УДК 517.946

М. І. Матійчук (Чернівец. ун-т)

ПРО НЕЛОКАЛЬНУ ПАРАБОЛІЧНУ КРАЙОВУ ЗАДАЧУ

The Green's function and the classical solution of the two-point problem with nonlocal boundary conditions in the form of differential polynomials are built for a parabolic system with time-dependent coefficients.

Для параболічної системи з коефіцієнтами, залежними від часу, будується функція Гріна і класичний розв'язок двоточкової задачі з нелокальними крайовими умовами, які задані диференціальними многочленами.

Розглядається система параболічних рівнянь в області $\Pi = (0, T) \times E_n$

$$D_t u = \sum_{|k| \le 2b} A_k(t) D_x^k u + f(t, x), \tag{1}$$

в якій шукається розв'язок, що задовольняє умову

$$\mu B(t, iD_x) u \big|_{t=0} = B_1(t, iD) u \big|_{t=T} + \varphi(x), \tag{2}$$

де $A_k(t) \in C_{[0,T]}$ — квадратні матриці розміру N, $B(t, iD), B_1(t, iD)$ — матричні диференціальні многочлени, μ — параметр, f, φ — вектор-функції, які допускають перетворення Фур'є (належать класу L_1).

1. Побудова розв'язку задачі. В образах Фур'є задача (1), (2) набуває вигляду

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{|k| \le 2b} A_k(t) (i\sigma)^k v + \tilde{f}(t, \sigma), \tag{3}$$

$$\mu B(t, \sigma) v \big|_{t=0} = B_1(t, \sigma) v \big|_{t=T} + \tilde{\varphi}(\sigma). \tag{4}$$

Припустимо, що матриця $B(0, \sigma)$ має обернену матрицю, тоді умова (4) набуває вигляду

$$v \big|_{t=0} = \mu^{-1} B(0, \sigma) B_1(T, \sigma) v \big|_{t=T} + \mu^{-1} B^{-1}(0, \sigma) \tilde{\varphi}. \tag{4'}$$

Розв'язок задачі (4′) шукаємо за формулою

$$v(t, \sigma) = Q_0(t, 0, \sigma) C + \int_0^t Q_0(t, \tau, \sigma) \tilde{f}(\tau, \sigma)\, d\tau, \tag{5}$$

де $Q_0(t, \tau, \sigma)$ — нормальна фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші $Q_0(\tau, \tau, \sigma) = E$.

Задовольняючи крайову умову (4′), знаходимо $C(\sigma)$ з системи лінійних неоднорідних рівнянь

$$C(\sigma) = \left[E - \mu^{-1} B^{-1}(0, \sigma) B_1(T, \sigma) Q_0(T, 0, \sigma) \right]^{-1} \times$$

$$\times \left[\mu^{-1} B^{-1}(0, \sigma) \tilde{\varphi}(\sigma) + \mu^{-1} B^{-1}(0, \sigma) B_1(T, \sigma) \int_0^T Q_0(T, \tau, \sigma) \tilde{f}(\tau, \sigma)\, d\tau \right]. \tag{6}$$

Тому формулу (5) запишемо у вигляді

$$v(t, \sigma) = Q_1(t, \sigma) \tilde{\varphi}(\sigma) +$$

$$+ \int_0^T Q_2(T, \tau, \sigma) \tilde{f}(\tau, \sigma)\, d\tau + \int_0^t Q_0(t, \tau, \sigma) \tilde{f}(\tau, \sigma)\, d\tau, \tag{7}$$

використовуючи скорочені позначення

$$Q_1(t, \sigma) \equiv Q_0(t, 0, \sigma)\left[E - \mu^{-1} B^{-1}(0, \sigma) B_1(T, \sigma) Q_0(T, 0, \sigma)\right]^{-1} B^{-1}(0, \sigma)\mu^{-1},$$
$$Q_2(t, \tau, \sigma) \equiv Q_1(t, \sigma) B_1(T, \sigma) Q_0(T, \tau, \sigma). \tag{8}$$

Зауважимо, що формула (7) має сенс при тих значеннях $\sigma \in E_n$, коли

$$\Delta(\sigma, \mu) = \det\{\mu B(0, \sigma) - B_1(T, \sigma) Q_0(T, 0, \sigma)\} \neq 0.$$

Зокрема, якщо норма матриці $\| \psi(\sigma, \mu) \| \le \mu_0 < 1$,

$$\psi(\sigma, \mu) \equiv \mu^{-1} B^{-1}(0, \sigma) B_1(T, \sigma) Q_0(T, 0, \sigma), \tag{9}$$

то має місце розвинення $Q_1(t, \sigma)$ в ряд

$$Q_1(t, \sigma) = Q_0(t, 0, \sigma) \sum_{k=0}^{\infty} [\psi(\sigma, \mu)]^k B^{-1}(0, \sigma)\mu^{-1}. \tag{10}$$

Щоб одержати з формули (7) класичний розв'язок задачі (1), (2), припустимо, що система (1) рівномірно параболічна. Тоді для норми $Q_0(t, 0, \sigma)$ справджується нерівність [1, с. 49; 2]

$$\| Q_0(t, \tau, \sigma + ij) \| \le C_0 \exp\{(-c_0 |\sigma|^{2b} + c_1 |\gamma|^{2b})(t - \tau)\}. \tag{11}$$

Крім цього, будемо вважати, що $B(0, \sigma)$, $B_1(T, \sigma)$ і μ задовольняють умови, при яких збігається інтеграл

$$J(t, c, \mu) = \int_{E_n} e^{-c|\sigma|^{2b} t} \left\| [E - \psi(\sigma, \mu)]^{-1} B^{-1}(0, \sigma) \right\| d\sigma. \tag{12}$$

Застосовуючи до обох частин формули (7) обернене перетворення Фур'є, знаходимо розв'язок задачі (1), (2) у вигляді згорток

$$u(t, x) = \int_{E_n} G_1(t, x - \xi) \varphi(\xi)\, d\xi +$$
$$+ \int_0^T d\tau \int_{E_n} G_2(t, \tau, x - \xi) f(\tau, \xi)\, d\xi +$$
$$+ \int_0^t d\tau \int_{E_n} G_0(t, \tau, x - \xi) f(\tau, \xi)\, d\xi \equiv u_1 + u_2 + u_3, \tag{13}$$

де

$$G_i(\cdot, x) = F_\sigma^{-1}(\cdot, \sigma) = (2\pi)^{-n} \int_{E_n} e^{i\sigma x} Q_i(\cdot, \sigma)\, d\sigma. \tag{14}$$

Вивчимо диференціальні властивості матриць $G_i(\cdot, x)$. Маємо

$$D_x^m G_1(t, x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\sigma x} (i\sigma)^m Q_1(t, \sigma)\, d\sigma =$$
$$= (2\pi)^{-n} \int e^{i\sigma x} (i\sigma)^m Q_0(t, 0, \sigma) [E - \psi(\sigma, \mu)]^{-1} B^{-1}(0, \sigma)\, d\sigma.$$

Згідно з нерівністю (11) й умовою (12) знаходимо

$$\left| D_x^m G_1(t,x) \right| \le C_m \int e^{-c|\sigma|^{2b}t} |\sigma|^m \left\| (E-\psi)^{-1} B^{-1}(0,\sigma) \right\| d\sigma \le$$
$$\le C_m t^{-m/2b} J(t, c_1, \mu), \quad 0 < c_1 < c. \tag{15}$$

Якщо $B(0,\sigma) = E$, то функція

$$\psi_k(t,s) \equiv Q_0(t,0,s)[B_1(T,s)Q_0(T,0,s)]^k$$

є цілою відносно аргумента $s = \sigma + i\gamma$ і виконується нерівність

$$|\psi_k(t,s)| \le C \exp\left\{\left(-c_0|\sigma|^{2b} + c_1^0|\gamma|^{2b}\right)(t+kT)\right\}. \tag{16}$$

Її перетворення Фур'є також є цілою функцією і виконується оцінка [1, с. 36]

$$\left| F_\sigma^{-1}\psi_k(t,\sigma) \right| \le C(t+kT)^{-n/2b} \exp\left\{-c\left(\frac{|x|}{(t+kT)^{1/2b}}\right)^q\right\}. \tag{17}$$

Враховуючи для $Q_1(t,\sigma)$ зображення (10), маємо

$$G_1 = G_0 + \sum_{k=1}^{\infty} F_\sigma^{-1} \psi_k(t,\sigma)$$

і при цьому

$$\left| D_x^m G_1(t,x) \right| \le C_m \sum_{k=0}^{\infty} (t+kT)^{-(n+|m|)/2b} \exp\left\{-c\left(\frac{|x|}{(t+kT)^{1/2b}}\right)^q\right\}. \tag{18}$$

Нехай тепер $B(0,\sigma) = B_1(t,\sigma)$ і матриці $B(0,\sigma)$, $Q_0(T,0,\sigma)Q_0^k(t,0,\sigma)$ комутують. Тоді з формули (14) маємо

$$B(0,D)G_1(t,x) =$$
$$= (2\pi)^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \int e^{i\sigma x} Q_0(t,0,\sigma)\left(\mu^{-1}Q_0(T,0,\sigma)\right)^k d\sigma \equiv \Gamma(t,x).$$

Для похідних функції $\Gamma(t,x)$ також справедлива оцінка (18). Щоб оцінити $G_1(t,x)$, припустимо, що

$$B(0,iD)G_1 = \sum_{k=1}^{n} b_k(0) Dx_k G_1 = \Gamma$$

— рівняння першого порядку. Складемо систему звичайних рівнянь симетричної форми

$$\frac{dx_1}{b_1} = \ldots = \frac{dx_n}{b_n} = \frac{dG_1}{\Gamma(t,x)}. \tag{19}$$

Вона має незалежні інтеграли

$$G_1(t,x) - \frac{1}{b_i}\int_{-\infty}^{x_i} \Gamma\left(t, x_1, \ldots, \xi_i, x_{i+1}, \ldots, x_n\right) d\xi_i = C_i. \tag{20}$$

Отже, $G_1(t,x)$ знаходимо у вигляді

$$G_1(t,x) = \sum_{i=1}^{n} (b_i)^{-1} \int_{-\infty}^{x_i} \Gamma\left(t, x_1, \ldots, \xi_i, x_{i+1}, \ldots, x_n\right) d\xi_i, \tag{21}$$

звідки, враховуючи нерівність (18) для $\Gamma(t, x)$, дістаємо оцінку

$$|G_1(t,x)| \le C \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{-k} \sum_{i=1}^{n} (t+kT)^{-(n-1)/2b} \exp\left\{-c\left(\frac{|\tilde{x}_i|}{(t+kT)^{1/2b}}\right)^q\right\}, \quad (22)$$

де $\tilde{x}_i = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$.

Тепер оцінимо похідні матриці $G_2(t, \tau, x)$:

$$D_x^m G_2(t,\tau,x) = c_m \int e^{i\sigma x} \sigma^m Q_1(t,\sigma) B_1(T,\sigma) Q_0(T,\tau,\sigma)\, d\sigma.$$

Якщо степінь $B_1(t, \sigma)$ є числом r_1, то за допомогою оцінок (11), (15) знаходимо

$$\left| D_x^m G_2 \right| \le c_m \int e^{-c|\sigma|^{2b}(t-\tau+T)} |\sigma|^m \left(1+|\sigma|^{r_1}\right) \times$$
$$\times \left\| (E - \psi(\sigma,\mu))^{-1} B^{-1}(0,\sigma) \right\| d\sigma.$$

Звідси випливає нерівність

$$\left| D_x^m G_2(t,\tau,x) \right| \le C(t-\tau+T)^{-(|m|+r_1)/2b} J(T+t-\tau, c_1, \mu). \quad (23)$$

Якщо виконується умова (9), то на основі формули (10) маємо

$$D_x^m G_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \int e^{i\sigma x} (i\sigma)^m Q(t,0,\sigma) \psi^k(\sigma,\mu) \mu^{-1} \times$$
$$\times B^{-1}(0,\sigma) B_1(T,\sigma) Q_0(T,\tau,\sigma)\, d\sigma. \quad (24)$$

Якщо $B(0,\sigma) = E$ або $B(0,\sigma) = B_1(T,\sigma)$, підінтегральна функція ціла і виконується нерівність (16), то

$$\left| D_x^m G_2(t,\tau,x) \right| \le$$
$$\le C_m \sum_{k=1}^{\infty} (t-\tau+kT)^{-(n+|m|)/2b} \mu^{-k-1} \exp\left\{-c\left(\frac{|x|}{(t-\tau+kT)^{1/2b}}\right)^q\right\}. \quad (25)$$

2. Оцінка розв'язку. Теорема про коректність задачі. Позначимо через $H^{(1,\alpha)}$ клас функцій $u(t,x) \in C_x^{\alpha} \cap L_1(E_n)$ зі скінченною нормою

$$|u|_1^{\alpha} = |u|_{\alpha} + \sup_{0 \le t \le T} \int_{E_n} |u(t,x)|\, dx \equiv |u|_{\alpha} + |u|_1. \quad (26)$$

Оцінимо похідні розв'язку $u(t,x)$, визначеного формулою (13). Нехай

$$\varphi \in C(E_n) \cap L_1(E_n) \equiv H^{(1,0)}, \quad f \in H^{(1,\alpha)}.$$

Для оцінки похідних доданків u_1, $u_2(t,x)$ у загальному випадку скористаємося нерівностями (15) і (23):

$$\left| D_x^m u_1 \right| \le \int \left| D_x^m G_1(t, x-\xi) \right| |\varphi(\xi)|\, d\xi \le$$
$$\le C_m t^{-|m|/2b} J(t, c_1, \mu) \int_{E_n} |\varphi(\xi)|\, d\xi =$$

$$= C_m t^{-|m|/2b} J(t, c_1, \mu) |\varphi|_1. \tag{27}$$

Похідні $D_x^m u_2(t, x)$ знаходимо безпосередньо під знаком інтеграла, при цьому враховуємо, що функція $J(t, c_1, \mu)$ не зростає відносно t. Маємо

$$\left| D_x^m u_2(t,x) \right| \le C_m \int_0^T \frac{J(t-\tau+T, c_1, \mu)}{(t-\tau+T)^{(|m|+r_1)/2b}} d\tau \int |f(\tau,\xi)| d\xi \le$$

$$\le C_m(T) J(t, c_1, \mu) t^{-(|m|+r_1)/2b} |f|_1. \tag{28}$$

Якщо $B(0, \sigma) = E$ або $B(0, \sigma) = B_1(T, \sigma)$, то на основі нерівності (25) остання оцінка уточнюється:

$$\left| D_x^m u_2 \right| \le$$

$$\le C_m \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{-k-1} \int_0^T d\tau \int (t-\tau+kT)^{-(n+|m|)/2b} \times$$

$$\times \exp\left\{ -c \left(\frac{|x-\xi|}{(t-\tau+kT)^{1/2b}} \right)^q \right\} \le$$

$$\le C_m |f|_C \int_t^{T+t} \eta^{-|m|/2b} d\eta + C_m \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{-k} (kT)^{-(n+|m|)/2b} |f|_1.$$

Звідси випливає нерівність

$$\left| D_x^m u_2(t,x) \right| \le C_m \left(|f|_C + |f|_1 \right) \begin{cases} 1, & |m| < 2b, \\ \ln(1+T/t), & |m| = 2b. \end{cases} \tag{29}$$

Для $D_x^m u_1(t, x)$ з нерівності (18) одержуємо оцінку

$$\left| D_x^m u_1(t,x) \right| \le C_m t^{-|m|/2b} |\varphi|_C + C_m |\varphi|_1. \tag{30}$$

Якщо $B(t, iD)$ — оператор першого порядку, то за допомогою оцінки (22) знаходимо

$$|u_1| \le C \int t^{-(n-1)/2b} \sum_{i=1}^{n} \exp\left\{ -c \left(\frac{|\tilde{x}_i - \tilde{\xi}_i|}{t^{1/2b}} \right)^q \right\} |\varphi(\xi)| d\xi +$$

$$+ C \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{-k} (kT)^{-(n-1)-1/2b} |\varphi|_1. \tag{31}$$

Зробивши заміну $x_k - \xi_k = t^{1/2b} y_k$, одержимо

$$|u_1| \le C \sum_{i=1}^{n} \int_{E_{n-1}} e^{-c|\tilde{y}_i|^q} d\tilde{y}_i \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \left| \varphi\left(\ldots, \xi_i, \ldots, x_n - t^{1/2b} y_n \right) \right| d\xi_i + C|\varphi|_1 \le C_1 |\varphi|_1. \tag{32}$$

Для об'ємного потенціалу $u_3(t, x)$ з формули (13) згідно з [1, с. 113] $u_3 \in C^{2b+2}(\Pi)$, якщо $f \in C_x^{\alpha}(\Pi)$, і, крім цього,

$$|u_3|_{2b+\alpha} \le \text{const}\,|f|_\alpha. \tag{33}$$

Результат дослідження сформулюємо у вигляді наступної теореми.

Теорема (про коректність). *Якщо система рівнянь* (1) *з неперервними коефіцієнтами рівномірно параболічна і збігається інтеграл*

$$J(t, c, \mu) = \int\limits_{E_n} e^{-c|\sigma|^{2b}t} \left\| \left(E - \mu^{-1}B^{-1}(0,\sigma)B_1(T,\sigma)\, Q_0(T,0,\sigma)\right)B^{-1}(0,\sigma) \right\| d\sigma,$$

то для будь-яких функцій $f \in H^{(1,\alpha)}$, $\varphi \in H^{(1,0)}$ *розв'язок задачі* (1), (2) *визначається за допомогою функції Гріна* (G_0, G_1, G_2) *формулою* (14) *і для його похідних справджуються нерівності*

$$\left| D_x^m u(t,x) \right| \le C_m J(t, c_1, \mu) t^{-|m|/2b}\left[|\varphi|_1 + t^{-r_1/2b}|f|_1 \right] + C|f|_\alpha,$$

$$\left| D_x^m G_1(t,x) \right| \le C_m J(t, c_1, \mu) t^{-|m|/2b},$$

$$\left| D_x^m G_2(t,\tau,x) \right| \le C_m J(t-\tau+T, c_1, \mu)\,(t-\tau+T)^{-(|m|+r_1)/2b}, \quad |m| \le 2b.$$

Якщо $B(0,\sigma) = E$ *і норма*

$$\| \mu^{-1}B_1(T,\sigma)\,Q_0(T,0,\sigma) \| \le \mu_0 < 1,$$

то $G_1(t,x)$, $G_2(t,\tau,x)$ — *нескінченно диференційовні функції і*

$$\left| D_x^m G_i(t,x) \right| \le C_m \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{-k}(t+kT)^{-(n+|m|)/2b} \times$$

$$\times \exp\left\{ -c\left(\frac{|x|}{(t+kT)^{1/2b}} \right)^q \right\},$$

а для $f \in H^{(1,\alpha)}$, $\varphi \in H^{(1,0)}$ *розв'язок задовольняє нерівність*

$$\left| D_x^m u(t,x) \right| \le C_m t^{-|m|/2b}\left(|\varphi|_{H^{(1,0)}} + |f|_{H^{(1,\alpha)}} \right).$$

На закінчення зауважимо, що приклади модельних задач, для яких збігається інтеграл $J(t, c_1, \mu)$, наведено в [3].

1. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 443 с.
2. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.
3. *Корбут Л. І., Матійчук М. І.* Про зображення розв'язків нелокальних крайових задач для параболічних рівнянь // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 7. – С. 947–951.

Одержано 10.01.95