УДК 517.7

В. Ф. Бабенко, А. А. Руденко (Днепропетр. ун-т)

ОПТИМИЗАЦИЯ КВАДРАТУР НА КЛАССАХ ФУНКЦИЙ, ЗАДАВАЕМЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ С ВЕЩЕСТВЕННЫМ СПЕКТРОМ*

The problem on optimization of quadrature formulas is studied for wide classes of periodic functions defined in terms of differential operators, which have real spectrum. We consider quadrature formulas, in which values of the functions and values of images of the functions with respect to some differential operators are used. We prove that the rectangular formula, among other quadrature formulas, is optimal.

Вивчається задача про оптимізацію квадратурних формул на широких класах періодичних функцій, які задаються за допомогою диференціальних операторів з дійсним спектром. Розглядаються квадратурні формули, які використовують значення функцій і значення образів функції при дії деяких диференціальних операторів. Доведено, що оптимальною є формула прямокутників.

1. Основные обозначения и определения. Постановка задачи. Основные результаты. Пусть C и L_p $(1 \le p \le \infty)$ — пространства 2π-периодических функций $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с соответствующими нормами. Если $f \in L_1$ и $f \ge 0$, то через $P(f, t)$ обозначим убывающую перестановку (см., например, [1, с. 17]) сужения f на период. Для произвольной функции $f \in L_1$ положим $\Pi(f; x) = P(f_+, x) - P(f_-, 2\pi - x)$, где $f_\pm(x) = \max\{\pm f(x), 0\}$. Основные свойства перестановок $P(f, x)$ и $\Pi(f, x)$ см., например, в [1, 2]. Множество $F \in L_1$ назовем перестановочно-инвариантным (Π-инвариантным), если из $f \in F$ и $\Pi(f) = \Pi(g)$ следует, что $g \in F$. Примеры таких множеств можно найти в [3, 4]. Если $f, g \in L_1$ и для произвольного $x \in [0, 2\pi]$

$$\int_0^x \Pi(f, t)\, dt \le \int_0^x \Pi(g, t)\, dt,$$

то будем писать $f \prec g$.

Пусть, далее, $r \in \mathbb{N}$, $D = d/dx$, $\mathfrak{L}_0 = I$ — тождественный оператор, $\mathfrak{L}_1 = D - a_1$, $\mathfrak{L}_2 = (D - a_1)(D - a_2), \ldots, \mathfrak{L}_r = (D - a_1)\ldots(D - a_r)$ — линейные дифференциальные операторы с постоянными вещественными коэффициентами; $\beta_r(x)$ — характеристический многочлен оператора $\mathfrak{L}_r$. В дальнейшем будем считать, что все корни $a_1, a_2, \ldots, a_r$ многочлена $\beta_r(x)$ вещественны и $a_1 = 0$. Для заданного Π-инвариантного множества $F \subset L_1$ через $W(\mathfrak{L}_r, F)$ будем обозначать класс функций f, имеющих локально абсолютно непрерывную производную $f^{(r-1)}$ и $\mathfrak{L}_r f \in F$. Отметим, что если $\mathfrak{L}_r = d^r/dx^r$, а F_p — единичный шар в пространстве L_p, $1 \le p \le \infty$, то $W(\mathfrak{L}_r, F_p) = W_p^r$ — стандартный соболевский класс 2π-периодических функций.

Обозначим через $Q_{n,r} = Q_{n,r}(\mathfrak{L}_r)$, $n, r \in \mathbb{N}$, множество всевозможных квадратурных формул вида

$$q(f) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j \in A_{\sqrt{k}}} c_{k,j} \mathfrak{L}_j f(x_k), \tag{1}$$

* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Государственного комитета Украины по вопросам науки и технологий и Международного научного фонда.

где

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_m < x_1 + 2\pi, \quad c_{k,j} \in \mathbb{R},$$

$$A_1, \ldots, A_m \subset \{0, 1, \ldots, r-1\}, \quad \sum_{k=1}^{m} |A_k| \le n,$$

$|A_k|$ — количество элементов множества A_k.

Отметим, что $Q_{n,1}$ — это множество „простых" квадратурных формул, т. е. множество формул вида

$$q(f) = \sum_{k=1}^{m} c_k f(x_k), \quad m \le n.$$

Пусть G — некоторый, вообще говоря, несимметричный класс достаточно гладких функций и $Q \subset Q_{n,r}(\mathfrak{L}_r)$ — некоторая совокупность квадратурных формул. Для $q \in Q$ и $f \in G$ положим

$$R(f; q) = \int_0^{2\pi} f(x)\,dx - q(f).$$

Пусть также

$$R^{\pm} = R^{\pm}(G, q) = \pm \operatorname{Sup}\{R(\pm f, q) \mid f \in G\}, \quad I(G, q) = [R^-, R^+].$$

Будем рассматривать задачу оптимизации квадратурных формул из множества Q на классе G в следующей постановке: требуется найти для класса G квадратурную формулу $\overline{q} \in Q$ такую, что для любой другой формулы $q \in Q$ $I(G, \overline{q}) \subset I(G, q)$. Такую квадратурную формулу $\overline{q}$ (если она существует) мы и будем называть наилучшей для класса G.

Для центрально-симметричных классов эта постановка совпадает с классической постановкой задачи о наилучшей квадратурной формуле [5].

Классическая постановка задачи о наилучшей для данного класса функций квадратурной формуле, редукция задачи оптимизации квадратурных формул на классах W_p^r к задаче о моносплайне минимальной L_p-нормы и решение этих задач в ряде случаев принадлежит С. М. Никольскому (см., например, [5]).

Первый существенный шаг в решении задачи оптимизации „простых" квадратурных формул для классов дифференцируемых периодических функций произвольной гладкости сделан В. П. Моторным в [6]. В работах В. П. Моторного [6], А. А. Лигуна [7], А. А. Женсыкбаева (см., например, [8, 9]) задача оптимизации „простых" квадратурных формул полностью решена для соболевских классов W_p^r периодических функций. В этих работах полностью решена задача о соответствующих простым квадратурным формулам моносплайнах минимальной L_p-нормы. В. Ф. Бабенко [10, 11] решил эту задачу для классов $W(d^r/dx^r, F)$, где F — произвольное П-инвариантное множество. В [12–17] эти результаты распространены на более общие классы функций. В частности, из результатов работ [13–15] для классов $W(\mathfrak{L}_r, F)$ с описанным выше оператором $\mathfrak{L}_r$ и произвольным П-инвариантным множеством F вытекает оптимальность формулы прямоугольников

$$q_n(f) = \frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} f(2\pi k/n) \tag{2}$$

среди всевозможных „простых" квадратурных формул с n узлами. Кроме того, в [10, 11, 13–15] доказаны неравенства для перестановок моносплайнов, содержащих большинство известных результатов о моносплайнах минимальной нормы.

С другой стороны, в работах А. А. Лигуна [18, 19], А. А. Женсыкбаева [20] (для классов W_p^r) и В. Ф. Бабенко [21] (для классов $W(d^r/dx^r, F)$, где F — произвольное П-инвариантное множество) доказана оптимальность формулы (2) и для более широкой совокупности $Q_{n,r}(d^r/dx^r)$.

Цель данной работы — обобщение этого результата на случай классов $W(\mathfrak{L}_r, F)$ и квадратурных формул из множеств $Q_{n,r}(\mathfrak{L}_r)$.

Введем некоторые обозначения и определения. Пусть $\mu(f)$, $\nu(f)$ — соответственно число нулей с учетом кратности и число перемен знака функции f на периоде; свертка функций $f,\ g \in L_1$ определяется формулой

$$f * g(\tau) = \int_0^{2\pi} f(\tau - t)\, g(t)\, dt.$$

Для заданного оператора $\mathfrak{L}_r$ положим

$$\mathfrak{L}_0^* = I, \quad \mathfrak{L}_1^* = D - a_r,$$

$$\mathfrak{L}_2^* = (D - a_{r-1})(D - a_r), \ldots, \mathfrak{L}_{r-1}^* = (D - a_2) \ldots (D - a_r), \quad \mathfrak{L}_r^* = \mathfrak{L}_r;$$

β_j^* — характеристический полином оператора $\mathfrak{L}_j^*$,

$$B_j(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{e^{ikx}}{\beta_j^*(ik)}, \quad j = 1, 2, \ldots, r, \tag{3}$$

где Σ' означает суммирование по таким k, что $\beta_j^*(ik) \neq 0$.

Как известно, любую функцию f из класса $W(\mathfrak{L}_r, F)$ можно представить в виде

$$f(x) = \alpha + \int_0^{2\pi} B_r(x - t)\, \mathfrak{L}_r f(t)\, dt, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

При этом ядро B_r имеет свойство неувеличения осцилляции, т. е. (см., например, [2, с. 241]) выполняется неравенство $\nu(f) \le \nu(\mathfrak{L}_r f(t))$. Обозначим через $\mathfrak{M}_{n,r}$ множество функций вида

$$M(x) = -\sum_{k=1}^{m} \sum_{j \in A_k} c_{k,j} B_{r-j}(x_k - x), \tag{5}$$

где $x_1, \ldots, x_m$, $A_1, \ldots, A_m$ такие же, как и в (1), $\sum_{1 \le k \le m,\, 0 \in A_k} c_{k,0} = 2\pi$ (по аналогии со случаем, когда $\mathfrak{L}_r = d^r/dx^r$, эти функции будем называть моносплайнами). Пусть также

$$M_{n,\mathfrak{L}_r}(x) = -\frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} B_r\left(\frac{2\pi k}{n} - x\right).$$

Используя интегральное представление (4), нетрудно убедиться в том, что для произвольной квадратурной формулы $q \in Q_{n,r}(\mathfrak{L}_r)$ вида (1) такой, что $\sum_{1 \le k \le m,\, 0 \in A_k} c_{k,0} = 2\pi$,

$$R(f, q) = \int_0^{2\pi} M(x) \mathfrak{L}_r f(x) dx, \tag{6}$$

где $M(x)$ — некоторый моносплайн вида (5), у которого $x_1, \ldots, x_m, A_1, \ldots, A_m$ такие же, как в квадратурной формуле q.

Основной результат статьи содержится в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть $F \subset L_1$ — произвольное Π-инвариантное множество, $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{L}_r$ $(r \geq 2)$ — линейный дифференциальный оператор, удовлетворяющий приведенным выше условиям. Тогда среди квадратурных формул $q \in Q_{n,r}(\mathfrak{L}_r)$ наилучшей для класса $W(\mathfrak{L}_r, F)$ будет формула прямоугольников (2). При этом*

$$R^{\pm}(W(\mathfrak{L}_r, F); q_n) = \pm \sup_{\substack{\psi \in F \\ \psi \perp 1}} \int_0^{2\pi} \Pi(\pm M_{n,\mathfrak{L}_r}, t) \Pi(\psi, t) dt.$$

Теорема 1 обобщает результаты работ [18–21] на случай классов $W(\mathfrak{L}_r, F)$ с произвольным дифференциальным оператором $\mathfrak{L}_r$ описанного выше типа.

При доказательстве теоремы 1 основную роль будет играть следующая теорема, определяющая экстремальные свойства моносплайнов из $\mathfrak{M}_{n,r}$ и представляющая также самостоятельный интерес.

Теорема 2. *Пусть $n, r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$. Для любых моносплайна $M \in \mathfrak{M}_{n,r}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство*

$$(M_{n,\mathfrak{L}_r} - \lambda)_{\pm} \prec (M - \lambda)_{\pm}. \tag{7}$$

2. Вспомогательные утверждения. Пусть заданы $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$. Обозначим через $S_{n,r}(\alpha, \beta)$ множество 2π-периодических функций f таких, что производная $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна, $\mathfrak{L}_r(f)$ принимает только значения α и $-\beta$ и меняет знак на периоде не более $2n$ раз. Элементы множества $S_{n,r}(\alpha, \beta)$ будем называть совершенными (α, β)-сплайнами.

Существенную роль при доказательстве теоремы 2 будет играть следующая теорема, обобщающая теорему 8.3.2 из [2].

Теорема 3. *Для произвольного оператора $\mathfrak{L}_r$; $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$, $n \in \mathbb{N}$, любого набора множеств $A_1, \ldots, A_m \subset \{0, 1, \ldots, r-1\}$ таких, что*

$$\sum_{k=1}^{m} |A_k| \leq n,$$

найдется (α, β)-сплайн $f \in S_{n,r}(\alpha, \beta)$ такой, что

$$\mathfrak{L}_j f(x_k) = 0 \quad \text{для} \quad k = 1, \ldots, m; \; j \in A_k \setminus \{0\}, \tag{8}$$

$$f(x_k) = \{\min f(x); x \in \mathbb{R}\} \quad \text{для } k \text{ таких, что} \quad 0 \in A_k. \tag{9}$$

Доказательство теоремы 3 проведем по схеме доказательства теоремы 8.3.2 из [2]. Полагаем, что $m = n$ и множества A_k содержат в себе в точности по одному элементу (общая ситуация получается предельным переходом). Отметим также, что при $r = 2$ теорема 3 известна (см. [15], теорема 4). В дальнейшем считаем $r \geq 3$.

Определим множество $\mathfrak{M}^*_{n,r}$ функций вида

$$M(x) = -\sum_{k=1}^{n} \sum_{j \in A_k} \left(c_{k,j} B_{r-j}(x_k + x) + \tilde{c}_{k,j} B_{r-j-\lambda}(x_k + x)\right), \tag{10}$$

$$\sum_{1 \le k \le m,\ 0 \in A_k} c_{k,0} = 2\pi,$$

где $\lambda = 1$, если $j = 0, 1, \ldots, r-2$, и $\lambda = -1$, если $j = r-1$.

Заметим, что для произвольной константы λ разность $M - \lambda$ почти всюду отлична от нуля в силу ограничения на коэффициенты $c_{k,0}$.

Через $\delta_h(t)$ будем обозначать 2π-периодическое продолжение на всю числовую ось функции $(1/2h)\chi_{[-h,h]}$, где χ_A — характеристическая функция (индикатор) множества A; $\delta_{hh}(t) := \delta_h * \delta_h(t)$. Тогда $f_{hh}(t) := (f * \delta_{hh})(t)$ — вторая функция Стеклова с шагом $2h$ от функции f.

Теорема 3 будет доказана, если будут доказаны следующие леммы.

Лемма 1. *Существует (α, β)-сплайн $f(x) \in S_{n,r}(\alpha, \beta)$ такой, что*

$$\mathfrak{L}_j f(x_k) = \mathfrak{L}_{j+\lambda} f'(x_k) = 0, \quad \text{если} \quad j \in A_k \setminus \{0\}, \tag{11}$$

$$f(x_k) = \xi, \quad f'(x_k) = 0 \quad \text{для } k \text{ таких, что} \quad 0 \in A_k, \tag{12}$$

где λ такое же, как в (10), *$\xi \in \mathbb{R}$ и, кроме того, f принимает положительное значение в некоторой точке.*

Лемма 2. *Если сплайн $f(x)$ и число ξ такие же, как в лемме* 1, *то разность $f(x) - \xi$ всюду не отрицательна.*

В свою очередь, для доказательства леммы 2 нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3. *Для произвольного $M \in \mathfrak{M}^*_{n,r}$ и произвольной константы λ справедливо неравенство $\nu(M - \lambda) \le 2n$.*

Доказательство. Очевидно, произвольную функцию $M(x) \in \mathfrak{M}^*_{n,r}$ можно представить в виде

$$M(x) = m_0(x) + m_1(x) + \ldots + m_{r-2}(x),$$

где

$$m_j(x) = -\sum_{k:\ j \in A_k} \left(c_{k,j} B_{r-j}(x_k + x) + \tilde{c}_{k,j} B_{r-j-1}(x_k + x)\right), \quad j = 0, 1, \ldots, r-3,$$

$$m_{r-2}(x) = -\sum_{k:\ r-2 \in A_k} \left(c_{k,r-2} B_2(x_k + x) + \tilde{c}_{k,r-2} B_1(x_k + x)\right) -$$

$$- \sum_{k:\ r-1 \in A_k} \left(c_{k,r-1} B_2(x_k + x) + \tilde{c}_{k,r-1} B_1(x_k + x)\right).$$

Количество номеров k, по которым ведется суммирование в $m_j(x)$, обозначим через n_j. Тогда $\sum_{j=0}^{r-2} n_j = n$.

При любых фиксированных $C, E, F \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $h > 0$ функция

$$C + E\delta_{hh}(x_k + x) + F\delta'_{hh}(x_k + x) \tag{13}$$

имеет не более двух перемен знака на периоде. Значит, поскольку функция

$\mathfrak{L}^*_r(m_0-\lambda)_{hh}$ является комбинацией функций вида (13), при достаточно малых $h>0$ $\nu\left(\mathfrak{L}^*_r(m_0-\lambda)_{hh}\right) \le 2n_0$. Так как ядра B_j являются ядрами, не увеличивающими осцилляцию, то справедливо неравенство

$$\nu\left(\mathfrak{L}^*_s(m_0-\lambda)_{hh}\right) \le 2n_0, \quad s=0, 1, \ldots, r. \tag{14}$$

По индукции докажем, что при любом $k \le r-2$; $s=0, 1, \ldots, k$ выполняется неравенство

$$\nu\left(\mathfrak{L}^*_s\left(\sum_{j=0}^{k} m_j - \lambda\right)_{hh}\right) \le 2 \sum_{j=0}^{k} n_j. \tag{15}$$

При $k=0$ (15) содержится в (14). Предположим, что (15) имеет место для всех $k \le k_0$ и покажем, что оно справедливо также и для $k=k_0+1$. В самом деле,

$$\mathfrak{L}^*_{r-k_0-1}\left(\sum_{j=0}^{k_0+1} m_j - \lambda\right)_{hh} =$$

$$= \mathfrak{L}^*_{r-k_0-1}\left(\sum_{j=0}^{k_0} m_j\right)_{hh} + \mathfrak{L}^*_{r-k_0-1}(m_{k_0+1})_{hh} - \mathfrak{L}^*_{r-k_0-1}\lambda.$$

Функция $\mathfrak{L}^*_{r-k_0-1}\left(\sum_{j=0}^{k_0} m_j\right)$ может иметь разрывы только первого рода и только в точках разбиения $x_1<x_2<\ldots<x_n<x_1+2\pi$, причем точки разрыва функции $\mathfrak{L}^*_{r-k_0-1}\left(\sum_{j=0}^{k_0} m_j\right)$ при достаточно малых h не совпадают с точками разрыва функции $\mathfrak{L}^*_{r-k_0-1}(m_{k_0+1})_{hh}$. По предположению индукции функция $\mathfrak{L}^*_{r-k_0-1}\left(\sum_{j=0}^{k_0} m_j - \tilde{\lambda}\right)$ ($\tilde{\lambda}$ — произвольная константа) имеет не более $2\sum_{j=0}^{k_0} n_j$ перемен знака на периоде. Функция $\mathfrak{L}^*_{r-k_0-1}(m_{k_0+1})_{hh}$ представляет собой линейную комбинацию функций вида (13) и поэтому имеет не более $2n_{k_0+1}$ перемен знака на периоде. Таким образом, для малых $h>0$ соотношение (15) выполняется при $s=r-(k_0-1)$. С учетом свойства неувеличения осцилляции ядра типа B_j неравенство (15) справедливо также и при $s<r-(k_0-1)$. Из (15) при $s=0$, $k=r-2$ следует утверждение леммы 3.

Таким образом, $\nu(M-\lambda) \le 2n$ для произвольной функции $M \in \mathfrak{M}^*_{n,r}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Лемма 3 доказана. Ясно, что также $\nu(M(-\cdot)-\lambda) \le 2n$.

***Доказательство** леммы* 1. Для $f \in L_1$ по определению положим

$$\|f\|_{1;\alpha,\beta} = \|\alpha f_+ + \beta f_-\|_{L_1},$$

$$E_0(f)_{1;\alpha,\beta} = \inf\{\|f-u\|_{1;\alpha,\beta}\colon u \equiv \mathrm{const}\}.$$

Рассмотрим экстремальную задачу

$$E_0(M)_{1;\alpha,\beta} \to \inf, \quad M(-\cdot) \in \mathfrak{M}^*_{n,r}, \quad \sum_{k\colon 0\in A_k} c_{k,0} = 2\pi. \tag{16}$$

Так как $x_1, x_2, \ldots, x_m, A_1, \ldots, A_m$ фиксированы, решение этой задачи существует.

Пусть $\tilde{M}(t)$ и константа $\tilde{u}$ доставляют inf в (16),

$$\gamma(t) := \alpha \operatorname{sgn}\left(\tilde{M}(t) - \tilde{u}\right)_+ - \beta \operatorname{sgn}\left(\tilde{M}(t) - \tilde{u}\right)_-.$$

Используя принцип Лагранжа (см, например, [22]), получаем следующие необходимые условия экстремума:

$$B_{r-j} * \gamma(x_k) = \begin{cases} 0, & k:\ j \in A_k \setminus \{0\}, \\ \xi, & k:\ j \in A_k \cap \{0\}, \end{cases} \tag{17}$$

$$B_{r-j-\lambda} * \gamma(x_k) = 0, \quad k = 1, \ldots, n,\ j \in A_k, \tag{18}$$

где λ такое же, как и в (10).

Выше показано, что $\nu\left(\tilde{M} - \tilde{u}\right) \le 2n$, и поэтому $B_r * \gamma \in S_{n,r}(\alpha, \beta)$, причем в силу (17) и (18) для функции $f(x) = B_r * \gamma(x) - \xi$ выполнены условия (11). Покажем, что $\xi < 0$. Это обусловит выполнение условий (12). Из (16) и критерия элемента наилучшего (α, β)-приближения (см., например, [2, с. 11) вытекает, что $\int_0^{2\pi} \gamma(t)\, dt = 0$. Воспользовавшись этим, а затем соотношениями (15), (16), получим

$$0 < E_0\left(\tilde{M}\right)_{1;\alpha,\beta} = \int_0^{2\pi} \tilde{M}(t)\gamma(t)\, dt =$$

$$= -\sum_{k:\ 0 \in A_k} c_{k,0} \int_0^{2\pi} B_r(x_k - t)\gamma(t)\, dt = -\sum_{k:\ 0 \in A_k} c_{k,0}\xi = -2\pi\xi. \tag{19}$$

Лемма 1 доказана.

Для доказательства леммы 2 допустим, что функция $B_r * \gamma(x) - \xi$ меняет знак на периоде хотя бы один раз, и придем к противоречию с тем, что $B_r * \gamma \in S_{n,r}(\alpha, \beta)$.

Лемма 4. *Пусть на* $[a, b]$ *определена трижды непрерывно дифференцируемая функция* f *такая, что* $f(a) = f(b) = 0$; $A, B \in \mathbb{R}$ *и в некоторой точке* $t_0 \in (a, b)$

$$\left(\frac{d}{dx} - A\right) f \Big|_{t_0} = \left(\frac{d}{dx} - A\right)\left(\frac{d}{dx} - B\right) f \Big|_{t_0} = 0, \tag{20}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx} - A\right)\left(\frac{d}{dx} - B\right) f \Big|_{t_0} \ne 0. \tag{21}$$

Тогда существует такая точка $t_* \in (a, b)$, $t_* \ne t_0$, *что*

$$\left(\frac{d}{dx} - A\right) f \Big|_{t_*} = 0. \tag{22}$$

Доказательство. Сделаем замену $F(x) = f(x)e^{-Ax}$ и учтем, что условия (20), (21) эквивалентны следующим: $F'(t_0) = F''(t_0) = 0$, $F'''(t_0) \ne 0$. Эти условия обеспечивают существование точки $t_* \ne t_0$, в которой $F'(t_*) = 0$ и, следовательно, (22) имеет место. Лемма доказана.

Вследствие (17), (18) функция $f(x) = B_r * \gamma(x) - \xi$ имеет не менее $2n_0 + 1$ нулей с учетом кратности (здесь и далее достаточно учитывать каждый нуль кратности больше трех трижды). Учитывая справедливость аналога теоремы Ролля для дифференциального оператора $\mathfrak{L}_1$ и приведенное замечание, видим, что справедливо неравенство $\mu(\mathfrak{L}_1 f) \ge 2n_0 + 2n_1 + 1$. Аналогично

$$\mu(\mathfrak{L}_j f) \geq 2 \sum_{s=0}^{j} n_s + 1, \quad j = 2, \ldots, r-3. \tag{23}$$

Нетрудно заметить, что (23) справедливо также и при $j = r-2$. В этом случае под нулем кратности 3 функции $\mathfrak{L}_{r-2} f(t)$ следует понимать точку t_0, в которой $\mathfrak{L}_{r-2} f(t_0) = \mathfrak{L}_{r-1} f(t_0) = 0$, и в ней $\mathfrak{L}_r f$ меняет знак.

Таким образом, $\mathfrak{L}_r f(t)$ меняет знак на периоде не менее чем $2n+1$ раз, что невозможно. Лемма 2, а вместе с ней и теорема 3 доказаны.

3. Доказательство основных результатов. В силу теоремы 1.5.1 из [2] неравенство (7) будет доказано, если мы докажем, что для любого $M \in \mathfrak{M}_{n,r}$ при всех $\alpha, \beta \in (0, \infty)$

$$E_0(M_{n,\mathfrak{L}_r})_{1;\alpha,\beta} \leq E_0(M)_{1;\alpha,\beta}. \tag{24}$$

В свою очередь, для доказательства (24) достаточно доказать оптимальность формулы прямоугольников среди квадратурных формул из $Q_{n,r}$ на классе $W(\mathfrak{L}_r, F)$ с

$$F = F_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}} = \{ f \in L_\infty \colon \|f\|_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}} := \| \alpha^{-1} f_+ + \beta^{-1} f_- \|_{L_\infty} \leq 1 \}.$$

Действительно, в силу теоремы двойственности для наилучших (α, β)-приближений константой в пространстве L_1 (см., например, [2], теорема 1.2.6) для любой квадратурной формулы $q \in Q_{n,r}$ будем иметь

$$R^+(W(\mathfrak{L}_r, F_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}}); q) =$$

$$= \sup_{\substack{\|\varphi\|_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}} \leq 1 \\ \varphi \perp 1}} \int_0^{2\pi} M(x)\varphi(x)\,dx = E_0(M)_{1;\alpha,\beta},$$

где M — моносплайн из $\mathfrak{M}_{n,r}$, соответствующий в силу соотношений (6) квадратурной формуле q.

Таким образом, если будет доказано, что при всех $\alpha, \beta \in (0, \infty)$

$$R^+(W(\mathfrak{L}_r, F_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}}); q) \geq R^\pm(W(\mathfrak{L}_r, F_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}}); q_n), \tag{25}$$

то для любого другого моносплайна $M \in \mathfrak{M}_{n,r}$ при всех $\alpha, \beta \in (0, \infty)$ будет выполняться равенство (24).

Итак, докажем (25). Пусть фиксирована квадратурная формула $q \in Q_{n,r}$ вида (1). По теореме 3 найдется сплайн $f \in S_{n,r}(\alpha, \beta)$, для которого выполняются условия (8) и (9) с $x_1, x_2, \ldots, x_m, A_1, \ldots, A_m$ такими же, как и в формуле q. Тогда поскольку $S_{n,r}(\alpha, \beta) \in W(\mathfrak{L}_r, F_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}})$, будем иметь

$$R^+(W(\mathfrak{L}_r, F_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}}); q) \geq R(f - \min f, q) =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[f(x) - \min_t f(t) \right] dx = -2\pi \min_t f(t). \tag{26}$$

Кроме того (см., например, [15]),

$$R^+(W(\mathfrak{L}_r, F_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}}); q_n) = -2\pi \min_t \varphi_{n,\mathfrak{L}_r;\alpha,\beta}(t),$$

где

$$\varphi_{n,0;\alpha,\beta}(x) := \alpha \operatorname{sign}\left(\cos nx - \cos\frac{\pi\beta}{\alpha+\beta}\right)_+ -$$

$$- \beta \operatorname{sign}\left(\cos nx - \cos\frac{\pi\beta}{\alpha+\beta}\right)_-;$$

$$\varphi_{n,\mathfrak{L}_r;\alpha,\beta}(x) = B_r * \varphi_{n,0;\alpha,\beta}(x).$$

В [15] для сплайнов $f \in S_{n,r}(\alpha,\beta)$ и более общих сплайнов доказано соотношение

$$(\varphi_{n,\mathfrak{L}_r;\alpha,\beta} - \lambda)_\pm \prec (f-\lambda)_\pm, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{27}$$

Частным случаем (27) является неравенство

$$-2\pi \min_t \varphi_{n,\mathfrak{L}_r;\alpha,\beta}(t) \le -2\pi \min_t f(t), \tag{28}$$

из которого и следует (25).

Таким образом, соотношение (25), а значит, соотношение (7) и теорема 3 доказаны.

Перейдем к доказательству теоремы 1 для произвольного перестановочно-инвариантного множества F. Представим погрешность произвольной квадратурной формулы $q \in Q_{n,r}$ на элементе $f = B_r * \psi + C \in W(\mathfrak{L}_r, F)$ в интегральном виде

$$R(f;q) = \int_0^{2\pi} M(x)\psi(x)\,dx,$$

где $M(x)$ — моносплайн вида (5) с $c_{k,j}$ и x_k такими же, как в формуле q. Тогда, используя предложение 1.3.4 из [2], теорему 2 данной статьи, предложение 1.3.14 из [2], имеем

$$R^+(W(\mathfrak{L}_r, F); q_n) = \operatorname*{Sup}_{\substack{\varphi\in F\\ \varphi\perp 1}} \int_0^{2\pi} \Pi(M_{n,\mathfrak{L}_r}; x)\,\varphi(x)\,dx =$$

$$= \operatorname*{Sup}_{\substack{\varphi\in F\\ \varphi\perp 1}} \int_0^{2\pi} \Pi(M_{n,\mathfrak{L}_r}; x)\,\Pi(\varphi; x)\,dx \le$$

$$\le \operatorname*{Sup}_{\substack{\varphi\in F\\ \varphi\perp 1}} \int_0^{2\pi} \Pi(M; x)\,\Pi(\varphi; x)\,dx = R^+(W(\mathfrak{L}_r, F); q).$$

Аналогично,

$$R^-(W(\mathfrak{L}_r, F); q_n) \ge R^-(W(\mathfrak{L}_r, F); q).$$

Теорема 1 доказана.

1. *Корнейчук Н. П., Лигун А. А., Доронин В. Г.* Аппроксимация с ограничениями. – Киев: Наук. думка, 1982. – 250 с.
2. *Корнейчук Н. П., Бабенко В. Ф., Лигун А. А.* Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. – Киев: Наук. думка, 1992. – 304 с.

3. *Бабенко В. Ф.* Приближение классов сверток // Сиб. мат. журн. – 1987. – **28**, № 5. – С. 6–21.
4. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
5. *Никольский С. М.* Квадратурные формулы. – М.: Наука, 1988. – 256 с.
6. *Моторный В. П.* О наилучшей квадратурной формуле вида $\sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k)$ для некоторых классов периодических дифференцируемых функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1974. – **38**, № 3. – С. 583–614.
7. *Лигун А. А.* Точные неравенства для сплайн-функций и наилучшие квадратурные формулы для некоторых классов функций // Мат. заметки. - 1976. – **19**, № 6. – С. 913–926.
8. *Женсыкбаев А. А.* Наилучшая квадратурная формула для некоторых классов периодических дифференцируемых функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1977. – **41**, № 5. – С. 1110–1124.
9. *Женсыкбаев А. А.* Моносплайны минимальной нормы и наилучшие квадратурные формулы // Успехи мат. наук. – 1981. – **36**, № 4. – С. 107–159.
10. *Бабенко В. Ф.* Неравенства для перестановок дифференцируемых периодических функций, задачи приближения и приближенного интегрирования // Докл. АН СССР. – 1983. – **272**, № 5. – С. 1038–1041.
11. *Babenko V. F.* Approximations, widths and optimal quadrature formulae for classes of periodic functions with rearrengement invariant sets of derivatives // Anal. Math. – 1987. – **13**, № 4. – P. 15–28.
12. *Бабенко В. Ф., Гранкина Т. А.* О наилучших квадратурных формулах на классах сверток с $O(M, \Delta)$-ядрами // Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложения. – Днепропетровск: Днепропетр. ун-т, 1982. – С. 6–13.
13. *Бабенко В. Ф.* Неравенства для перестановок дифференцируемых периодических функций и их применения // Теория приближения функций: Тр. междунар. конф. по теории приближения функций. Киев, 1983. – М.: Наука, 1987. – С. 26–30.
14. *Бабенко В. Ф.* Наилучшие квадратурные формулы для некоторых классов сверток. Исследования по теоретическим и прикладным вопросам математики. – Киев: Ин-т математики АН СССР, 1986. – С. 7–10.
15. *Бабенко В. Ф.* Поперечники и наилучшие квадратурные формулы для классов сверток // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 9. – С. 1135–1148.
16. *Чахкиев М. А.* Линейные дифференциальные операторы и оптимальные квадратурные формулы // Докл. АН СССР. – 1983. – **273**, № 1. – С. 60–65.
17. *Нгуен Тхи Тхьеу Хоа.* О наилучших методах суммирования и восстановления функций на классах, задаваемых свертками, не увеличивающими осцилляцию // Успехи мат. наук. – 1984. – **39**, № 2. – С. 117–178.
18. *Лигун А. А.* О наилучших квадратурных формулах для некоторых классов периодических функций // Мат. заметки. – 1978. – **24**, № 5. – С. 661–669.
19. *Лигун А. А.* Точные неравенства для совершенных сплайнов минимального дефекта // Изв. вузов. Сер. мат. – 1984. – № 5. – С. 32–38.
20. *Женсыкбаев А. А.* Об оптимальности моносплайнов минимального дефекта // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1982. – **46**, № 6. – С. 1175–1198.
21. *Бабенко В. Ф.* Точные неравенства для перестановок периодических моносплайнов и наилучшие квадратурные формулы // Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложения: Сб. науч. тр. – Днепропетровск: Днепропетр. ун-т, 1986. – С. 4–11.
22. *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление. – М.: Наука, 1979. – 432 с.

Получено 16.03.95