с.
12. *Суетин П. К.* Ряды по многочленам Фабера. – М.: Наука, 1984. – 336 с.
13. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. – М.: Физматгиз, 1952. – 628 с.
14. *Тихомиров В. М.* Некоторые задачи теории приближений. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 304 с.
15. *Альпер С. Я.* О приближении в среднем аналитических функций класса E_p // Исслед. по совр. пробл. теории функций комплексного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – С. 273–286.

Получено 31.10.94