УДК 512. 552. 12

Б. В. Забавський (Львів. ун-т)

УЗАГАЛЬНЕНІ АДЕКВАТНІ КІЛЬЦЯ

A new class of rings of elementary divisors which generalizes adequate rings is introduced. The problem of whether every commutative Bezout domain is an elementary divisor domain is reduced to the case when only trivial adequate elements (namely, the identities of the domain) are in the domain.

Введено новий клас кілець елементарних дільників, які узагальнюють адекватні кільця. Показано, що проблема: чи буде кожна комутативна область Безу областю елементарних дільників зводиться до випадку, коли в області лише тривіальні адекватні елементи (а саме, одиниці області).

О. Хелмер ввів в розгляд адекватні кільця і показав, що вони є кільцями елементарних дільників, тобто кільцями, над якими довільна матриця домноженням справа і зліва на оборотні матриці зводиться до канонічного діагонального виду [1]. Розглядаючи кільця аналітичних функцій як адекватні кільця, зауважимо, що адекватне кільце не обов'язково є кільцем з умовами скінченності на ланцюги ідеалів і в той же час — це кільце елементарних дільників. М. Хенріксен побудував приклад кільця елементарних дільників, яке однак не є адекватним [2]. Тим самим він показав, що умова адекватності не є необхідною умовою того, щоб кільце було кільцем елементарних дільників. В роботі вводиться новий клас кілець елементарних дільників, які містять як адекватні кільця, так і кільця, побудовані М. Хенріксеном. Кільця даного класу названі узагальнено адекватними.

Слід зауважити, що адекватні кільця досліджуються в багатьох роботах (див., наприклад, [1 – 6]).

Під кільцем у даній роботі будемо розуміти комутативне кільце з одиницею, відмінною від нуля. Кільце Безу — це комутативне кільце, в якому довільний скінченнопороджений ідеал є головним. Той факт, що елемент $a \in R$ ділить елемент $b \in R$, будемо позначати $a \mid b$. Позначимо через $\operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n)$ матрицю з елементами $a_1, \dots, a_n$ по головній діагоналі і нулями на інших місцях. Дане позначення будемо застосовувати навіть у тих випадках, коли матриця прямокутна; при цьому точні розміри матриці будуть вказуватися додатково, якщо вони не зрозумілі з контексту. Будемо говорити, що матриці A і B над комутативним кільцем R еквівалентні, якщо існують оборотні матриці P і Q відповідних розмірів над R такі, що $A = PBQ$. Кажуть, що матриця A над кільцем R має діагональну редукцію (або матриця A зводиться до канонічного діагонального виду), якщо вона еквівалентна матриці $\operatorname{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, 0, \dots \dots, 0)$, де $\varepsilon_i \mid \varepsilon_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Якщо довільна матриця над кільцем R має діагональну редукцію, то кільце R називається кільцем елементарних дільників. Якщо довільна 1×2 (2×1)-матриця над кільцем R має діагональну редукцію, то кільце R називається правим (лівим) ермітовим. Праве (і ліве) кільце Ерміта називається кільцем Ерміта. Слід відзначити, що кільце Ерміта є кільцем Безу. У випадку відсутності дільників нуля ці класи кілець співпадають [3].

Відзначимо наступні результати [3].

Твердження 1. *Комутативне кільце Ерміта є кільцем елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли довільна квадратна матриця порядку два має діагональну редукцію.*

Твердження 2. *Комутативне кільце Ерміта R є кільцем елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли для довільних елементів $a, b, c \in R$ таких, що $aR + bR + cR = R$, знайдуться елементи $p, q \in R$ такі, що $(ap + bq)R + cqR = R$.*

Нехай R — комутативне кільце. Назвемо ненульовий елемент $a \in R$ адекватним до елемента $b \in R$, якщо $a = rs$, де $rR + bR = R$ і $s'R + bR \neq R$ для довільного необоротного дільника s' елемента s.

Назвемо ненульовий елемент кільця R адекватним, якщо він адекватний до довільного елемента кільця.

Адекватним називається комутативне кільце Ерміта, в якому довільний ненульовий елемент адекватний.

Назвемо ненульовий елемент a комутативного кільця R коадекватним, якщо довільний елемент b кільця R можна зобразити у вигляді $b = rs$, де $rR + aR = R$ і $s'R + aR \neq R$ для довільного необоротного дільника s' елемента s.

Твердження 3. *Ідемпотенти кільця R є коадекватними елементами.*

Доведення. Нехай $e = e^2$ і $a \in R \setminus 0$. Тоді

$$a = (1 - e + ea)(e + a - ea)$$

і

$$e = e(e + a - ea).$$

Звідси, поклавши $(e + a - ea) = s$, $r = (1 - e + ea)$, отримаємо $a = rs$, де $rR + eR = R$, $s'R + eR = sR$ для довільного необоротного дільника s' елемента s. Твердження доведено.

Назвемо ідеал I кільця R адекватним, якщо I містить хоча б один адекватний елемент. В протилежному випадку ідеал називається неадекватним.

Очевидно, що множина неадекватних ідеалів відносно включення є індуктивною. Застосовуючи лему Цорна, одержуємо, що довільний неадекватний ідеал міститься хоча б в одному максимально неадекватному ідеалі. Тобто в ідеалі N, який задовольняє умову: якщо $N \subset M, N \neq M$, то довільний ідеал M містить адекватний елемент.

В роботі [4] доведено наступне твердження.

Твердження 4. *Множина адекватних елементів мультиплікативно замкнена.*

Звідси очевидно, що максимально неадекватний ідеал є простим ідеалом кільця R.

Означення. *Комутативне кільце Ерміта називається узагальнено адекватним, якщо для довільної пари ненульових елементів хоча б один з елементів є адекватним до іншого.*

Очевидно, що адекватне кільце є узагальнено адекватним.

Наведемо приклад узагальнено адекватного кільця. Спочатку доведемо таке твердження.

Твердження 5. *Область Безу з єдиним максимально неадекватним ідеалом є узагальнено адекватною.*

Доведення. Нехай a, b — довільні ненульові елементи області R, а N — максимально неадекватний ідеал. Можливі два випадки:

1) принаймні один елемент a або b не належить N, наприклад $a \notin N$;

2) $a \in N, b \in N$.

Оскільки на основі [7] множина адекватних елементів насичена, тоді якщо $a \notin N$, то a — адекватний елемент R.

Якщо ж $a \in N, b \in N$, то $aR + bR = dR, a = a_0 d, b = b_0 d$ і $a_0 R + b_0 R = R$, причому d — необоротний елемент R, оскільки $d \in N \neq R$.

Очевидно, що хоча б один з елементів a_0 і b_0 не належить N, оскільки $a_0 R + b_0 R = R$. Нехай $a_0 \notin N$. Тоді a_0 є адекватним, зокрема, $a_0 = rs$, де $rR + bR = R, s'R + bR \neq R$ для довільного необоротного дільника s' елемента s. Звідси $a = r(sd)$ — шукане зображення. Твердження доведено.

М. Хенріксен в роботі [2] показав, що кільце $R = (z_0 + a_1 x_1 + \ldots \mid z_0 \in Z,$

$a_i \in Q)$ є областю Безу, яка не є адекватною. Очевидно, що ідеал $N = (a_1 x_1 + \ldots \mid a_i \in Q)$ є єдиним максимально неадекватним ідеалом, тобто дане кільце є узагальнено адекватним.

Теорема 1. *Узагальнено адекватне кільце є кільцем елементарних дільників.*

Доведення. В силу твердження 1 і того факту, що дане кільце є кільцем Ерміта, достатньо обмежитися матрицями виду

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix},$$

де $aR + bR + cR = R$, $a \neq 0$, $c \neq 0$.

Оскільки R — узагальнено адекватне, то принаймні один з елементів a, c, наприклад c, можна зобразити у вигляді $c = rs$, де $rR + aR = R$ і $s'R + aR \neq R$ для довільного необоротного дільника s' елемента s. Доведемо, що $(a + br)R + crR = R$. Якщо б це було не так, то тоді $(a + br)R + crR = hR$ і h — необоротний елемент. Якщо $hR + rR = \delta R$, то тоді $\delta \mid a$, що суперечить умові $aR + rR = R$. Звідси $h \mid s$, значить, $hR + aR = gR$, тоді $g \mid b$, що суперечить умові $aR + bR + cR = R$. Звідси $(a + br)R + crR = R$. Якщо ж для елемента a існує аналогічне зображення, то $arR + (br + c)R = R$. У випадку, коли $(a + br)R + crR = R$, для матриці A маємо

$$\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + br & cr \\ b & c \end{pmatrix} = B.$$

Очевидно, що матриця $\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & I \end{pmatrix}$ — оборотна матриця.

Легко переконатися, що матриця B, а значить, і матриця A мають діагональну редукцію. Якщо $arR + (br + c)R = R$, то для матриці маємо

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ar & a \\ br + c & b \end{pmatrix} = C.$$

Легко переконатися, що матриця C, а значить, і матриця A мають діагональну редукцію. Теорема доведена.

Позначимо через S множину всіх адекватних елементів R. Оскільки $1 \in S$, то $S \neq \varnothing$. Оскільки S — насичена мультиплікативно замкнена множина, то можна розглядати локалізацію кільця R на множині S, тобто кільце дробів RS^{-1}.

Теорема 2. *Комутативна область Безу є кільцем елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли RS^{-1} — кільце елементарних дільників.*

Доведення. Оскільки комутативна область Безу є кільцем Ерміта, то для доведення теореми достатньо обмежитися матрицями виду $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$, де $aR + bR + cR = R$. Припустимо, що RS^{-1} — кільце елементарних дільників. Тоді в умовах твердження 2 для елементів a, b, c існують такі елементи ps_1^{-1}, $qs_2^{-1} \in RS^{-1}$, $s_1, s_2 \in S$, що $\left(aps_1^{-1} + bqs_2^{-1}\right)RS^{-1} + cqs_2^{-1}RS^{-1} = RS^{-1}$. Тому існують елементи $r, t, k, l \in R$ і $s \in S$ такі, що $(ak + bl)R + clt = s$. Тоді для матриці A існує еквівалентна матриця B вигляду

$$B = \begin{pmatrix} t & 0 \\ x & y \end{pmatrix},$$

де $t \mid s$ і $t \in S$, причому $tR + xR + yR = R$. Оскільки елемент t адекватний, то, використовуючи теорему 1, бачимо, що матриця B, а значить, і матриця A мають діагональну редукцію. Отже, R — кільце елементарних дільників. Припустимо, що R — область елементарних дільників. Покажемо, що RS^{-1} — область елементарних дільників. Нехай as_1^{-1}, bs_2^{-1}, cs_3^{-1} — довільні елементи RS^{-1}, причому $as_1^{-1}RS^{-1}+bs_2^{-1}RS^{-1}+cs_3^{-1}RS^{-1}=RS^{-1}$. Очевидно, що елементи as_1^{-1}, bs_2^{-1}, cs_3^{-1} можна зобразити у вигляді $as_1^{-1}=at_1s^{-1}$, $bs_2^{-1}=bt_2s^{-1}$, $cs_3^{-1}= = ct_3s^{-1}$, де $s\in S$.

Оскільки $as_1^{-1}RS^{-1}+bs_2^{-1}RS^{-1}+cs_3^{-1}RS^{-1}=RS^{-1}$, то $at_1RS^{-1}+bt_2RS^{-1}+ + ct_3RS^{-1}=RS^{-1}$ і $aR+bR+cR=dR$, де $d\in S$. Тоді $a=a_0d, b=b_0d, c=c_0d$, $a_0R+b_0R+c_0R=R$.

Легко переконатися, що $a_0t_1R+b_0t_2R+c_0t_3R=kR$, де $k\in S$. Отже, $a_0t_1=a_1k_1, b_0t_2=b_1k_1, c_0t_3=c_1k_1$ і $a_1R+b_1R+c_1R=R$. Оскільки R — область елементарних дільників, то в силу твердження 2 існують елементи u, $v, p, q\in R$ такі, що $(a_1p+b_1q)u+c_1qv=1$. Звідси $(a_1p+b_1q)us+c_1qvs=s$ і $(a_1tp+bt_2q)us+ct_3qsv=skd$. Отже, $(at_1s^{-1}p+bt_2s^{-1}q)us+ct_3s^{-1}qsv= =kd$, де $d, k\in S$, тобто $\left(as_1^{-1}p+bs_2^{-1}q\right)RS^{-1}+cs_3^{-1}qRS^{-1}=RS^{-1}$. В силу твердження 2 область RS^{-1} є кільцем елементарних дільників. Теорема доведена.

Підсумовуючи викладені вище результати, можна твердити, що проблема: чи буде кожна комутативна область Безу областю елементарних дільників, зводиться до випадку, коли в області є лише тривіальні адекватні елементи (тобто тільки одиниці в області є адекватними елементами). Звідси очевидним чином випливає актуальність дослідження узагальнено адекватних кілець.

1. *Helmer O.* The elementary divisor theorem for certain rings without chain conditions // Bull. Amer. Math. Soc. – 1943. – **49**. – P. 225–236.
2. *Henriksen M.* Some remarks about elementary divisor rings // Michigan Math J. – 1955/56. – **3**. – P. 159–163.
3. *Kaplansky I.* Elementary divisors and modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – **66**. – P. 464–491.
4. *Забавський Б. В., Комарницький М. Я.* Про адекватні кільця // Вісн. Львів. ун-ту. – 1988. – Вип. 30. – С. 39–43.
5. *Larsen N. D., Lewin W. I., Shores T. S.* Elementary divisor rings and finitely presented modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1974. – **187**. – P. 231–248.
6. *Gillman I., Henriksen M.* Some remarks about elementary divisor rings // Ibid. – 1956. – **82**. – P. 362–365.
7. *Комарницкий Н. Я., Забавский Б. В.* Об адекватности одного класса областей Безу // 19-я Всесоюзн. алгебр. конф. – Львов, 1977. – Ч. 1. – С. 160.

Одержано 15.12.94