УДК 517.547

М. В. Заболоцький (Львів. ун-т)

ТЕОРЕМИ ТИПУ ВАЛІРОНА ТА ВАЛІРОНА – ТІТЧМАРША ДЛЯ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ НУЛЬОВОГО ПОРЯДКУ

By using the known asymptotics of the counting function of zeros of an entire function f of order zero, we find an asymptotics for $\ln f$ in the case where zeros lie on one ray. The inverse problem is also considered.

За відомою асимптотикою рахуючої функції нулів цілої функції f нульового порядку знайдено асимптотику $\ln f$ при умові, що нулі f лежать на одному промені. Розглядається також обернена задача.

1. Вступ і основні результати. Нехай f — трансцендентна ціла функція така, що $f(0)=1$, $n(t)$ — рахуюча функція її нулів,

$$N(r) = \int_0^r \frac{n(t)}{t}\,dt.$$

Валірон [1] показав, що коли всі нулі функції f від'ємні, $n(t) \sim \Delta t^{\rho(t)}$ $(t \to \infty)$, $\Delta \in (0, \infty)$, $\rho(t)$ — уточнений порядок, а число $\rho = \lim\limits_{t \to \infty} \rho(t)$ неціле, тоді для довільного $\delta > 0$ рівномірно відносно $\theta \in [-\pi+\delta, \pi-\delta]$ виконується асимптотичне співвідношення

$$\ln f(re^{i\theta}) \sim \frac{\pi\Delta}{\sin \pi\rho} e^{i\rho\theta} r^{\rho(r)} \quad (r \to \infty),$$

де $\ln f(z)$ — однозначна в куті $\{z : |\arg z| \le \pi - \delta\}$ вітка многозначної функції $\operatorname{Ln} f(z)$, $\ln f(0) = 0$.

В [1] також доведено, що коли f має тільки від'ємні нулі і нецілий порядок ρ, а

$$\ln|f(r)| \sim \frac{\pi\Delta}{\sin \pi\rho} r^{\rho(r)} \quad (r \to \infty),$$

то $n(t) \sim \Delta t^{\rho(t)}$ $(t \to \infty)$. Простіше це твердження довів Тітчмарш [2]. Теореми, в яких за відомою асимптотикою функції $n(t)$ робиться висновок про асимптотику функції $\ln f(z)$, називають теоремами типу Валірона, а теореми, в яких за відомою асимптотикою логарифму модуля цілої функції $f(z)$ на скінченній множині променів робиться висновок про асимптотику рахуючої функції $n(t)$ нулів f, називають теоремами типу Валірона – Тітчмарша.

В [3, 4] доведено теореми типу Валірона та Валірона – Тітчмарша в термінах двочленної асимптотики, тобто розглядається випадок, коли

$$n(t) = \Delta t^{\rho(t)} + \Delta_1 t^{\rho_1(t)} + o(t^{\rho_1(t)}) \quad (t \to \infty),$$

і відповідно

$$\ln f(re^{i\theta}) \sim \frac{\pi\Delta}{\sin \pi\rho} e^{i\rho\theta} r^{\rho(r)} + \frac{\pi\Delta_1}{\sin \pi\rho_1} e^{i\rho_1\theta} r^{\rho_1(r)} + o(r^{\rho_1(r)}) \quad (r \to \infty),$$

де $\Delta \in (0, +\infty)$, $\Delta_1 \in \mathbb{R}$, $\rho(r)$, $\rho_1(r)$ — уточнені порядки, $\rho(r) \to \rho$, $\rho_1(r) \to \rho_1$ при $r \to \infty$, $[\rho] < \rho_1 < \rho$.

Розглянемо аналогічні задачі для цілих трансцендентних функцій нульового порядку. Нехай $\rho(r)$ — нульовий уточнений порядок, тобто:

1) $\rho(r)$ — неперервно диферецційовна на $[0;+\infty)$ функція;
2) $\rho(r) \geq 0$ на $[0,+\infty)$;
3) $\rho(r) \to 0$ $(r \to \infty)$;
4) $\rho'(r) r \ln r \to 0$ $(r \to \infty)$;
5) $r^{\rho(r)} = V(r) \uparrow +\infty$ $(r \to \infty)$.

Справедливі наступні теореми.

Теорема 1. *Нехай* φ — *інтегровна на кожному скінченному проміжку з* $\mathbb{R}_+$ *функція,* $\rho(r)$ — *нульовий уточнений порядок,* $0 < \Delta < +\infty$, $\varepsilon(r) = \rho(r) + r\rho'(r)\ln r$, f — *ціла трансцендентна функція нульового порядку, всі нулі якої від'ємні, і*

$$n(t) = \Delta V(t) + \varphi(t) \quad (t \geq 1). \tag{1}$$

Якщо

$$\varphi(t) = o(\varepsilon(t)V(t)) \quad (t \to \infty), \tag{2}$$

то для $-\pi < \theta < \pi$

$$\ln f(re^{i\theta}) = \Delta \int_1^r \frac{V(t)}{t} dt + i\Delta\theta V(r) + o(V(r)) \quad (r \to \infty), \tag{3}$$

причому остання оцінка виконується рівномірно в будь-якому куті $-\pi + \delta \leq \theta \leq \pi - \delta$, $\delta > 0$.

Теорема 2. *Нехай* Δ, $\rho(r)$ *такі ж, як і в теоремі* 1, f — *ціла функція нульового порядку з від'ємними нулями і*

$$\ln|f(r)| = \Delta \int_1^r \frac{V(t)}{t} dt + o(V(r)) \quad (r \to \infty). \tag{4}$$

Тоді

$$n(r) = \Delta V(r) + o(V(r)) \quad (r \to \infty). \tag{5}$$

Зауваження. **1.** Якщо функція φ замість (2) задовольняє слабшу умову

$$\varphi(t) = o(V(t)) \quad (t \to \infty), \tag{6}$$

то за умов теореми 1 виконується співвідношення $(-\pi < \theta < \pi)$

$$\ln f(re^{i\theta}) = \Delta \int_1^r \frac{V(t)}{t} dt + \int_1^r \frac{\varphi(t)}{t} dt + i\Delta\theta V(r) + o(V(r)) =$$

$$= N(r) + i\Delta\theta V(r) + o(V(r)) \quad (r \to \infty), \tag{7}$$

причому ця оцінка виконується рівномірно в будь-якому куті $-\pi + \delta \leq \theta \leq \pi - \delta$, $\delta > 0$.

2. Нехай за умов теореми 2 замість (4) виконується

$$\ln|f(r)| = \Delta \int_1^r \frac{V(t)}{t} dt + \int_1^r \frac{\varphi(t)}{t} dt + o(V(r)) \quad (r \to \infty), \tag{8}$$

де $\varphi(r)$ задовольняє (6) і

$$\int_1^r \frac{\varphi(t)}{t} dt \neq o(V(r)) \quad (r \to \infty).$$

Тоді, як буде видно з доведення теореми 2, функція $n(t)$ задовольняє умову (5).

Наступна теорема показує, що, взагалі кажучи, з (8) не можна одержати точнішої оцінки, ніж (5).

Теорема 3. *Нехай f — ціла функція нульового порядку з від'ємними нулями і*

$$\ln|f(r)| = \frac{\Delta}{p+1}\ln^{p+1}r + \frac{\Delta_1}{q+1}\ln^{q+1}r + O(\ln^{p-1}r) \quad (r\to\infty), \tag{9}$$

де $0<q<p<q+1$, $0<\Delta<+\infty$, $\Delta_1\in\mathbb{R}$. *Тоді*

$$n(r) = \Delta\ln^p r + O(\ln^p r/\ln\ln r) \quad (r\to\infty), \tag{10}$$

і остання оцінка є точною.

***Зауваження* 3.** Теорема 3 є аналогом однієї теореми з [5], яка вказує на те, що коли f — ціла функція порядку ρ, $0<\rho_1<\rho<1$, з від'ємними нулями, $0<\Delta<+\infty$, $\Delta_1\in\mathbb{R}$ і

$$\ln|f(r)| = \frac{\pi\Delta}{\sin\pi\rho}r^{\rho} + \frac{\pi\Delta_1}{\sin\pi\rho_1}r^{\rho_1} + o(r^{\rho_1}) \quad (r\to\infty),$$

тоді $n(t)=\Delta t^{\rho}+O(t^{\rho}/\ln t)$ $(t\to\infty)$.

2. Допоміжні результати. Доведемо декілька лем, які будемо використовувати при доведенні теорем 1–3.

Лема 1. *Нехай* $0<\Delta<\infty$, $\rho(t)$ *— нульовий уточнений порядок,* $V(t)=t^{\rho(t)}$, $n(t)\sim\Delta V(t)$ $(t\to\infty)$. *Тоді для* $z=re^{i\theta}, -\pi<\theta<\pi$, *виконуються співвідношення*

$$\int_1^r \frac{n(t)-\Delta V(t)}{z+t}\,dt = o(V(r)) \quad (r\to\infty), \tag{11}$$

$$z\int_r^\infty \frac{n(t)-\Delta V(t)}{t(t+z)}\,dt = o(V(r)) \quad (r\to\infty), \tag{12}$$

причому оцінки (11) *і* (12) *рівномірні відносно* θ *в куті* $|\theta|\le\pi-\delta$, $\delta>0$.

Доведення. Нехай $0<\delta<1$ і $0<\varepsilon<1$ — довільні числа. Тоді існує $r_0>1$ таке, що для всіх $r\ge r_0$ маємо $|n(r)-\Delta V(r)|<(\varepsilon/2)\sin(\delta/2)V(r)$. Покладемо $r_1=2Kr_0/(\varepsilon\sin(\delta/2))$, де $K>1$ — стала така, що $|n(r)-\Delta V(r)|\le$ $\le KV(r)$, $r\ge1$. Маємо $|t+z|\ge(t+r)\sin(\delta/2)$ і для $r>r_1$ одержуємо

$$\left|\int_1^r \frac{n(t)-\Delta V(t)}{t+z}\,dt\right| \le \left(\int_1^{r_0}+\int_{r_0}^r\right)\frac{n(t)-\Delta V(t)}{|t+z|}\,dt \le$$

$$\le \frac{K}{\sin\delta/2}\int_1^{r_0}\frac{V(t)}{t+r}\,dt + \int_{r_0}^r \frac{\varepsilon(\sin\delta/2)V(t)}{2(\sin\delta/2)(t+r)}\,dt \le$$

$$\le \frac{KV(r_0)}{r\sin\delta/2}r_0 + \frac{\varepsilon}{2}\int_{r_0}^r\frac{V(t)}{r}\,dt \le \frac{\varepsilon}{2}V(r_0) + \frac{\varepsilon}{2r}V(r)(r-r_0) < \varepsilon V(r),$$

що доводить (11). Далі, враховуючи, що $V(t)/\sqrt{t}$ монотонно спадає при $t\to$ $\to+\infty$, для $r\ge r_0$ маємо

$$\left| z \int_r^{\infty} \frac{n(t) - \Delta V(t)}{t(t+z)}\, dt \right| \le \frac{\varepsilon r}{2} \int_r^{\infty} \frac{V(t)}{t^2}\, dt = \frac{\varepsilon r}{2} \frac{V(r)}{\sqrt{r}} \int_r^{+\infty} t^{-3/2}\, dt < \varepsilon V(r),$$

і співвідношення (12) доведене.

Лема 2. *Нехай* $\rho(r)$ — *нульовий уточнений порядок,* $k \in \mathbb{Z}_+$,

$$a_k(r) = \int_1^r t^{\rho(t)+k}\, dt, \quad b_k(r) = \int_r^{\infty} t^{\rho(t)-k-2}\, dt.$$

Тоді для $z = re^{i\theta}$, $-\pi < \theta < \pi$,

$$\int_1^r \frac{V(t)}{t+z} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z^{k+1}}\, a_k(r), \tag{13}$$

$$z \int_r^{\infty} \frac{V(t)}{t(t+z)} dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{k+1} b_k(r). \tag{14}$$

Доведення. Нехай

$$z = re^{i\theta}, \quad |\theta| \le \pi - \delta, \quad \delta > 0, \quad 0 < \varepsilon < 1, \quad a_k(r, \varepsilon) = \int_1^{(1-\varepsilon)r} t^{\rho(t)+k}\, dt.$$

Тоді

$$\int_1^r \frac{V(t)}{t+z} dt = \int_1^r \left(\frac{V(r)}{z} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (t/z)^k \right) dt =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_1^{(1-\varepsilon)r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{\rho(t)+k} (-1)^k}{z^{k+1}}\, dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(r, \varepsilon) \left((-1)^k \right) \frac{e^{-i\theta(k+1)}}{r^{k+1}}. \tag{15}$$

Для довільного $n \in \mathbb{N}$ маємо

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-i\theta(k+1)} \right| = \left| \frac{e^{-i\theta} \left(1 - (-1)^{n+1} e^{-i(n+1)\theta} \right)}{1 + e^{-i\theta}} \right| \le$$

$$\le \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{1+\cos\theta}} \le \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\cos\delta}}.$$

Далі,

$$\sup_{0<\varepsilon<1} \frac{a_k(r, \varepsilon)}{r^{k+1}} = \frac{a_k(r)}{r^{k+1}} \le \frac{V(r) \int_1^r t^k\, dt}{r^{k+1}} \le \frac{V(r)}{k+1} \to 0 \quad (k \to +\infty).$$

Зауважимо, що при фіксованому $\varepsilon > 0$ і $r > 0$ величина $a_k(r, \varepsilon) r^{-k-1}$ монотонно спадає при $k \to \infty$. Дійсно,

$$\frac{a_{k+1}(r, \varepsilon)}{r^{k+2}} - \frac{a_k(r, \varepsilon)}{r^{k+1}} = \frac{1}{r^{k+1}} \int_1^{(1-\varepsilon)r} V(t) \left(t^{k+1}/r - t^k \right) dt < 0.$$

Звідси за ознакою рівномірної збіжності Діріхле одержуємо, що ряд (15) збігається рівномірно відносно $\varepsilon \in (0, 1)$ і, таким чином, можливий граничний перехід під знаком суми (15), звідки й випливає справедливість (13).

Нехай

$$b_k(r,\varepsilon) = \int\limits_{(1+\varepsilon)r}^{+\infty} V(t)t^{-k-2}\,dt.$$

Аналогічно з викладеним вище маємо

$$z\int\limits_r^{+\infty}\frac{V(t)}{t(t+z)}dt = z\int\limits_r^{+\infty}\frac{V(t)}{t^2}\frac{1}{1+z/t}\,dt =$$

$$= \int\limits_r^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{k+1}}{t^{k+2}}V(t)\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{(1+\varepsilon)r}^{+\infty}V(t)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{k+1}}{t^{k+2}}\,dt =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\sum_{k=0}^{\infty}b_k(r,\varepsilon)(-1)^k z^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty}b_k(r)(-1)^k z^{k+1},$$

тобто (14), оскільки ряд $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k b_k(r,\varepsilon)z^{k+1}$ збігається рівномірно відносно $\varepsilon\in(0,1)$.

Лема 3. *Нехай* $\rho(t)$ — *уточнений порядок,* $\tau(t)$ — *неперервна функція на* $(1,+\infty)$, $\tau(t)\to 0$ *при* $t\to\infty$,

$$\hat{a}_k(r) = \frac{1}{k+1}\int\limits_1^r V(t)t^k\tau(t)\,dt,$$

$$\hat{b}_k(r) = \frac{1}{k+1}\int\limits_r^{+\infty}V(t)t^{-k-2}\tau(t)\,dt.$$

Тоді

$$\sum\nolimits_1^* = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{|\hat{a}_k(r)|}{r^{k+1}} = o(V(r)) \quad (r\to\infty), \tag{16}$$

$$\sum\nolimits_2^* = \sum_{k=0}^{\infty}\left|\hat{b}_k(r)\right| r^{k+1} = o(V(r)) \quad (r\to\infty). \tag{17}$$

Доведення. Враховуючи, що $\tau(r)\to 0$ при $r\to\infty$, одержуємо $\tau^*(r) = \sup\{|\tau(t)|: r/2\le t\le r\}\to 0$ при $r\to\infty$ і

$$\sum\nolimits_1^* \le \sum_{k=0}^{\infty}\frac{V(r)}{(k+1)\,r}\left(\int\limits_1^{r/2} + \int\limits_{r/2}^{r}\right)\left(\frac{t}{r}\right)^k|\tau(t)|\,dt \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{\infty}\frac{V(r)}{(k+1)\,r}\left(\frac{1}{2^k}\int\limits_1^{r/2}|\tau(t)|\,dt + \frac{|\tau^*(r)|}{r^k}\int\limits_{r/2}^{r}t^k\,dt\right) \le$$

$$\le V(r)\left\{\left(\int\limits_1^{r/2}|\tau(t)|\,dt/r\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k(k+1)} + \left|\tau^*(r)\right|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^2}\right\} = o(V(r)),$$

$r\to\infty$, оскільки

$$\lim_{r\to\infty}\left(\int\limits_1^{r/2}|\tau(t)|\,dt/r\right) = \lim_{r\to\infty}\frac{|\tau(r/2)|}{2} = 0, \quad \lim_{r\to\infty}\left|\tau^*(r)\right| = 0.$$

Далі,

$$\sum\nolimits_2^* \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{k+1}}{k+1}\left(\int_r^{2r} + \int_{2r}^{\infty}\right) V(t)\, t^{-k-2}\, |\tau(t)|\, dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{k+1}}{k+1}\left(J_1^{(k)}(r) + J_2^{(k)}(r)\right). \tag{18}$$

Оцінимо $J_1^{(k)}(r)$. Маємо

$$\tilde{\tau}(r) = \sup\{|\tau(t)|: r \le t \le 2r\} \to 0, \quad r \to \infty,$$

і

$$J_1^{(k)}(r) \le V(2r) \int_r^{2r} |\tau(t)| t^{-k-2}\, dt \le$$

$$\le V(2r)\,|\tilde{\tau}(r)| \int_r^{2r} t^{-k-2}\, dt \le \frac{1}{k+1} V(2r)\,|\tilde{\tau}(r)|\, t^{r-k-1}.$$

Таким чином,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{k+1}}{k+1} J_1^{(k)}(r) \le V(2r)\,|\tilde{\tau}(r)| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = o(V(r)) \quad (r \to \infty). \tag{19}$$

Враховуючи, що

$$A(r) = \int_{2r}^{\infty} \frac{|\tau(r)|\, V(t)}{t^2}\, dt$$

збігається, маємо

$$\lim_{r\to\infty} \frac{A(r)}{V(r)/r} = \lim_{r\to\infty} \frac{-V(2r)\,|\tau(2r)|\, r^{-2}\, 2^{-1}}{V(r)(\rho'(r) r \ln r + \rho(r) - 1) r^{-2}} = 0,$$

тобто $rA(r) = o(V(r))$, $r \to \infty$.

Тепер для $J_2^{(k)}(r)$ одержуємо вираз

$$J_2^{(k)}(r) = \frac{1}{r^k} \int_{2r}^{\infty} V(t)\,|\tau(t)|\, t^{-2} \left(\frac{r}{t}\right)^k dt \le \frac{A(r)}{2^k r^k},$$

звідки

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{k+1}}{k+1} J_2^{(k)}(r) \le r A(r) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k (k+1)} = o(V(r)) \quad (r \to \infty). \tag{20}$$

З (18)–(20) маємо (17). Лему 3 доведено.

Лема 4. *Нехай* $0 < \Delta < \infty$, $g(r)$ *— диференційовна на* $[1, +\infty)$ *функція,* $g'(r)$ *— спадна функція, а* $L(r)$ *— повільнозмінна функція і* $L(r) \to +\infty$ *при* $r \to \infty$. *Якщо*

$$g(r) = \Delta \int_1^r \frac{L(t)}{t}\, dt + o(L(r)) \quad (r \to \infty), \tag{21}$$

то

$$g'(r) = \Delta L(r)/r + o(L(r)/r) \quad (r \to \infty). \tag{22}$$

Доведення. Нехай $\eta = \eta(r)$, $0 < \eta < 1$ і $\eta \to 0$ при $r \to \infty$. Враховуючи, що $g'(r)$ спадає, маємо

$$\frac{g(r) - g(r - \eta r)}{\eta r} \geq g'(r) \geq \frac{g(r + \eta r) - g(r)}{\eta r}. \tag{23}$$

Далі $(0 < \theta < 1)$,

$$\frac{g(r + \eta r) - g(r)}{\eta r} = \left(\Delta \int_r^{r+\eta r} \frac{L(t)}{t}\, dt + o(L(r))\right)(\eta r)^{-1} =$$

$$= \frac{\Delta L(r + \theta\eta r) \ln (1 + \eta)}{\eta r} + \frac{o(L(r))}{\eta r} =$$

$$= \frac{\Delta(1 + o(1))}{r} L(r) + o\left(\frac{L(r)}{\eta r}\right) \quad (r \to \infty).$$

Зрозуміло, що $\eta = \eta(r)$ можна вибрати так, щоб

$$\frac{g(r + \eta r) - g(r)}{\eta r} = \frac{\Delta L(r)}{r}(1 + o(1)) \quad (r \to \infty).$$

Аналогічно показуємо, що

$$\frac{g(r) - g(r - \eta r)}{\eta r} = \frac{\Delta L(r)}{r}(1 + o(1)) \quad (r \to \infty),$$

і (22) випливає з (23).

Лема 5. *Нехай $\rho(r)$ — нульовий уточнений порядок. Тоді*

$$\int_1^{+\infty} \frac{dV(t)}{t + x} = \int_1^{+\infty} \frac{V(t)\, dt}{(t + x)^2} = (1 + o(1)) \frac{V(x)}{x} \quad (x \to \infty). \tag{24}$$

Доведення. Нехай ε — довільне число. Тоді з властивостей нульового уточненого порядку випливає

$$(\exists\, x_0 \in \mathbb{R})\ (\forall\, x > x_0)\ (\forall\, t \in [\varepsilon, 1/\varepsilon]) : |V(tx) - V(x)| < \varepsilon V(x).$$

Тепер для $x > x_0$ маємо

$$0 \leq \int_1^{\varepsilon x} \frac{V(t)}{(t + x)^2}\, dt \leq V(\varepsilon x) \frac{1}{x^2} \varepsilon x \leq (1 + \varepsilon)\varepsilon \frac{V(x)}{x}, \tag{25}$$

і, враховуючи, що $V(t) / \sqrt{t} \downarrow 0$ при $t \to +\infty$, одержуємо

$$0 \leq \int_{x/\varepsilon}^{+\infty} \frac{V(t)}{(t + x)^2}\, dt \leq \int_{x/\varepsilon}^{+\infty} V(t) t^{-2}\, dt \leq$$

$$\leq \frac{V(x/\varepsilon)}{\sqrt{x/\varepsilon}} \int_{x/\varepsilon}^{+\infty} t^{-3/2}\, dt = V(x/\varepsilon)\frac{2\varepsilon}{x} \leq 2(1 + \varepsilon)\varepsilon \frac{V(x)}{x}. \tag{26}$$

Далі, справедливі співвідношення

$$\int_{\varepsilon x}^{x/\varepsilon} \frac{V(t)}{(t + x)^2}\, dt \leq \frac{1}{x} \int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} \frac{V(\tau x)}{(1 + \tau)^2}\, d\tau \leq (1 + \varepsilon) \frac{V(x)}{x} \int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} \frac{d\tau}{(1 + \tau)^2} =$$

$$= (1+\varepsilon)\,\frac{V(x)}{x}\left(\frac{1}{1+\varepsilon}-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right) = (1-\varepsilon)\,\frac{V(x)}{x}, \tag{27}$$

і аналогічно

$$\int\limits_{\varepsilon x}^{x/\varepsilon}\frac{V(t)}{(t+x)^2}\,dt \ \geq\ \frac{(1-\varepsilon)^2}{1+\varepsilon}\,\frac{V(x)}{x}. \tag{28}$$

З (25)–(28) випливає, що при $x > x_0$ виконується співвідношення

$$\frac{-\varepsilon(3-\varepsilon)}{1+\varepsilon}\,\frac{V(x)}{x} \leq \int\limits_1^{+\infty}\frac{V(t)\,dt}{(t+x)^2} - \frac{V(x)}{x} \leq \varepsilon\,\frac{V(x)}{x}\,(2+3\varepsilon).$$

Враховуючи, що ε — довільне число, отримуємо (24). Лему 5 доведено.

Лема 6 [6]. *Нехай* $\alpha(x), \beta(x)$ — *додатні неспадні функції, визначені при* $x > 1$, *причому* $\alpha(x)$ *диференційовна і задовольняє умови*

$$\lim_{x\to+\infty}\alpha(x) = +\infty, \quad a\,\alpha(x) < x\alpha'(x) < b\,\alpha(x)$$

при $x > x_0 > 1$, *де* a *і* b — *числа*, $0 < b < a+1$,

$$F(x) = \int\limits_1^{+\infty}\frac{d\,\alpha(u)}{(u+x)^{m+1}}, \quad G(x) = \int\limits_1^{+\infty}\frac{d\,\beta(u)}{(u+x)^{m+1}}, \quad m = [b].$$

Якщо $F(x) \sim G(x)$, $x\to+\infty$, *то* $\alpha(x)\sim\beta(x)$, $x\to+\infty$.

Лема 7. *Нехай* $g(x)$ — *диференційовна на* $[1, +\infty)$ *функція*, $g'(x)$ — *спадна функція*, $0 < \Delta < +\infty$, $\Delta_1 \in \mathbb{R}$. *Якщо*

$$g(x) = \frac{\Delta}{p+1}\ln^{p+1}x + \frac{\Delta_1}{q+1}\ln^{q+1}x + O\left(\ln^{q^*}(x)\right) \quad (x\to\infty),$$

де $-1 \leq q^* - 1 < q < p$, *то*

$$g'(x) = \Delta\,\frac{\ln^p x}{x} + \Delta_1\,\frac{\ln^q x}{x} + O\left(\frac{\ln^{(p+q^*)/2}x}{x}\right) \quad (x\to\infty).$$

Лема 8. *Нехай* $1 < p < +\infty$. *Тоді*

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{d\left(\ln^p t\right)^+}{t+x} = p\int\limits_1^{+\infty}\frac{\ln^{p-1}t\,dt}{t(t+x)} = \frac{\ln^p x}{x} + O^*\left(\frac{\ln^{p-2}x}{x}\right) \quad (x\to+\infty),$$

де $\alpha(x) = O^*(\beta(x)), x\to\infty$, *означає, що* $\alpha(x)/\beta(x)\to K, 0 < K < +\infty, x\to+\infty$.

Доведення лем 7 і 8 ми не наводимо, тому що вони доволі громіздкі, а доводяться елементарними методами.

Лема 9 ([7], теорема 3.2.1). *Нехай* α, β — *додатні неспадні на* $[0, +\infty)$ *функції*, $\alpha(u) = 0$, $\beta(u) = 0$ *при* $0 \leq u \leq h$ *і існують константи* $a, b, 0 < a < b$ *такі, що при* $u > h$ *виконується*

$$\left(\frac{v}{u}\right)^a < \frac{\alpha(v)}{\beta(u)} < \left(\frac{v}{u}\right)^b, \quad h < u < v. \tag{29}$$

Нехай, крім того, інтеграли Стільтьєса

$$H_1(x) = \int\limits_0^{+\infty}\frac{d\,\alpha(u)}{u^\gamma(u+x)^\nu}, \quad H_2(x) = \int\limits_0^{+\infty}\frac{d\,\beta(u)}{u^\gamma(u+x)^\nu},$$

де $\nu > 0, 0 \le \gamma < a < b < \nu + \gamma$, *збіжні при* $x > 0$. *Тоді з оцінки* $H_2(x) = H_1(x) \times$ $\times (1 + O(r(x)))$ $(x \to \infty)$, *випливає точна оцінка*

$$\beta(x) = \alpha(x)\left(1 + O\left(\frac{1}{\ln(1/r(x))}\right)\right) \quad (x \to \infty),$$

якщо $r(x)$ — *додатна спадна функція, що задовольняє умови*

$$\lim_{x\to\infty} r(x) = 0, \quad r(\eta x) \le C\eta^{-\omega} r(x)$$

при $x \to \infty$, *де* $C > 0$, $0 < \eta < 1$, $0 \le \omega < a$.

В [8] показано, що для справедливості леми 9 не є необхідним виконання лівої нерівності в (29).

3. Доведення теорем 1–3.

Доведення теореми 1. Нехай $z = re^{i\theta}, -\pi < \theta < \pi$, $(-a_n)$ — нулі f, $a_1 \le$ $\le a_2 \le a_3 \le \ldots$. Не зменшуючи загальності, вважаємо, що $a_1 \ge 1$. Тоді

$$\ln f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{z}{a_n}\right) = \int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{z}{t}\right) dn(t) = z\int_0^{+\infty} \frac{n(t)\,dt}{t(t+z)}.$$

Звідси

$$\ln f(z) - N(r) = z\int_1^r \frac{n(t)\,dt}{t(t+z)} - \int_1^r \frac{n(t)\,dt}{t} + z\int_r^{+\infty} \frac{n(t)\,dt}{t(t+z)} =$$

$$= -\int_1^r \frac{n(t)\,dt}{t+z} + z\int_r^{+\infty} \frac{n(t)\,dt}{t(t+z)}.$$

Враховуючи умову (1), леми 1 та 2, маємо

$$\ln f(z) = N(r) - \Delta\int_1^r \frac{V(t)\,dt}{t+z} + z\Delta\int_r^{\infty} \frac{V(t)\,dt}{t(t+z)} + o(V(r)) =$$

$$= N(r) - \Delta\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k(r) z^{-k-1} +$$

$$+ \Delta\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b_k(r) z^{k+1} + o(V(r)) \quad (r \to \infty). \tag{30}$$

Далі, інтегруючи частинами, одержуємо

$$a_k(r) = \int_1^r V(t)t^k\,dt = \frac{V(r)r^{k+1}}{k+1} - \frac{1}{k+1}\int_1^r V(t)t^k\,\varepsilon(t)\,dt =$$

$$= \frac{V(r)r^{k+1}}{k+1} - \hat{a}_k(r),$$

де $\varepsilon(t) = \rho(t) + \rho'(t)t\ln t \to 0$ при $t \to \infty$, і аналогічно

$$b_k(r) = \int_r^{+\infty} V(t)t^{-k-2}\,dt = \frac{V(r)r^{-k-1}}{k+1} - \hat{b}_k(r).$$

З (30) маємо

$$\ln f(z) = N(r) - \Delta \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{r^{\rho(r)}}{k+1} e^{-i\theta(k+1)} +$$

$$+ \Delta \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{r^{\rho(r)}}{k+1} e^{i\theta(k+1)} + \Delta \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{e^{-i\theta(k+1)}}{r^{k+1}} \hat{a}_k(r) +$$

$$+ \Delta \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{i\theta(k+1)} r^{k+1} \hat{b}_k(r) + o(r^{\rho(r)}) =$$

$$= N(r) + \Delta V(r)\left(\ln\left(1 + e^{i\theta}\right) - \ln\left(1 + e^{-i\theta}\right)\right) +$$

$$+ \Delta \sum\nolimits_1 + \Delta \sum\nolimits_2 + o(V(r)) =$$

$$= N(r) + i\Delta\theta V(r) + \Delta \sum\nolimits_1 + \Delta \sum\nolimits_2 + o(V(r)) \quad (r \to \infty).$$

Враховуючи, що $\left|\sum_1\right| \le \sum_1^*$, $\left|\sum_2\right| \le \sum_2^*$, лему 3, з останнього співвідношення одержуємо (7). Звідси з урахуванням умови (2) випливає

$$\int_1^r \frac{\varphi(t)}{t}\, dt = o(V(r)) \quad (r \to \infty),$$

що й доводить теорему 1.

Доведення *теореми* 2. З умов теореми 2 випливає

$$\ln f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{z}{a_n}\right), \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{a_k} < \infty,$$

де $(-a_n)$ — нулі f. Звідси

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x + a_n}, \tag{31}$$

і ми бачимо, що $f'(x)/f(x)$ монотонно спадає до нуля при $x \to +\infty$. З іншого боку, враховуючи (4), за лемою 4 при $L(x) = V(x)$ маємо

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \Delta \frac{V(x)}{x} + o\left(\frac{V(x)}{x}\right) \quad (x \to \infty). \tag{32}$$

Далі, з (31), (32) і леми 5 одержуємо

$$\int_1^{+\infty} \frac{dn(t)}{t + x} = \Delta \frac{V(x)}{x}(1 + o(1)) = \int_1^{+\infty} \frac{d(\Delta V(t))}{t + x}(1 + o(1)) \quad (x \to +\infty).$$

З леми 6, покладаючи $\alpha(x) = \Delta V(x)$, $a = 0$, $b = 1/2$, $m = 0$, випливає (5), тобто твердження теореми 2.

Якщо замість (4) виконується (8), то, застосовуючи лему 4 при $L(x) = V(x) + \varphi(x)/\Delta$, яка є повільнозмінною функцією, аналогічно з викладеним вище одержуємо (5).

Доведення *теореми* 3. Так само, як і при доведенні теореми 2, маємо, що $f'(r)/f(r)$ задовольняє умову (31). З умови (9) теореми 3 за лемою 7 маємо

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \Delta \frac{\ln^p x}{x} + \Delta_1 \frac{\ln^q x}{x} + O\left(\frac{\ln^{(2p-1)/2} x}{x}\right) =$$

$$= \Delta \frac{\ln^p x}{x}\left(1 + O\left(\ln^{-\delta} x\right)\right) \quad (x \to \infty), \tag{33}$$

де $\delta = \min\{p-q, 1/2\}$. Враховуючи лему 8, з (31) та (33) одержуємо

$$\int_0^{+\infty} \frac{dn(t)}{t+x} = \Delta \int_0^{+\infty} \frac{d\left(\ln^p t\right)^+}{t+x}\left(1 + O\left(\frac{1}{\ln^\delta x}\right)\right) \quad (x \to \infty). \tag{34}$$

Легко бачити, що до останньої рівності можна застосувати лему 9. Дійсно, покладемо

$$\alpha(u) = \Delta\left(\ln^p u\right)^+, \quad \beta(u) = n(u),$$

$$\gamma = 0, \quad \nu = 1, \quad b = 1/2, \quad \omega = 0, \quad r(x) = \ln^{-\delta} x.$$

Враховуючи, що $(\ln v / \ln u)^p < (v/u)^{1/2}$ для $v > u \geq u_0 > 0$,

$$r(\eta x) = \ln^{-\delta}(\eta x) \sim \ln^{-\delta} x = r(x) \quad (x \to \infty),$$

із співвідношення (34) маємо

$$n(t) = \Delta \ln^p x\left(1 + O\left(\frac{1}{\ln \ln x}\right)\right) \quad (x \to +\infty),$$

причому ця оцінка є точною.

Дана робота частково фінансована Грантом № UCR000 Міжнародного наукового фонду.

1. *Valiron G.* Wur les fonctions entiéres d'ordre nul et d'ordre fini et en particulier les fonctions á correspondance réguliére // Ann. fac. sci. univ. Toulouse. – 1914. – **5**. – P. 117–257.
2. *Titchmarsh E. G.* On integral functions with real negative zeros // Proc. London Math. Soc. – 1927. – **26**, № 2. – P. 185–200.
3. *Логвиненко В. Н.* О целых функциях с нулями на полупрямой. I // Теория функций, функцион. анализ и их прил. – 1972. – Вып. 16. – С. 154–158.
4. *Логвиненко В. Н.* О целых функциях с нулями на полупрямой. II // Там же. – 1973. – Вып. 17. – С. 84–99.
5. *Тян М. М.* Об одном приложении тауберовой теоремы Карлемана – Субханкулова // Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. – 1963. – № 3. – С. 18–20.
6. *Келдыш М. В.* Об одной тауберовой теореме // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1951. – **38**. – С. 77–86.
7. *Субханкулов М. А.* Тауберовы теоремы с остатком. – М.: Наука, 1976. – 400 с.
8. *Коренблюм Б. И.* Общая тауберова теорема для отношения функций // Докл. АН СССР. – 1953. – **88**, № 5. – С. 745–748.

Одержано 31.10.94