УДК 519. 21

А. Я. Оленко (Нац. ун-т, Київ)

ТАУБЕРОВІ ТА АБЕЛЕВІ ТЕОРЕМИ ДЛЯ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ З СИЛЬНОЮ ЗАЛЕЖНІСТЮ

Taberian and Abelian theorems for integral transforms of Hankel type are proved.

Доведено тауберові та абелеві теореми для інтегральних перетворень типу Ганкеля.

Нехай $\mathbb{R}^n$ — евклідів простір вимірності $n \geq 1$, $s(r) = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = r\}$ — сфера в $\mathbb{R}^n$, $\xi(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, — дійсне вимірне неперервне в середньому квадратичному однорідне та ізотропне в широкому розумінні випадкове поле з нульовим математичним сподіванням і кореляційною функцією [1, 2]

$$\mathbf{B}_n(r) = \mathbf{B}_n(\|x\|) = \mathbf{M}\xi(0)\xi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Відомо (див., наприклад, [1, 2], що існує обмежена неспадна функція $\Phi(\lambda)$, $\lambda \geq 0$, яку називають спектральною функцією поля $\xi(x), x \in \mathbb{R}^n$, така, що справедливий спектральний розклад

$$\mathbf{B}_n(r) = 2^{(n-2)/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\int_0^\infty \frac{J_{(n-2)/2}(\lambda r)}{(\lambda r)^{(n-2)/2}}\, d\Phi(\lambda), \tag{1}$$

де $J_\nu(z)$ — функція Бесселя першого роду порядку $\nu > -1/2$.

Далі без обмеження загальності вважаємо, що

$$\int_0^\infty d\Phi(\lambda) = \mathbf{B}_n(0) = 1.$$

В (1) за неперервністю можемо покласти $\nu \geq -1/2$. Тоді в (1) буде включено вимірність $n = 1$. З результатів робіт [1, 2] випливає

$$l_n(r) = D\left[\int_{s(r)} \xi(x)\, dm(x)\right] =$$

$$= (2\pi)^n r^{2(n-1)} \int_0^\infty J^2_{(n-2)/2}(\lambda r)(\lambda r)^{2-n}\, d\Phi(\lambda) =$$

$$= \frac{2^n \pi^{n-1}}{(n-2)!} r^{n-1} \int_0^{2r} z^{n-2}\left(1 - \left(\frac{z}{2r}\right)^2\right)^{(n-3)/2} \mathbf{B}_n(z)\, dz, \quad n \geq 2; \tag{2}$$

де $m(\cdot)$ — міра Лебега на сфері $s(r)$.

Зауважимо, що формула (1) — інтегральне перетворення ганкелевого типу.

Розглянемо випадок, коли $\mathbf{B}_n(r) \sim c/r^\alpha$, $r \to \infty$, або $\Phi(\lambda)/\lambda^\alpha \sim C, \lambda \to +0$.

Зауважимо, що при $\alpha \in (0, n)$ кореляційна функція $\mathbf{B}_n(r)$ неінтегровна. Будемо розглядати саме цей випадок: поле з сильною залежністю.

Встановимо зв'язок поведінки функції $\Phi(\lambda)$ при $\lambda \to +0$ та функції $l_n(r)$ при $r \to \infty$.

***Означення* 1** [3]. *Додатна функція R змінюється регулярно на нескінченності, якщо вона вимірна на множині $[A, \infty), A > 0$, і існує таке число $\rho \in R$, що для довільного $\lambda > 0$: $\lim_{x\to\infty}(R(\lambda x)/R(x)) = \lambda^\rho$. При цьому ρ будемо називати порядком функції R.*

Означення 2 [3, 4]. *Якщо функція L, що змінюється регулярно, має порядок $\rho = 0$, то будемо говорити, що вона змінюється повільно.*

Теорема. *Якщо $0 < \alpha < n-1$, $n \geq 2$, L змінюється повільно на нескінченності, то наступні твердження рівносильні:*

а) $\Phi(\lambda)/\lambda^{\alpha} \sim L(1/\lambda)$ *при* $\lambda \to +0$

б) $l_n(r)/r^{2n-\alpha-2} \sim L(r)\, C_0(n, \alpha)$ *при* $r \to \infty$,

$$C_0(n, \alpha) = \alpha \pi^n 2^{\alpha+1} \frac{\Gamma(n-\alpha-1)\Gamma(\alpha/2)}{\Gamma^2((n-\alpha)/2)\Gamma(n-1-\alpha/2)}.$$

Зауваження. **1.** У термінології, прийнятій в теорії перетворень Лапласа (див., наприклад, [4]), твердження „із а) випливає б)" потрібно називати теоремою абелевого типу, а твердження „із б) випливає а)" — теоремою тауберового типу. Багатовимірні тауберові і абелеві теореми вивчались у роботах Бінгхема [5, 6], В. С. Владимирова, Ю. Н. Дрожжинова, Б. І. Зав'ялова [7], М. Й. Ядренка [1], М. М. Леоненка, А. В. Іванова [2], Р. Н. Мірошина [8] та ін. Наведена теорема узагальнює результат Лауе [9] (одновимірний випадок). У роботах [1, 11, 12] доведені тауберові і абелеві теореми, які встановлюють зв'язок поведінки спектральної функції поля в нулі і дисперсій функціоналів від поля на нескінченності. У даній роботі розглянута більш загальна конструкція — з функціями, які змінюються повільно на нескінченності.

2. Далі буде показано, що функції $\Phi(\lambda)/(\lambda^{\alpha}L(1/\lambda))$ та $l_n(r) \times (r^{2n-\alpha-2}L(r))^{-1}$ мають границі в нулі та на нескінченності відповідно. З доведення буде зрозуміло, що кожна з цих границь залежить тільки від значення іншої. Тому значення їх можемо брати з часткового випадку в роботах [1, 2].

Символами A_k, $A(k)$, const будемо позначати не істотні сталі.

Сформулюємо теорему абелевого та тауберового типу для перетворень Лапласа – Стільтьєса [4], яка буде нам потрібна далі. Нехай F — функція розподілу, а f — відповідна характеристична функція. Тоді справедливе таке твердження.

Лема 1. *Співвідношення* $F(x)/x^{\alpha} \sim L(1/x), x \to +0$, *справедливе тоді і тільки тоді, коли* $y^{\alpha}f(iy) \sim \Gamma(1+\alpha)L(y)$ *при* $y \to \infty, \alpha > 0$.

Доведення теореми. Нехай $\Phi(\lambda)/\lambda^{\alpha} \sim L(1/\lambda)$, $\lambda \to +0$. Використаємо (2) і зробимо таке перетворення:

$$\frac{l_n(r)}{r^{2n-\alpha-2}} = (2\pi)^n r^{\alpha} \int_0^{\infty} \frac{J^2_{(n-2)/2}(\lambda r)}{(\lambda r)^{n-2}} \Phi\, d(\lambda) =$$

$$= (2\pi)^n r^{\alpha} \int_0^{\infty} \frac{J^2_{(n-2)/2}(u)}{u^{n-2}} \Phi\left(\frac{du}{r}\right) =$$

$$= (2\pi)^n \int_0^{\infty} \frac{\Phi(u/r)}{(u/r)^{\alpha}} \left[\frac{(n-2) J^2_{(n-2)/2}(u)}{u^{n-1-\alpha}} - \right.$$

$$\left. - \frac{2J_{(n-2)/2}(u)}{u^{n-2-\alpha}} \left(J_{(n-2)/2-1}(u) + J_{(n-2)/2+1}(u) \right) \right]. \tag{3}$$

Лема 2. *Нехай* $f(x) \sim L(x), x \to \infty$, *де* $L(x)$ — *змінюється повільно на нескінченності. Тоді існує функція* $\hat{L}(x)$, *яка змінюється повільно на нескінченності, така, що* $\hat{L}(x) \sim L(x), x \to \infty$, *і* $f(x) = \hat{L}(x)$.

Доведення. Запишемо функцію f таким чином: $f(x) = (f(x)/L(x))L(x)$. Тоді

$$\frac{f(tx)}{f(x)} = \frac{(f(tx)/L(tx))}{(f(x)/L(x))}\frac{L(tx)}{L(x)} \to 1, \quad x \to \infty,$$

оскільки $f(x) \sim L(x)$ і L змінюється повільно на нескінченності.

З леми 2 випливає, що існує функція $\hat{L}(x)$, яка повільно змінюється на нескінченності, така, що $\Phi(\lambda)/\lambda^{\alpha} = \hat{L}(1/\lambda)$. Тому можемо переписати (3) таким чином:

$$\frac{l_n(r)}{r^{2n-\alpha-2}} = (2\pi)^n \int_0^\infty \hat{L}(r/u) \times$$

$$\times \left[\frac{(n-2)J^2_{(n-2)/2}(u)}{u^{n-1-\alpha}} - \frac{2J_{(n-2)/2}(u)}{u^{n-2-\alpha}} \left(J_{(n-4)/2}(u) + J_{n/2}(u) \right) \right] du =$$

$$= (2\pi)^n \int_{1/A}^\infty \hat{L}(zr) \left[\frac{(n-2)J^2_{n/2}(1/z)}{z^{\alpha+1-n}} - \right.$$

$$\left. - \frac{2J_{(n-2)/2}(1/z)}{z^{\alpha+2-n}} \left(J_{(n-4)/2-1}(1/z) + J_{n/2}(1/z) \right) \right] \frac{dz}{z^2} +$$

$$+ (2\pi)^n \int_0^{1/A} \hat{L}(zr) \left[\frac{(n-2)J^2_{n/2}(1/z)}{z^{\alpha+1-n}} - \right.$$

$$\left. - \frac{2J_{(n-2)/2}(1/z)}{z^{\alpha+2-n}} \left(J_{(n-2)/2-1}(1/z) + J_{n/2}(1/z) \right) \right] \frac{dz}{z^2}. \tag{4}$$

Якщо розглянути поведінку $J_\nu(x)$ при $x \to 0$ і $x \to \infty$ [13], то одержимо, що вираз у квадратних дужках в (4) поводить себе як $z^{1-\alpha}$ на нескінченності і як $z^{n-\alpha}$ у нулі. Тому легко помітити, що існує $\eta > 0$ таке, що існують інтеграли Лебега:

$$\int_{1/A}^\infty z^{\eta-2} \left[(n-2)\frac{J^2_{n/2}(1/z)}{z^{\alpha+1-n}} - 2J_{(n-2)/2}(1/z) \times \right.$$

$$\left. \times \left(J_{(n-2)/2-1}(1/z) + J_{n/2}(1/z) \right) z^{n-\alpha-2} \right] dz$$

та

$$\int_0^{1/A} \frac{1}{z^{\eta+2}} \left[(n-2)\frac{J^2_{n/2}(1/z)}{z^{\alpha+1-n}} - 2J_{(n-2)/2}(1/z) \times \right.$$

$$\left. \times \left(J_{(n-2)/2-1}(1/z) + J_{n/2}(1/z) \right) z^{n-\alpha-2} \right] dz.$$

За означенням $\hat{L}(\cdot)$ обмежена на кожному скінченному інтервалі. Тому ми можемо застосувати до (4) теореми 2.6 та 2.7 із [3]. Маємо

$$\frac{l_n(r)}{r^{2n-\alpha-2}} \sim \hat{L}(r) \int_0^\infty \left[\frac{(n-2)J^2_{n/2}(u)}{u^{n-1-\alpha}} - \right.$$

$$- \frac{2 J_{(n-2)/2}(u)}{u^{n-2-\alpha}} \left(J_{(n-2)/2-1}(u) + J_{n/2}(u) \right) \Bigg] \sim L(r) \operatorname{const}, \quad r \to \infty.$$

Останній перехід випливає з означення $\hat{L}(\cdot)$ і леми 2. Абелева теорема доведена.

Нехай f — характеристична функція, яка відповідає функції розподілу $\Phi(\lambda)$. Тоді справедливе наступне твердження.

Лема 3. *Нехай* $y \geq 0$. *Тоді*

$$f(iy) = A(n) y \int_0^\infty \frac{u^{n-1}}{(u^2 + y^2)^{(n+1)/2}} \mathbf{B}_n(u)\, du. \tag{5}$$

Доведення. За формулою Пуассона [14]

$$f(iy) = \frac{2y}{\pi} \int_0^\infty \frac{R_e f(u)}{u^2 + y^2}\, du, \quad y > 0.$$

Інтегруючи частинами, маємо

$$f(iy) = \frac{2y}{\pi} \left[\frac{1}{u^2 + y^2} \int_0^u R_e f(v)\, dv \Bigg|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{2u}{(u^2+y^2)^2} \int_0^u R_e f(v)\, dv\, du \right] =$$

$$= \frac{2y}{\pi} \int_0^\infty \frac{2u}{(u^2+y^2)^2} \int_0^u R_e f(v)\, dv\, du.$$

Оскільки f — характеристична функція, яка відповідає $\Phi(\lambda)$, то

$$\int_0^u R_e f(v)\, dv = \int_0^u \int_0^\infty \cos(\lambda v) \Phi(d\lambda)\, dv =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^u \cos(\lambda v)\, dv\, \Phi(d\lambda) = \int_0^\infty \frac{\sin(\lambda v)}{\lambda} \Phi(d\lambda).$$

Ми можемо змінити порядок інтегрування, тому що

$$\sup_{v \in [0,u]} \int_A^\infty \cos(\lambda v) \Phi(d\lambda) \leq \sup_{v \in [0,u]} \Phi([A, \infty)) \to 0, \; A \to \infty.$$

Звідси

$$f(iy) = \frac{2y}{\pi} \int_0^\infty \frac{2u^2}{(u^2+y^2)^2} \int_0^\infty \frac{J_{(3-2)/2}(\lambda u)}{(\lambda u)^{(3-2)/2}} \Phi(d\lambda)\, du. \tag{6}$$

Легко помітити, що коли $n = 3$, тоді

$$f(iy) = A(3) y \int_0^\infty \frac{u^2}{(u^2+y^2)^2} \mathbf{B}_3(u)\, du.$$

Скористаємося формулами диференціювання функцій Бесселя (див., наприклад, [13]). Маємо

$$\left(\frac{J_{(n-2)/2}(\lambda u)}{(\lambda u)^{(n-2)/2}} \right)' = \frac{J_{(n-2)/2-1}(\lambda u)}{u (\lambda u)^{(n-2)/2-1}} - \frac{(n-2) J_{(n-2)/2}(\lambda u)}{u (\lambda u)^{(n-2)/2}}.$$

Звідси

$$\int_0^u \frac{J_{(n-2)/2-1}(\lambda v)}{(\lambda v)^{(n-2)/2-1}} dv =$$

$$= \int_0^u \frac{(n-2) J_{(n-2)/2}(\lambda v)}{(\lambda v)^{(n-2)/2}} dv + \int_0^u v \left(\frac{J_{(n-2)/2}(\lambda v)}{(\lambda v)^{(n-2)/2}} \right)' dv =$$

$$= (n-3) \int_0^u \frac{J_{(n-2)/2}(\lambda v)}{(\lambda v)^{(n-2)/2}} dv + u \frac{J_{(n-2)/2}(\lambda u)}{(\lambda v)^{(n-2)/2}}. \tag{7}$$

У випадку $n = 3$ формула (5) вірна. Покажемо за індукцією по непарних n, що (5) виконується для непарних n. Використаємо (7):

$$\int_0^\infty \frac{u^{2k} \mathbf{B}_{2k+1}(u)}{(u^2+y^2)^{k+1}} du = - \int_0^\infty \left(\frac{u^{2k}}{(u^2+y^2)^{k+1}} \right)' \int_0^u \mathbf{B}_{2k+1}(v)\, dv\, du =$$

$$= - \int_0^\infty \left(\frac{u^{2k}}{(u^2+y^2)^{k+1}} \right)' \left[u \mathbf{B}_{2(k+1)+1}(u) + 2k \int_0^u \mathbf{B}_{2(k+1)+1}(v)\, dv \right] du =$$

$$= - \int_0^\infty \left[\left(\frac{u^{2k}}{(u^2+y^2)^{k+1}} \right)' u - \frac{2ku^{2k}}{(u^2+y^2)^{k+1}} \right] \mathbf{B}_{2(k+1)+1}(u)\, du =$$

$$= 2(k+1) \int_0^\infty \frac{u^{2k+2}}{(u^2+y^2)^{k+2}} \mathbf{B}_{2k+3}(u)\, du.$$

Отже, для непарних n формула (5) вірна.

Розглянемо тепер випадок коли, n парне. Для $n = 2$

$$\int_0^\infty \frac{u}{(u^2+y^2)^{3/2}} \mathbf{B}_2(u)\, du = \int_0^\infty \frac{u}{(u^2+y^2)^{3/2}} \int_0^\infty J_0(\lambda u) \Phi(d\lambda)\, du. \tag{8}$$

Змінимо порядок інтегрування у формулах (6) і (8). Якщо використати значення перетворення Ганкеля для функцій $u^\nu / (u^2+y^2)^\mu$ [14], то одержуємо

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{u^2}{(u^2+y^2)^2} \frac{J_{1/2}(\lambda u)}{(\lambda u)^{1/2}} du\, \Phi(d\lambda) =$$

$$= \int_0^\infty \frac{\Phi(d\lambda)}{\lambda} \int_0^\infty \frac{u}{(u^2+y^2)^2} J_{1/2}(\lambda u) (\lambda u)^{1/2} du = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \int_0^\infty \frac{\Phi(d\lambda)}{y e^{y\lambda}},$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{u}{(u^2+y^2)^{3/2}} J_0(\lambda u)\, du\, \Phi(d\lambda) =$$

$$= \int_0^\infty \frac{\Phi(d\lambda)}{\lambda^{1/2}} \int_0^\infty \frac{u^{1/2}}{(u^2+y^2)^{3/2}} J_0(\lambda u) (\lambda u)^{1/2} du = \int_0^\infty \frac{\Phi(d\lambda)}{y e^{y\lambda}}.$$

Звідси випливає, що для $n = 2$ формула (5) виконується. За індукцією по парних n, використовуючи формулу (7), так само, як і для непарних n, маємо, що (5) виконується і для парних n. Лему 3 доведено.

Доведемо тауберову частину теореми.

Нехай $n = 2k + 1$ непарне. Покажемо, що тоді існує функція $g_n(u, y)$ така, що

$$\int_0^\infty \frac{u^{n-1}}{(u^2+y^2)^{(n+1)/2}} \mathbf{B}_u(u)\,du =$$

$$= \int_0^\infty g_n(u, y) \int_0^\infty z^{n-2}(1-(z/u)^2)^{(n-3)/2} \mathbf{B}_n(z)\,dz\,du. \tag{9}$$

Оскільки n непарне, то $(1-(z/u)^2)^{(n-3)/2}$ — многочлен степеня $n-3$ від змінної z/u. Тому, якщо проінтегрувати в правій частині (9) за частинами, то для визначення $g_n(u, y)$ знайдемо вираз

$$\frac{u^{n-1}}{(u^2+y^2)^{(n+1)/2}} = \int_0^\infty u^{n-2} g_n(v, y)(1-(u/v)^2)^{(n-3)/2}\,dv.$$

Оскільки $(1-(u/v)^2)^{(n-3)/2}$ — многочлен, то з останнього виразу, якщо взяти по черзі похідну та помножити на u^{-1}, одержимо формулу для визначення $g_n(u, y)$:

$$g_n(u, y) = A_1 u^{2(k-1)} \left(\left(\ldots \left(\left(\frac{u}{(u^2+y^2)^{(n+1)/2}} \right)' \frac{1}{u} \right)' \ldots \right)' \frac{1}{u} \right)'.$$
$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{k \text{ разів}}$$

Зауважимо, що на нескінченності $g_n(u, y)$ поводить себе як u^{-n-1}, а в нулі — як стала. Тому існує $\eta > 0$ таке, що функція $t^\eta t^{n-\alpha-1} g_n(t, 1)$ інтегровна в розумінні Лебега на $[A, \infty)$, де $A > 0$, а $t^\eta t^{n-\alpha-1} g_n(t, 1)$ — на $[0, A]$. За означенням функція $l_n(t)/t^{2n-\alpha-2}$ обмежена на будь-якому скінченному проміжку з $(0, \infty)$. Крім того, з умови теореми б) і леми 2 випливає, що існує $\hat{L}(\cdot)$ така, що повільно змінюється на нескінченності, $\hat{L}(y) \sim L(\cdot)$, $y \to \infty$ і

$$l_n(y)/y^{2n-\alpha-2} = \hat{L}(y).$$

З означення l_n і $g_n(t, 1)$ випливає

$$y^\alpha f(iy) = A_2 \int_0^\infty t^{n-1-\alpha} g_n(t, 1) \frac{l_n(ty)}{(ty)^{2n-2-\alpha}}\,dt. \tag{10}$$

До (10) можемо застосувати теореми 2.6 і 2.7 [3], тому що вище було показано, що всі їхні умови виконуються. Маємо: $y^\alpha f(iy) \sim \mathrm{const}\,\hat{L}(y) \sim \sim \mathrm{const}\,L(y)$ при $y \to \infty$. Тому з леми 1 одержуємо а). Отже, для непарних n теорема доведена.

Нехай тепер n парне. Розглянемо функції

$$\varphi_1(u) = \int_0^u v^{n-2} \mathbf{B}_n(v)\,(1-(v/u)^2)^{(n-3)/2}\,dv =$$

$$= u^{n-1} \int_0^1 t^{n-2} \mathbf{B}_n(tu)\,(1-t^2)^{(n-3)/2} dt$$

і

$$\varphi_2(u) = u^{n-1} \int_0^1 t^{n-2} \mathbf{B}_{n+1}(tu)\,(1-t^2)^{(n-3)/2} dt,$$

де $\mathbf{B}_{n+1}$ відповідає тій же спектральній функції Φ, що й $\mathbf{B}_n$.

Далі нам неодноразово буде необхідний такий результат з [15]: перетворення Меліна [18] функції $x^{\alpha}\int_0^{\infty} t^{\beta} f_1(xt) f_2(xt)\,dt$ дорівнює

$$g(s) = g_1(s+\alpha)\, g_2(1-s-\alpha+\beta), \tag{11}$$

де g_1 та g_2 — перетворення Меліна функцій f_1 і f_2 відповідно.

Нехай $g(s)$ і $\tilde{g}(s)$ — перетворення Меліна функцій φ_1 і φ_2, $g_1(s)$ і $\tilde{g}_1(s)$ — перетворення Меліна кореляційних функцій $\mathbf{B}_n$ і $\mathbf{B}_{n+1}$ відповідно, а g_2 — перетворення функції

$$\begin{cases} (1-t^2)^{(n-3)/2}, & |t| \le 1, \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$$

За формулою (11) $g(s) = g_1(s+n-1)\, g_2(-s)$ і $\tilde{g}(s) = \tilde{g}_1(s+n-1)\, g_2(-s)$.

Встановимо, для яких s останні вирази визначені коректно. З 6.2.31 [15] для g_2 маємо $R_e(-s) > 0$, тобто $R_e(s) < 0$. Розглянемо g_1:

$$g_1(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} \mathbf{B}_n(x)\, dx = \text{const} \int_0^{\infty} x^{s-1-(n-2)/2} \int_0^{\infty} J_{(n-2)/2}(\lambda x)\, \frac{\Phi(d\lambda)}{\lambda^{(n-2)/2}}.$$

З формули (11) випливає

$$g_1(s) = \text{const}\, g_0(s-(n-2)/2)\, \tilde{g}_0(1-s+(n-2)/2), \tag{12}$$

де g_0 — перетворення Меліна функції $J_{(n-2)/2}$, а $\tilde{g}_0$ — перетворення $\Phi(d\lambda)/\lambda^{(n-2)/2} d\lambda$.

Перетворення $g_0(s-(n-2)/2)$ визначається коректно для таких s (див. (6.8.1) з [15]):

$$(2-n)/2 < R_e(s-(n-2)/2) < 3/2, \text{ тобто } 0 < R_e(s) < (n+1)/2.$$

Розглянемо тепер перетворення $\tilde{g}_0$:

$$\tilde{g}_0\left(1 + \frac{n-2}{2} - s\right) = \int_0^{\infty} \frac{\Phi(d\lambda)}{\lambda^s}.$$

Покажемо, що інтеграл в останньому виразі можемо коректно визначити, і знайдемо, для яких s це можливо. Доведемо деякі аналоги теорем 12, 14 із § 2 розд. 1 [1].

Лема 4. *Нехай виконується п. б) теореми. Тоді існує інтеграл* $\int_0^{\infty} d\Phi(\lambda) \times$ $\times (\lambda^{\bar{\alpha}-\delta})$, *де* $0 < \delta < \alpha$.

Доведення. Розглянемо $\int_0^R (l_n(r)/r^{2n-1-\alpha+\delta})\,dr$.

З п. б) теореми випливає, що $l_n(r)/r^{2n-1-\alpha+\delta} \sim L(r)/r^{1+\delta}$ при $r \to \infty$.

З властивості 1° (див. § 1.5 з [3]) функцій, які повільно змінюються на нескінченності, випливає $L(r)/r^{\gamma} \to 0$ при $r \to \infty$ для довільного $\gamma > 0$. Тому можемо зробити висновок, що $l_n(r)/r^{2n-1-\alpha+\delta}$ інтегровна на $[A, \infty), A > 0$, функція. Розглянемо тепер поведінку $l_n(r)/r^{2n-1-\alpha+\delta}$ в нулі. З означення $l_n(r)$ маємо

$$\frac{l_n(r)}{r^{2n-1-\alpha+\beta}} \le \text{const} \frac{r^{2n-2}}{r^{2n-1-\alpha+\delta}} = \frac{\text{const}}{r^{1-\alpha+\delta}}.$$

Отже, при $\delta \in (0, \alpha)$ інтеграл $\int_0^\infty (l_n(r)/r^{2n-1-\alpha+\delta})dr$ збігається. Тому згідно з (2)

$$\int_0^R \frac{l_n(r)}{r^{2n-1-\alpha+\delta}} dr = (2\pi)^n \int_0^R \frac{1}{r^{1+\delta-\alpha}} \int_0^\infty \frac{J_{(n-2)/2}(r\lambda)}{(r\lambda)^{n-2}} d\Phi(\lambda) =$$

$$= \int_0^\infty \frac{(2\pi)^n}{\lambda^{n-2}} \int_0^R \frac{J_{(n-2)/2}(r\lambda)}{r^{n-1-\alpha+\delta}} dr\, d\Phi(\lambda). \tag{13}$$

З формули (6.8.33) з [15] для перетворення Меліна одержуємо

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{J^2_{(n-2)/2}(r\lambda)}{r^{n-1-\alpha+\delta}} dr = \text{const}\, \lambda^{n-2+\delta-\alpha}.$$

З останньої рівності і (13) випливає

$$+\infty > \int_0^\infty \frac{l_n(r)}{r^{2n-1-\alpha+\delta}} dr = \text{const} \int_0^\infty \frac{d\Phi(\lambda)}{\lambda^{\alpha-\delta}}.$$

Лема 4 доведена.

З леми 4 випливає, що перетворення Меліна $\tilde{g}_0(1-s+(n-2)/2)$ визначається коректно для s таких, що $0 < R_e s < \alpha$.

Тому функція $g_1(s)$ визначена для s таких, що $0 < R_e s < \min((n+1)/2, \alpha)$ а $g_1(s+n-1)$ у виразі для $g(s)$ — при

$$-(n-1) < R_e s < -(n-1) + \min((n+1)/2, \alpha).$$

Отже, для $g(s)$ маємо таку ж область визначення.

Аналогічно для перетворення Меліна $\tilde{g}(s)$ одержуємо область визначення $-(n-1) < R_e s < -(n-1) + \min((n+2)/2, \alpha)$.

Скористаємось (12) і запишемо

$$g(s) = g_2(-s)\, g_0\!\left(s + \frac{n}{2}\right) \tilde{g}_0\!\left(1 - s - \frac{n}{2}\right).$$

Аналогічно

$$\tilde{g}(s) = g_2(-s)\, \check{g}_0\!\left(s + \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\right) \tilde{g}_0\!\left(1 - s - \frac{n}{2}\right),$$

де $\check{g}_0$ — перетворення Меліна функції $J_{(n-1)/2}$.

З (6.8.1) з [15] випливає

$$g_0\left(s+\frac{n}{2}\right) = \frac{\Gamma((s/2)/2 + (n-1)/2)2^{s+n/2-1}}{\Gamma(1-s/2)}$$

і

$$\check{g}_0\left(s + \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(s/2+(n-1)/2)2^{s+n/2-3/2}}{\Gamma(1-s/2)}. \tag{14}$$

Скористаємося тепер формулою (11). Виберемо такі функції f і $\tilde{f}$ із перетворення Меліна g_3 і $\tilde{g}_3$ відповідно, щоб вирази $g(s)g_3(1-s+\beta_1)$ та $\tilde{g}(s)\tilde{g}_3(1-s+\beta_2)$ збігалися з точністю до сталого множника. Нехай $f(x) = \tilde{f}(x) = \exp(-x^2)$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 1$. Тоді, використовуючи (6.1.5) і (6.3.1) з [15], маємо

$$g_3(1-s) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right), \quad \tilde{g}_3(2-s) = \frac{1}{2}\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right).$$

Звідси з урахуванням значень $g(s)$ і $\tilde{g}(s)$ і (14) випливає, що $g(s)g_3(1-s+\beta_1)$ та $\tilde{g}(s)\tilde{g}_3(1-s+\beta_2)$ збігаються.

Тому перетворення Меліна функцій

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\varphi_1(tx)dx, \quad \int_0^\infty xe^{-x^2}\varphi_2(tx)dx \tag{15}$$

збігаються з точністю до сталої.

Оскільки для s таких, що $-(n-1) < R_e s < -(n-1) + \min((n+1)/2, \alpha)$, такі перетворення визначені коректно, то з формули оберненого перетворення до перетворення Меліна [16] випливає, що збігаються з точністю до сталого множника й самі функції (15).

Перетворимо першу з них таким чином:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\varphi_1(tx)dx = \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{2\sqrt{u}}\varphi_1\left(t\sqrt{u}\right)du =$$

$$= \frac{1}{2t}\int_0^\infty e^{-z/t^2}\,\frac{\varphi_1\left(\sqrt{z}\right)}{\sqrt{z}}\,dz. \tag{16}$$

Як легко помітити, останній інтеграл — це перетворення Лапласа функції $\varphi_1\left(\sqrt{z}\right)/\sqrt{z}$. Проведемо дослідження асимптотичної поведінки $\varphi_1(z)$.

З означення $l_n(r)$ одержуємо

$$\frac{l_n(r/2)}{(r/2)^{n-1}} = A_3\varphi_1(r).$$

Отже,

$$\frac{\varphi_1\left(\sqrt{z}\right)}{\sqrt{z}} \sim A_3 z^{(n-2-\alpha)/2}L(\sqrt{z}), \quad z \to \infty.$$

Так само, як і раніше, можемо зараз застосувати до (16) теореми 2.6 і 2.7 з [3]. Але можемо діяти й іншим чином. Розглянемо

$$F_0(z) := F_0([0,z)) := \int_0^z \left(\frac{\varphi_1\left(\sqrt{r}\right)}{\sqrt{r}}\right)dr.$$

Оскільки функція $\varphi \geq 0$ скінченна на кожному замкненому відрізку $(0, \infty)$, $\varphi_1(r) \to 0$ при $r \to 0$ (все це випливає з властивостей $l_n(r)$ і означення φ_1), то $F_0(\cdot)$ — міра. Застосуємо лему 1 (вона вірна не тільки для ймовірнісних функцій розподілу, але й для довільних додатних мір). Маємо

$$\int_0^\infty e^{-zp} \frac{\varphi_1(\sqrt{z})}{\sqrt{z}} dz \sim A_4 p^{-(n-\alpha)/2} L\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right), \quad p \to +0.$$

Тому

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \varphi_1(xt) dx \sim A_4 t^{n-\alpha-1} L(t), \quad t \to \infty.$$

З попереднього випливає

$$\int_0^\infty x e^{-x^2} \varphi_2(tx) dx \sim A_5 t^{n-\alpha-1} L(t), \quad t \to \infty. \tag{17}$$

Перетворимо тепер другу функцію (15):

$$\int_0^\infty x e^{-x^2} \varphi_2(tx) dx = \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{2} \varphi_2(t\sqrt{u})\, du = \left| t\sqrt{u} = \sqrt{z} \right| =$$

$$= \frac{1}{2t^2} \int_0^\infty e^{-z/t^2} \varphi_2(\sqrt{z})\, dz.$$

Звідси з використанням (17) маємо

$$\int_0^\infty e^{-zp} \varphi_2(\sqrt{z})\, dz \sim A_6 p^{-(n-\alpha+1)/2} L\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right), \quad p \to +0.$$

Оскільки $\mathbf{B}_{n+1}$ є також і кореляційною функцією однорідного ізотропного поля на $\mathbb{R}^n - \tilde{\mathbf{B}}_n$, то аналогічно φ_1:

$$\frac{\tilde{l}_n(r/2)}{(r/2)^{n-1}} = A_3 \varphi_2(r).$$

Тут $\tilde{l}_n(r)$ відповідає за формулою (2) кореляційній функції $\tilde{\mathbf{B}}_n = \mathbf{B}_{n+1}$. Тому

$$F_1(z) = \int_0^z \varphi_2(\sqrt{r})\, dr$$

— міра.

З тауберових теорем для перетворень Лапласа (див. лему 1.1 з [3]) випливає

$$\int_0^z \varphi_2(\sqrt{r})\, dr \sim A_7 z^{(n+1-\alpha)/2} L(\sqrt{z}), \quad z \to \infty. \tag{18}$$

Розглянемо тепер пару функцій φ_2 і φ_3, де

$$\varphi_3(u) = u^{n-1} \int_0^1 t^{n-1} (1-t^2)^{(n-2)/2} \mathbf{B}_{n+1}(tu) du,$$

Аналогічно до попереднього з формули (11) випливає, що перетворення Меліна для φ_3 дорівнює $\tilde{g}_1(s+n-1)\tilde{g}_2(1-s)$, де $\tilde{g}_2$ — перетворення Меліна функції

$$\begin{cases}(1-t^2)^{(n-2)/2}, & |t|<1,\\ 0, & |t|\geq 1,\end{cases}$$

а $\tilde{g}_1$ визначена раніше.

З (6.2.31) з ([15] випливає:

$$\tilde{g}_2(1-s) = \frac{1}{2}B\left(\frac{n}{2}, \frac{1-s}{s}\right) = \frac{\Gamma((1-s)/2)\,\Gamma(n/2)}{\Gamma((n-1-s)/2)\,((n-1-s)/2)},$$

$$g_2(-s) = \frac{1}{2}\,B\left(\frac{n-1}{2}, \frac{-s}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(-s/2)\,\Gamma((n-1)/2)}{\Gamma((n-1-s)/2)}.$$

Будемо діяти так само, як і раніше з φ_1 і φ_2. Покладемо

$$f_1(x) = e^{-x^2},\ \beta_1 = 0;\ \tilde{f}_1(x) = \frac{n-1}{2}e^{-x^2} + x^2 e^{-x^2},\ \beta_2 = -1.$$

З формул (6.3.1), (6.1.3), (6.1.5) з [15] маємо

$$g_4(1-s) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right),\ \tilde{g}_4(-s) = \frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{2}-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{-s}{2}\right),$$

де g_4 і $\tilde{g}_4$ — перетворення Меліна функцій f_1 і $\tilde{f}_1$ відповідно. Очевидно, що функції $\tilde{g}(s)g_4(1-s)$ і $\tilde{g}_1(s)\tilde{g}_2(1-s)\tilde{g}_4(-s)$ збігаються з точністю до сталої.

Аналогічно з викладеним вище можемо довести, що існують s такі, для яких ці функції визначені коректно. Застосуємо формулу для оберненого перетворення Меліна [16]. Одержуємо, що функції

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\varphi_2(tx)dx,\quad \int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{x}\left(\frac{n-1}{2}+x^2\right)\varphi_3(tx)dx \tag{19}$$

збігаються з точністю до сталого множника.

Перетворимо першу функцію з (19):

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\varphi_2(tx)dx = \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{2\sqrt{u}}\,\varphi_2(t\sqrt{u})\,du =$$

$$= \frac{1}{2t}\int_0^\infty e^{-z/t^2}\,\frac{\varphi_2(\sqrt{z})}{\sqrt{z}}\,dz = \frac{\sqrt{p}}{2}\int_0^\infty e^{-zp}\,\frac{\varphi_2(\sqrt{z})}{\sqrt{z}}\,dz = \frac{\sqrt{p}}{2}g(p).$$

З формули (4.1.6) з [15] для перетворень Лапласа випливає

$$\int_0^\infty e^{-zp}\sqrt{z}\,\varphi_2(\sqrt{z}\,)\,dz = -g'(p).$$

Розглянемо міри $F_1(z)$ і $F_2(z) = \int_0^z \sqrt{r}\,\varphi_2(\sqrt{r}\,)\,dr$ (те, що F_2 — не обов'язково скінченна міра, випливає з означення φ_2 так само, як і для F_0 та F_1).

З очевидної рівності $F_1'(z)\sqrt{z} = F_2'(z)$ маємо:

$$F_2(z) = \int_0^z F_2'(r)dr = \int_0^z F_2'(r)\sqrt{r}\,dr.$$

Проінтегруємо частинами інтеграл у останній рівності і одержимо

$$F_2(z) = \sqrt{r}\, F_1(r)\Big|_0^z - \frac{1}{2}\int_0^z \frac{F_1(r)}{\sqrt{r}}dr =$$

$$= \sqrt{z}\, F_1(z) - \frac{1}{2}\int_0^z \frac{F_1(r)}{\sqrt{r}}dr = \sqrt{z}\, F_1(z) - \frac{1}{2}\int_0^z \frac{F_1(zr)}{\sqrt{zr}} z\,dr.$$

З леми 2 і (18) випливає

$$F_1(z) = A_7 z^{(n-\alpha+1)/2}\hat{L}\left(\sqrt{z}\right), \quad z \to \infty.$$

Оскільки інтеграл $\int_0^1 r^{(n-\alpha)/2-\eta}\,dr$ існує для $\eta < (n-\alpha)/2+1$, $F_1(z)$ обмежена на кожному скінченному інтервалі $(0, \infty)$, то можемо застосувати теорему 2.7 з [3] до інтегралу

$$z^{(\alpha-n-1)/2}\int_0^1 \frac{F_1(zr)}{\sqrt{r}}dr \sim A_7\hat{L}\left(\sqrt{z}\right)\int_0^1 r^{(n-\alpha)/2}\,dr \sim \frac{2A_7}{n-\alpha+2}L\left(\sqrt{z}\right), \quad z \to \infty.$$

Тому для $F_2(z)$ маємо

$$F_2(z) \sim \left(1 - \frac{1}{n-\alpha+2}\right)A_7 z^{(n-\alpha+z)/2}L\left(\sqrt{z}\right), \quad z \to \infty.$$

З леми 1 випливає

$$\int_0^\infty e^{-zp}\varphi_2\left(\sqrt{z}\right)\sqrt{z}\,dz \sim A_8 z^{-(n-\alpha+2)/2}L\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right), \quad p \to +0.$$

Отже,

$$g'(p) \sim -A_8 p^{-(n-\alpha+2)/2}L\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right), \quad p \to +0.$$

Зробимо деякі перетворення:

$$g(p) = -\int_p^\infty g'(t)\,dt = -\int_0^m g'\left(\frac{1}{z}\right)\frac{dz}{z^2} =$$

$$= -\int_0^1 g'\left(\frac{1}{zm}\right)\frac{dz}{mz^2} = m^{(n-\alpha)/2}\int_0^1 \frac{-g'(1/zm)z^{(n-\alpha+2)/2}}{(1/zm)^{-(n-\alpha+2)/2}}\frac{dz}{z^2}.$$

Скористаємося лемою 2 та асимптотикою g':

$$g(p) = m^{(n-\alpha)/2}\int_0^1 \hat{L}\left(\sqrt{zm}\right)m^{(n-\alpha)/2-1}\,dz.$$

Якщо вибрати $\eta < (n-\alpha)/2$, то легко переконатися, що виконуються умови теореми 2.6 з [3]. Тому

$$g(p) \sim A_9 p^{-(n-\alpha)/2}\hat{L}\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right) \sim p^{-(n-\alpha)/2}L\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right), \quad p \to 0.$$

Отже,

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\varphi_2(tx)\,dx \sim \frac{1}{2}A_9 t^{n-\alpha-1}L(t), \quad t \to \infty,$$

і тому

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{x}\left(\frac{n-1}{2}+x^2\right)\varphi_3(tx)dx \sim A_{10}t^{n-\alpha-1}L(t), \quad t\to\infty.$$

Перетворимо другу функцію (19):

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{x}\left(\frac{n-1}{2}+x^2\right)\varphi_3(tx)dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-u}\left(\frac{n-1}{2}+u\right)\frac{\varphi_3\left(t\sqrt{u}\right)}{u}du =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-z/t^2}\left(\frac{n-1}{2}+\frac{z}{t^2}\right)\frac{\varphi_3\left(\sqrt{z}\right)}{z}dz.$$

Позначимо

$$\psi(p) := \int_0^\infty e^{-zp}\frac{\varphi_3\left(\sqrt{z}\right)}{z}dz,$$

де $p=1/t^2$.

Скористаємося властивістю перетворень Лапласа (див., наприклад, [17]) і переконаємося, що друга функція в (19) дорівнює

$$\psi_1(p) := \frac{n-1}{4}\psi(p) - \frac{p}{2}\psi'(p). \tag{20}$$

Розв'язок цього рівняння має вигляд

$$\psi(p) = p^{(n-1)/2}\int_p^\infty \frac{2\psi_1(t)}{t^{(n-1)/2+1}}dt.$$

Перетворимо цей вираз таким чином:

$$\psi(p) = p^{(n-1)/2}\int_0^{1/p} 2z^{(n-1)/2-1}\psi_1\left(\frac{1}{z}\right) =$$

$$= m^{1-(n-1)/2}\int_0^1 2(zm)^{(n-1)/2-1}\psi_1\left(\frac{1}{zm}\right)dz.$$

З леми 2 випливає

$$\psi_1(p) = A_{11}p^{-(n-\alpha-1)/2}\hat{L}\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right).$$

Оскільки $n-\alpha/2-2>-1$, то, застосовуючи теорему 2.7 з [3], то одержуємо

$$\psi(p) = m^{(n-\alpha-1)/2}\int_0^1 2A_{11}\psi_1\left(\frac{1}{zm}\right)\left(\frac{1}{zm}\right)^{(n-\alpha-1)/2} z^{n-2-\alpha/2}dz \sim$$

$$\sim m^{(n-\alpha-1)/2}A_{12}\hat{L}\left(\sqrt{m}\right) \sim p^{-(n-\alpha-1)/2}A_{12}\hat{L}\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right), \quad p\to+0.$$

З леми 2 випливає

$$\psi(p) \sim A_{12} p^{-(n-\alpha-1)/2} L\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right), \quad p \to +0. \tag{21}$$

З означення φ_3 маємо

$$\frac{\varphi_3(x)}{x} = A_{13} \frac{l_{n+1}(x/2)}{(x/2)^{n+2}}, \tag{22}$$

де l_{n+1} відповідає кореляційній функції $\mathbf{B}_{n+1}$ і тому спектральній функції Φ за формулою (2). Оскільки $\varphi_3 \geq 0, \varphi_3(x)/x \to 0, x \to 0$, то аналогічно до того, як це робилось для F_0, F_1, з леми 1 і співвідношення (21) випливає

$$\int_0^z \frac{\varphi_3(\sqrt{r})}{r} dr \sim A_{14} z^{(n-\alpha-1)/2} L(\sqrt{z}), \quad z \to \infty.$$

Використаємо тотожність

$$\int_0^z \frac{\varphi_3(\sqrt{r})}{r} dr = \int_0^{\sqrt{z}} \frac{\varphi_3(\sqrt{r})}{r} dr.$$

З (22) маємо

$$\int_0^z \frac{l_{n+1}(r)}{r^{n+2}} dr \sim A_{15} z^{n-\alpha-1} L(z), \quad z \to \infty. \tag{23}$$

Оскільки $n+1$ непарне, то вірна формула (10):

$$y^\alpha f(iy) = A_2 \int_0^\infty g_{n+1}(t,1)\, t^{n-\alpha} \frac{l_{n+1}(ty)}{(ty)^{2n-\alpha}} dt.$$

Проінтегруємо інтеграл в останньому виразі частинами:

$$y^\alpha f(iy) = A_2 t^2 \int_0^t g_{n+1}(t,1)\, y^{2-n+\alpha} \frac{l_{n+1}(xy)}{(xy)^{n+2}} dx \Big|_0^\infty -$$

$$- A_2 \int_0^\infty y^{\alpha+2-n} \left(g_{n+1}(t,1) t^2\right)' \int_0^t \frac{l_{n+1}(xy)}{(xy)^{n+2}} dx dt.$$

З означення $g_{n+1}(t,1)$ випливає, що при $t \to \infty$ $g_{n+1} \sim t^{-n-2}$, при $t \to 0$ $g_{n+1}(t,1) \sim \text{const}$. Тому з (23) одержуємо

$$g_{n+1}(t,1) t^2 \int_0^t \frac{l_{n+1}(xy)}{(xy)^{n+2}} dx \to 0$$

при $t \to 0$ і при $t \to \infty$. Отже,

$$y^\alpha f(iy) = -A_2 \int_0^\infty y^{\alpha+2-n} \left(g_{n+1}(t,1) t^2\right)' \int_0^t \frac{l_{n+1}(xy)}{(xy)^{n+2}} dx dt =$$

$$= -A_2 \int_0^\infty y^{\alpha+2-n} \left(2t g_{n+1}(t,1) t^2 + g'_{n+1}(t,1) \frac{t^2}{y} \int_0^{yt} \frac{l_{n+1}(x)}{(x)^{n+2}} dx\right) dt.$$

З означення $g_{n+1}(t,1)$ легко одержати такі твердження: функція $tg_{n+1}(t,1)$ поводить себе як t^{-n-1} при $t\to\infty$, функція $tg_{n+1}(t,1)$ — як t при $t\to 0$, функція $t^2 g'_{n+1}(t,1)$ — як t^{-n-1} при $t\to\infty$ і при $t\to 0$ $t^2 g'_{n+1}(t,1)\to 0$. Оскільки функція $\int_0^t \left(\frac{l_{n+1}(x)}{(x)^{n+2}}\right) dx$ обмежена на будь-якому скінченному проміжку з $(0,\infty)$, то можемо застосувати теореми 2.6, 2.7 з [3].

Скористаємося лемою 2. Маємо $y^{\alpha} f(iy) \sim A_{14} L(y)$, $y\to\infty$. Отже, з леми 1 випливає а). Теорему доведено.

Доведені тауберова і абелева теореми мають не лише самостійне значення. Вони дають змогу узагальнювати граничні теореми для функціоналів від випадкових полів [1, 2, 10, 12, 18, 19].

1. *Ядренко М. И.* Спектральная теория случайных полей. – Киев: Вища шк., 1980. – 208 с.
2. *Леоненко Н. Н., Иванов А. В.* Статистический анализ случайных полей. – Киев: Вища шк., 1986. – 216 с.
3. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 142 с.
4. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения: В 2-х т. – М.: Мир, 1984. – Т. 2. – 751 с.
5. *Bingham N. H.* A Tauberian theorem for intehral transforms of Hankel type // J. London Math. Soc. – 1972. – **5**, № 3. – P. 493–503.
6. *Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L.* Regular variation. – Cambridge: Cambridge univ. press, 1989. – 495 p.
7. *Владимиров В. С., Дрожжинов Ю. Н., Завьялов Б. И.* Многомерные тауберовы теоремы для обобщенных функций. – М.: Наука, 1986. – 304 с.
8. *Мирошин Р. Н.* Пересечение кривых гауссовскими процессами. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981. – 211 с.
9. *Лауэ Г.* Тауберовы и абелевы теоремы для характеристических функций // Теория вероятностей и мат. статистика. – 1987. – Вып. 37. – С. 78–92.
10. *Леоненко Н. Н., Оленко А. Я.* Тауберовы и абелевы теоремы для преобразований ганкелевого типа и предельные теоремы для функционалов от случайных полей // Докл. АН УССР. – 1991. – № 9. – С. 61–64.
11. *Леоненко Н. Н., Оленко А. Я.* Тауберовы и абелевы теоремы для корреляционной функции однородного изотропного случайного поля // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 12. – С. 1652–1664.
12. *Leonenko N. N., Olenko A. Ya.* A Tauberian theorem for correlation functions and limit theorems for spherical averages of random fields // Random Oper. Stoch. Equats. – 1992. – **1**, № 1. – P. 58–68.
13. *Ватсон Г.* Теория бесселевых функций: В 2-х т. – М.: Изд-во иностр. лит., 1949. – Т. 1. – 799 с.
14. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований: В 2-х т. – М.: Наука, 1969. – Т. 2. – 328 с.
15. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований: В 2-х т. – М.: Наука, 1969. – Т. 1. – 344 с.
16. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. – М.: ОГИЗ, 1948. – 480 с.
17. *Деч Г.* Руководство к практическому применению преобразований Лапласа. – М.: Наука, 1965. – 288 с.
18. *Dobrushin R. L., Major P.* Non-central limit theorems for nonlinear functions of Gaussian fields // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb. – 1979. – № 50. – P. 27–52.
19. *Olenko A. Ya.* Tauberian, Abelian and limit theorems for strongly dependent random fields // Sixth international Vilnius conference on probability theory and mathematical statistics. Abstacts of communications. Vol. II. Vilnius, 1993. – P. 68–69.

Одержано 06.12.94.