УДК 517.944: 519.46

В. М. Федорчук (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

СИМЕТРІЙНА РЕДУКЦІЯ І ДЕЯКІ ТОЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ НЕЛІНІЙНОГО П'ЯТИВИМІРНОГО ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ

By using splitting subgroups of the generalized Poincare group $P(1,4)$, the symmetry reduction of nonlinear five-dimensional wave equation to differential equations with fewer number of independent variables has been done. Taking into account the solutions of the reduced equations some classes of exact solutions of investigated equation have been constructed.

Проведена симетрійна редукція нелінійного п'ятивимірного хвильового рівняння до диференціальних рівнянь із меншою кількістю незалежних змінних з використанням розщеплюваних підгруп узагальненої групи Пуанкаре $P(1,4)$. На основі розв'язків редукованих рівнянь побудовані деякі класи точних розв'язків досліджуваного рівняння.

Розглянемо нелінійне хвильове рівняння в просторі Мінковського $M(1,4)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_4^2} = F(u), \tag{1}$$

де $u = u(x)$, $x = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$, F — гладка функція. Рівняння вигляду (1) виникають при розгляді різних питань теоретичної і математичної фізики [1 – 6]. Групою інваріантності рівняння (1) є узагальнена група Пуанкаре $P(1,4)$ — група поворотів і зсувів у просторі Мінковського $M(1,4)$. Розщеплювані підгрупи групи $P(1,4)$ описані в роботах [7 – 9].

В даній роботі на основі інваріантів [10] розщеплюваних підгруп групи $P(1,4)$ побудовані анзаци, які редукують досліджуване рівняння до диференціальних рівнянь із меншою кількістю незалежних змінних, проведена відповідна симетрійна редукція. На основі розв'язків редукованих рівнянь знайдені деякі класи точних розв'язків рівняння (1).

1. Розглянемо анзаци вигляду

$$u(x) = \varphi(\omega),$$

де $\omega(x)$ — одновимірні інваріанти розщеплюваних підгруп групи $P(1,4)$. Ці анзаци редукують рівняння (1) до звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) виду

$$\frac{d^2\varphi}{d\omega^2} + \frac{d\varphi}{d\omega} k\omega^{-1} = \varepsilon F(\varphi), \tag{2}$$

де нові змінні ω і відповідні їм k і ε мають вигляд

1. $\omega = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$, $k = 1$, $\varepsilon = -1$;
2. $\omega = (x_0^2 - x_4^2)^{1/2}$, $k = 1$, $\varepsilon = 1$;
3. $\omega = (x_3^2 + x_4^2)^{1/2}$, $k = 1$, $\varepsilon = -1$;
4. $\omega = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$, $k = 2$, $\varepsilon = -1$;
5. $\omega = (x_4^2 + x_3^2 - x_0^2)^{1/2}$, $k = 2$, $\varepsilon = -1$;
6. $\omega = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^{1/2}$, $k = 3$, $\varepsilon = -1$;
7. $\omega = (x_3^2 + x_2^2 + x_1^2 - x_0^2)^{1/2}$, $k = 3$, $\varepsilon = -1$;
8. $\omega = (x_4^2 + x_2^2 + x_1^2 - x_0^2)^{1/2}$, $k = 3$, $\varepsilon = -1$; (3)

9. $\omega = (x_4^2 + x_3^2 + x_2^2 + x_1^2 - x_0^2)^{1/2}, \quad k=4, \quad \varepsilon=-1;$

10. $\omega = x_0, \quad k=0, \quad \varepsilon=1;$

11. $\omega = x_1, \quad k=0, \quad \varepsilon=-1;$

12. $\omega = x_2, \quad k=0, \quad \varepsilon=-1;$

13. $\omega = x_3, \quad k=0, \quad \varepsilon=-1;$

14. $\omega = x_4, \quad k=0, \quad \varepsilon=-1.$

Для змінних $\omega_1 = x_0 + x_4$ і $\omega_2 = x_0 - x_4$ отримуємо $\Box\varphi(\omega) \equiv 0$.

Якщо $k=0$, то рівняння (2) інтегрується в квадратурах. У цьому випадку маємо

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{2\varepsilon\int F(\varphi)\,d\varphi + c_1}} = \omega + c_2,$$

де c_1 і c_2 — довільні сталі; відповідні ω і ε виписані в формулах (3) (випадки 10 – 14).

Нехай $F(\varphi) = \lambda\varphi^n \ (n \neq 1)$, тоді рівняння (2) мають вигляд

$$\frac{d^2\varphi}{d\omega^2} + \frac{d\varphi}{d\omega} k\omega^{-1} = \varepsilon\lambda\varphi^n \ (n \neq 1). \tag{4}$$

Це рівняння типу Фаулера – Емдена. Вони вивчалися в багатьох роботах (див., наприклад, [11, 12]). Частинні розв'язки рівняння (4) мають вигляд

$$\varphi = \alpha\omega^{\nu},$$

де

$$\alpha = \left[\frac{2[1+k+n(1-k)]}{\varepsilon\lambda(1-n)^2}\right]^{1/(n-1)}, \quad \nu = \frac{2}{1-n}.$$

На основі розв'язків редукованих рівнянь отримуємо частинні розв'язки рівняння (1) з правою частиною $F(u) = \lambda u^n \ (n \neq 1)$.

2. Розглянемо анзаци вигляду

$$u(x) = \varphi(\omega_1, \omega_2),$$

де $\omega_1(x)$ і $\omega_2(x)$ — інваріанти розщеплюваних підгруп групи $P(1,4)$. Ці анзаци редукують рівняння (1) до двовимірних диференціальних рівнянь з частинними похідними (ДРЧП). Змінні ω_1, ω_2 і відповідні їм редуковані рівняння мають вигляд

1. $\omega_1 = (x_0^2 - x_4^2)^{1/2}, \quad \omega_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \quad \varphi_{11} - \varphi_{22} + \varphi_1\omega_1^{-1} - \varphi_2\omega_2^{-1} =$
$= F(\varphi), \quad \varphi_{ik} = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\omega_i\partial\omega_k}, \quad i,k = 1,2;$

2. $\omega_1 = x_3, \quad \omega_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}; \quad \varphi_{11} + \varphi_{22} + \varphi_2\omega_2^{-1} = -F(\varphi);$

3. $\omega_1 = x_2, \quad \omega_2 = x_3; \quad \varphi_{11} + \varphi_{22} = -F(\varphi);$

4. $\omega_1 = x_2, \quad \omega_2 = (x_4^2 + x_3^2 - x_0^2)^{1/2}; \quad \varphi_{11} + \varphi_{22} + 2\varphi_2\omega_2^{-1} = -F(\varphi);$

5. $\omega_1 = x_0, \quad \omega_2 = (x_3^2 + x_4^2)^{1/2}; \quad \varphi_{11} - \varphi_{22} - \varphi_2\omega_2^{-1} = F(\varphi);$

6. $\omega_1 = x_0, \quad \omega_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}; \quad \varphi_{11} - \varphi_{22} - \varphi_2 \omega_2^{-1} = F(\varphi);$

7. $\omega_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \quad \omega_2 = (x_3^2 + x_4^2)^{1/2};$

$\varphi_{11} + \varphi_{22} + \varphi_1 \omega_1^{-1} + \varphi_2 \omega_2^{-1} = -F(\varphi);$

8. $\omega_1 = x_0, \quad \omega_2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^{1/2}; \quad \varphi_{11} - \varphi_{22} - 3\varphi_2 \omega_2^{-1} = F(\varphi);$

9. $\omega_1 = x_3, \quad \omega_2 = x_4; \quad \varphi_{11} + \varphi_{22} = -F(\varphi);$

10. $\omega_1 = x_0, \quad \omega_2 = x_4; \quad \varphi_{11} - \varphi_{22} = F(\varphi);$

11. $\omega_1 = x_4, \quad \omega_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}; \quad \varphi_{11} + \varphi_{22} + \varphi_2 \omega_2^{-1} = -F(\varphi);$

12. $\omega_1 = x_0, \quad \omega_2 = x_3; \quad \varphi_{11} - \varphi_{22} = F(\varphi);$

13. $\omega_1 = (x_0^2 - x_4^2)^{1/2}, \quad \omega_2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2};$

$\varphi_{11} - \varphi_{22} + \varphi_1 \omega_1^{-1} - 2\varphi_2 \omega_2^{-1} = F(\varphi);$

14. $\omega_1 = x_3, \quad \omega_2 = (x_4^2 + x_2^2 + x_1^2 - x_0^2)^{1/2}; \quad \varphi_{11} + \varphi_{22} + 3\varphi_2 \omega_2^{-1} = -F(\varphi);$

15. $\omega_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \quad \omega_2 = (x_4^2 + x_3^2 - x_0^2)^{1/2};$

$\varphi_{11} + \varphi_{22} + \varphi_1 \omega_1^{-1} + 2\varphi_2 \omega_2^{-1} = -F(\varphi);$

16. $\omega_1 = x_1, \quad \omega_2 = x_2; \quad \varphi_{11} + \varphi_{22} = -F(\varphi);$

17. $\omega_1 = x_3, \quad \omega_2 = (x_0^2 - x_4^2)^{1/2}; \quad \varphi_{11} - \varphi_{22} - \varphi_2 \omega_2^{-1} = -F(\varphi);$

18. $\omega_1 = x_4, \quad \omega_2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2)^{1/2}; \quad \varphi_{11} + \varphi_{22} + 3\varphi_2 \omega_2^{-1} = -F(\varphi);$

19. $\omega_1 = x_4, \quad \omega_2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}; \quad \varphi_{11} + \varphi_{22} + 2\varphi_2 \omega_2^{-1} = -F(\varphi);$

20. $\omega_1 = x_0, \quad \omega_2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}; \quad \varphi_{11} - \varphi_{22} - 2\varphi_2 \omega_2^{-1} = F(\varphi);$

21. $\omega_1 = x_0 + x_4, \quad \omega_2 = x_3^2 - 2x_0(x_0 + x_4);$

$4(\omega_1^2 - \omega_2)\varphi_{22} - 4\omega_1 \varphi_{12} - 6\varphi_2 = F(\varphi);$

22. $\omega_1 = x_0 + x_4, \quad \omega_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_0(x_0 + x_4);$

$4(\omega_2 - \omega_1^2)\varphi_{22} + 4\omega_1 \varphi_{12} + 10\varphi_2 = -F(\varphi);$

23. $\omega_1 = x_0 + x_4, \quad \omega_2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_0(x_0 + x_4);$

$4(\omega_2 - \omega_1^2)\varphi_{22} + 4\omega_1 \varphi_{12} + 8\varphi_2 = -F(\varphi);$

24. $\omega_1 = \arcsin \dfrac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - \dfrac{1}{d} \ln(x_0 + x_4), \quad \omega_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2};$

$\omega_2^{-2} \varphi_{11} + \varphi_{22} + \varphi_2 \omega_2^{-1} = -F(\varphi);$

25. $\omega_1 = \ln(x_0^2 - x_4^2) - 2e \arcsin \dfrac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + 2\,\mathrm{arch} \dfrac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - x_4^2}},$

$\omega_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}; \quad 4e^2 \omega_2^{-2} \varphi_{11} + \varphi_{22} + \varphi_2 \omega_2^{-1} = -F(\varphi);$

26. $\omega_1 = \ln(x_0^2 - x_4^2) + 2e\arcsin\dfrac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - 2\operatorname{arch}\dfrac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - x_4^2}},$

$\omega_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}; \quad 4e^2\omega_2^{-2}\varphi_{11} + \varphi_{22} + \varphi_2\omega_2^{-1} = -F(\varphi);$

27. $\omega_1 = x_0 + x_4, \quad \omega_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}; \quad \varphi_{22} + \varphi_2\omega_2^{-1} = -F(\varphi);$

28. $\omega_1 = x_3, \quad \omega_2 = x_0 - x_4; \quad \varphi_{11} = -F(\varphi);$

29. $\omega_1 = x_2, \quad \omega_2 = x_0 + x_4; \quad \varphi_{11} = -F(\varphi);$

30. $\omega_1 = x_0 - x_4, \quad \omega_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}; \quad \varphi_{22} + \varphi_2\omega_2^{-1} = -F(\varphi);$

31. $\omega_1 = x_3, \quad \omega_2 = x_0 + x_4; \quad \varphi_{11} = -F(\varphi);$

32. $\omega_1 = x_0 + x_4, \quad \omega_2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}; \quad \varphi_{22} + 2\varphi_2\omega_2^{-1} = -F(\varphi);$

33. $\omega_1 = x_0 - x_4, \quad \omega_2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}; \quad \varphi_{22} + 2\varphi_2\omega_2^{-1} = -F(\varphi).$

У випадках (27) – (33) замість двовимірних ДРЧП отримуємо ЗДР. Можна показати, що в цих випадках змінні ω_1 і ω_2 є інваріантами підгруп розширеної групи Галілея $\tilde{G}(1,3) \subset P(1,4)$.

Симетрійна редукція нелінійних релятивістськи інваріантних рівнянь до ЗДР з використанням анзаців від двох нових змінних вивчалася також в роботі [13].

1. *Фущич В. И., Кривский И. Ю.* О волновых уравнениях в 5-пространстве Минковского. – Киев, 1968. – 38 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т теорет. физики; ИТФ-68-72).
2. *Fushchich W. I., Krivsky I. Yu.* On representations of the inhomogeneous de Sitter group and equations in five-dimensional Minkovsky space // Nucl. Phys. B. – 1969. – **14**, № 2. – P. 321–330.
3. *Фущич В. И.* Представления полной неоднородной группы де Ситтера и уравнения в пятимерном подходе. I // Теорет. и мат. физика. – 1970. – **4**, № 3. – С. 360–382.
4. *Кадышевский В. Г.* Новый подход к теории электромагнитных взаимодействий // Физика элементар. частиц и атомн. ядра. – 1980. – **11**, № 1. – С. 5–39.
5. *Владимиров Ю. С.* Системы отсчета в теории гравитации. – М.: Энергоиздат, 1982. – 256 с.
6. *Фущич В. И., Никитин А. Г.* Симметрия уравнений квантовой механики. – М.: Наука, 1990. – 400 с.
7. *Федорчук В. М.* Непрерывные подгруппы неоднородной группы де Ситтера $P(1,4)$. – Киев, 1978. – 36 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 78.18).
8. *Федорчук В. М.* Расщепляющиеся подалгебры алгебры Ли обобщенной группы Пуанкаре $P(1,4)$ // Укр. мат. журн. – 1979. – **31**, № 6. – С. 717–722.
9. *Федорчук В. М., Фущич В. И.* О подгруппах обобщенной группы Пуанкаре // Теоретико-групповые методы в физике. – М.: Наука, 1980. – Т. 1. – С. 61–66.
10. *Фущич В. И., Федорчук В. М., Федорчук И. М.* Подгрупповая структура обобщенной группы Пуанкаре и точные решения некоторых нелинейных волновых уравнений. – Киев, 1986. – 36 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 86.27).
11. *Беркович Л. М., Нечаевский М. Л.* О групповых свойствах и интегрируемости уравнений типа Фаулера – Эмдена // Теоретико-групповые методы в физике. – М.: Наука, 1983. – Т. 2. – С. 463–471.
12. *Беркович Л. М.* Об уравнении Фаулера – Эмдена и некоторых его обобщениях // Сер. математика и физика (Белград. ун-т). – 1972. – № 391. – С. 51–62.
13. *Grundland A. M., Harnad J., Winternitz P.* Symmetry reduction for nonlinear relativistically invariant equations // J. Math. Phys. – 1984. – **25**, № 4. – P. 791–806.

Одержано 15.02.94