УДС 512.546

И. В. Протасов (Нац. ун-т, Киев)

АБСОЛЮТНО РАЗЛОЖИМЫЕ ГРУППЫ

A number of results concerning construction of resolvable and absolutely resolvable groups are obtained.

Одержана серія результатів про побудову розкладних та абсолютно розкладних груп.

Топологическая группа называется *разложимой*, если ее можно разбить на два плотные подмножества. В [1] доказана разложимость любой недискретной топологической абелевой группы с конечным числом элементов порядка 2. Недискретную неразложимую топологию на счетной группе экспоненты 2 построил В. И. Малыхин [2], используя аксиому Мартина — дополнительное к системе аксиом ZFC теоретико-множественное предположение. В группе Малыхина к каждому элементу сходится лишь один свободный ультрафильтр. Как показано в [3], без дополнительных к системе аксиом ZFC теоретико-множественных предположений построить топологическую группу с таким свойством нельзя. Группа называется *абсолютно разложимой,* если ее можно разбить на два подмножества, плотные в любой недискретной групповой топологии. В [1] отмечена абсолютная разложимость группы целых чисел и любой квазициклической группы, а также поставлена задача описания абсолютно разложимых групп.

В данной статье доказана абсолютная разложимость свободной и свободной абелевой групп произвольного ранга, группы m-ичных дробей (m — произвольное натуральное число >1), счетной локально нормальной группы без элементов порядка 2, счетной локально конечной p-группы (p — произвольное простое число $\neq 2$). В дополнение к теореме Комфорта – Милла показано, что недискретная неразложимая абелева группа содержит счетную открытую подгруппу экспоненты 2. Указаны два способа вложения произвольной группы в абсолютно разложимую группу. Таким образом, получен отрицательный ответ на вопрос из [1] о недискретной неразложимой топологизируемости любой группы, содержащей бесконечную подгруппу экспоненты 2. Также доказано, что абелева группа с бесконечным числом элементов порядка 2 не является абсолютно разложимой. Для доказательства разложимости и абсолютной разложимости предложен специальный метод нормирования групп. Все рассматриваемые топологии предполагаются групповыми.

Пусть каждому элементу g группы G сопоставлено некоторое неотрицательное целое число $\|g\|$, причем для любых элементов $g, h \in G$ выполняются следующие условия:

$$\|gh\| \leq \|g\|+\|h\|, \quad \|g^{-1}\| = \|g\|.$$

Так как $h=g^{-1}(gh)$, неравенство $\|gh\| \geq \|h\|-\|g\|$ является следствием определения нормы. Для каждого элемента $g \in G$ с $\|g\| \neq 0$ обозначим через $n(g)$ целое число, удовлетворяющее условию

$$2^{n(g)} \leq \|g\| < 2^{n(g)+1}.$$

Положим $A_1=\{g \in G : n(g) \text{ — нечетное число}\}$, $A_2=G \setminus A_1$.

Лемма 1. *Пусть на группе G задана некоторая топология, причем для любых окрестности единицы U и натурального числа k найдутся такие не обязательно различные элементы $g_1, g_2 \in U$, что выполняются следующие условия:*

1) $n(g_1)>k$;

2) $\| g_1 g_2 \| = 2 \| g_1 \|$;

3) $2^{n(g_1)} + 2^k \le \| g_1 \| \le 2^{n(g_1)+1} - 2^k$.

Тогда подмножества A_1, A_2 плотны в группе G.

Доказательство. Зафиксируем произвольные элемент $g \in G$, окрестность единицы V и убедимся в том, что $gV \cap A_1 \ne \varnothing$, $gV \cap A_2 = \varnothing$. Выберем такие окрестность единицы U и натуральное число k, что $U^2 \subseteq V$, $\| g \| < 2^k$. Найдем элементы $g_1, g_2 \in U$, удовлетворяющие условиям леммы. Пусть $g_1 \in A_i$ для некоторого $i = 1, 2$. Из условия 3 и выбора числа k вытекают следующие неравенства:

$$\| g g_1 \| \le \| g_1 \| + \| g \| < (2^{n(g_1)+1} - 2^k) + 2^k = 2^{n(g_1)+1},$$

$$\| g g_1 \| \ge \| g_1 \| - \| g \| > (2^{n(g_1)} + 2^k) - 2^k = 2^{n(g_1)}.$$

Значит, $n(g g_1) = n(g_1)$, $g g_1 \in A_i$ и $gV \cap A_i \ne \varnothing$. Из условий 2, 3 и выбора числа k вытекают также следующие неравенства:

$$\| g g_1 g_2 \| \le \| g_1 g_2 \| + \| g \| < 2(2^{n(g_1)+1} - 2^k) + 2^k < 2^{n(g_1)+2},$$

$$\| g g_1 g_2 \| \ge \| g_1 g_2 \| - \| g \| > 2(2^{n(g_1)} + 2^k) - 2^k > 2^{n(g_1)+1}.$$

Значит, $n(g g_1 g_2) = n(g_1) + 1$ и $g g_1 g_2 \in G \setminus A_i$. Так как $g g_1 g_2 \in gU^2 \subseteq gV$, то $gV \cap (G \setminus A_i) \ne \varnothing$ и лемма доказана.

Элемент $g \in G$ назовем *регулярным*, если $\| g \| \ne 0$ и $\| g^n \| = n \| g \|$ для любого натурального числа n. Заметим, что для регулярного элемента g и натурального числа m элемент g^m также регулярен.

Лемма 2. *Пусть на группе G задана некоторая топология, причем в любой окрестности единицы найдется регулярный элемент. Тогда подмножества A_1, A_2 плотны в группе G.*

Доказательство. Вначале покажем, что в любой окрестности единицы V найдется такой регулярный элемент h, что $n(h) > 0$ и $\| h \| > 2^{n(h)}$. Подберем такую окрестность единицы W, что $W^3 \subseteq V$. По условию леммы существует регулярный элемент $g \in W$. Положим $h = g^3$. Так как $\| h \| = 3 \| g \|$, то $\| h \|$ не является степенью двойки. Значит, $\| h \| > 2^{n(h)}$. Поскольку $\| h \| > 3$, $n(h) > 0$.

Зафиксируем произвольные окрестность единицы U и натуральное число k. Для доказательства леммы достаточно найти элементы $g_1, g_2 \in U$, удовлетворяющие условиям леммы 1.

Положим $m = 2^k$ и выберем такую окрестность единицы V, что $V^m \subseteq U$. По доказанному выше найдется такой регулярный элемент $h \in V$, что $n(h) > 0$ и $2^{n(h)} < \| h \| < 2^{n(h)+1}$.

Так как $\| h \|$, $n(h)$ — целые числа, то выполняются следующие неравенства:

$$\| h \| - 2^{n(h)} \ge 1, \quad 2^{n(h)+1} - \| h \| \ge 1.$$

Умножим эти неравенства на 2^k и положим $g = h^m$:

$$2^{n(h)+k} + 2^k \le \| g \| \le 2^{n(h)+k+1} - 2^k.$$

Поскольку $n(h) > 0$, то $n(g) = n(h) + k$. Завершая доказательство, полагаем $g_1 = g_2 = g$.

Теорема 1. *Свободная абелева группа произвольного ранга абсолютно разложима.*

Доказательство. Произвольный неединичный элемент g свободной абелевой группы G запишем в виде $g = a_1^{k_1} \ldots a_n^{k_n}$, где $a_1, \ldots, a_n$ — различные свободные образующие, $k_1, \ldots, k_n$ — ненулевые целые числа. Такое представление однозначно с точностью до порядка сомножителей. Положим $\| g \| = | k_1 | + \ldots + | k_n |$, норма единичного элемента группы G считается равной нулю. Заметим, что любой неединичный элемент группы G регулярен. Так как любая окрестность единицы недискретной топологии на группе G содержит неединичный элемент, то применима лемма 2.

Теорема 2. *Свободное произведение G семейства неединичных групп $\{ G_\alpha : \alpha \in J \}$, $| J | \geq 2$, является абсолютно разложимой группой.*

Доказательство. По определению свободного произведения каждый неединичный элемент группы G однозначно представим в виде $g = a_1 a_2, \ldots, a_n$, где соседние элементы a_i, a_{i+1} принадлежат различным сомножителям семейства $\{ G_\alpha : \alpha \in J \}$ и отличны от единичных элементов этих сомножителей. Положим $\| g \| = n$, норма единичного элемента группы G считается равной нулю. Чтобы воспользоваться леммой 2, достаточно показать, что окрестность U недискретной топологии на группе G содержит регулярный элемент. Заметим, что элемент $g = a_1 a_2, \ldots, a_n$ регулярен, если a_1, a_n принадлежит различным сомножителям свободного произведения.

Выделим два сомножителя G_1, G_2 из семейства $\{ G_\alpha : \alpha \in J \}$ и в каждом из них выберем неединичные элементы $a \in G_1$, $b \in G_2$. Подберем окрестности единицы V, W так, чтобы выполнялись следующие включения:

$$V^2 \subseteq U, \quad a^{-1} W a \subseteq V, \quad b^{-1} W b \subseteq V.$$

Зафиксируем произвольный неединичный элемент $g = a_1 a_2 \ldots a_n$ из окрестности W. Если a_1, a_n принадлежат различным сомножителям свободного произведения, то элемент g регулярен. Обратно, $a_1, a_n \notin G_1$ либо $a_1, a_n \notin G_2$. Ограничимся рассмотрением первой возможности. Тогда $a^{-1} g a \in a^{-1} W a \subseteq V$, $a^{-1} g a g \in V^2 \subseteq U$. Осталось заметить, что элемент $a^{-1} g a g$ регулярен.

***Следствие* 1.** *Свободная группа произвольного ранга абсолютно разложима.*

***Следствие* 2.** *Любая группа вложима в абсолютно разложимую группу.*

Напомним, что дисперсионный характер топологии на группе — это минимальная из мощностей окрестностей единицы.

Теорема 3. *Несчетную группу G экспоненты* 2 *можно разбить на два подмножества, плотные в любой топологии несчетного дисперсионного характера.*

Доказательство. Реализуем группу G как семейство всех конечных подмножеств некоторого множества X с симметрической разностью в качестве групповой операции. Обозначим через $\| g \|$ число элементов подмножества $g \in G$. Зафиксируем на группе G топологию несчетного дисперсионного характера и выберем произвольные окрестность единицы U и натуральное число k. Для доказательства теоремы достаточно найти элементы $g_1, g_2 \in U$, которые удовлетворяют условиям леммы 1.

Подмножество группы G называется дизъюнктным, если его элементы как подмножества множества X попарно не пересекаются. Покажем, что в любой окрестности единицы V группы G найдется бесконечное дизъюнктное подмножество элементов одинаковой нормы. Выберем такую окрестность единицы W, что $W^2 \subseteq V$. Так как окрестность W несчетна, по лемме о пересечениях найдется бесконечное подмножество $\{a_n\colon n<\omega\} \subset W$ элементов одинаковой нормы, дизъюнктное по модулю пересечения. Это означает, что $\bigcap\{a_n\colon n<<\omega\} = a_n \cap a_m$ для всех $n \neq m$. Искомым является подмножество $\{b_n\colon n<\omega\}$, где $b_n = a_{2n}a_{2n+1}$.

Убедимся в том, что в любой окрестности единицы V найдется такое бесконечное дизъюнктное подмножество H элементов одинаковой нормы, что $2^{n(h)} < \|h\|$, $n(h) > 0$ для всех $h \in H$. Подберем такую окрестность единицы W, что $W^3 \subseteq U$. По доказанному выше окрестность W содержит бесконечное дизъюнктное подмножество элементов одинаковой нормы, скажем, s. Но тогда окрестность V содержит бесконечное дизъюнктное подмножество элементов нормы $3s$. Осталось заметить, что число $3s$ не является степенью двойки.

Положим $m = 2^k$ и выберем такую окрестность единицы V, что $V^m \subseteq U$. Выделим в окрестности V такое бесконечное дизъюнктное подмножество H элементов одинаковой нормы, что $2^{n(h)} < \|h\|$, $n(h) > 0$ для всех $h \in H$. Пусть $\|h\| = s \geq 2$, $n(h) = n$ для всех $h \in H$. Зафиксируем различные элементы $h_1, h_2, \ldots, h_{2m} \in H$ и положим

$$g_1 = h_1 h_2 \ldots h_m, \quad g_2 = h_{m+1} h_{m+2} \ldots h_{2m}.$$

Так как семейство H дизъюнктно, то $\|g_1 g_2\| = 2\|g_1\|$ и $\|g_1\| = 2^k s > 2^{k+1}$. Таким образом, выполняются условия 1, 2 леммы 1.

В силу выбора подмножества H для всех $i = 1, \ldots, m$ выполняются неравенства $2^n < \|h_i\| < 2^{n+1}$.

Поскольку n, $\|h_i\|$ — натуральные числа, то для всех $i = 1, \ldots, m$ справедливы неравенства $\|h_i\| - 2^n \geq 1$, $2^{n+1} - \|h_i\| \geq 1$.

Из этих неравенств и определения элемента g_1 вытекают неравенства:

$$2^{n+k} + 2^k \leq \|g_1\| \leq 2^{n+k+1} - 2^k.$$

Так как $n > 0$, то $n(g_1) = n + k$ и выполняется условие 3 леммы 1.

Теорема 4. *Недискретная неразложимая абелева группа G содержит счетную открытую подгруппу экспоненты 2^n, где n — некоторое натуральное число.*

Доказательство. Пусть S — силовская 2-подгруппа группы G. Как известно [1], любая подгруппа неразложимой группы замкнута, а фактор-группа неразложима. По теореме Комфорта – Милла фактор-группа G/S дискретна и, следовательно, подгруппа S открыта. Рассмотрим разбиение подгруппы S на подмножества S_1, S_2:

$$S_1 = \{g \in S : |g| = 2^m,\ m \text{ — нечетное число}\}, \quad S_2 = S \setminus S_1.$$

Возьмем произвольные элементы $g, h \in S$, удовлетворяющие условию $|h| = 2^k$, $|g| < 2^{k+1}$, где k — некоторое натуральное число. Тогда $|gh| = 2^k$, $|gh^2| = 2^{k-1}$. Значит, элементы gh, gh^2 принадлежат различным подмножествам S_1, S_2. Поэтому, если в любой окрестности единицы подгруппы S есть элементы сколь угодно большого порядка, то подмножества S_1, S_2 плотны в

S. Но тогда подгруппа S, а значит, и группа G, разложимы. Таким образом, найдутся такие окрестность единицы V и натуральное число s, что $V \subseteq S$ и $|g| \le s$ для всех $g \in V$. Рассмотрим открытую подгруппу H группы G, порожденную окрестностью V, и заметим, что экспонента подгруппы H конечна. По теореме 3 группа $H_1 = \{h \in H : h^2 = e\}$ имеет счетную окрестность единицы. Индуктивные соображения позволяют также заключить, что имеется счетная окрестность единицы в фактор-группе H/H_1. Но тогда подгруппа H имеет счетную окрестность единицы U. Подгруппа, порожденная окрестностью U, открыта, содержится в S и имеет конечную экспоненту.

Рассмотрим группы $S(X)$ и $A(X)$ соответственно всех подстановок на бесконечном множестве X и всех подстановок с конечными носителями. Положим $S_1 = \{f \in A(X) : \operatorname{supp} f$ — нечетное число$\}$, $S_2 = A(X) \setminus S_1$. Легко проверить, что подмножества S_1, S_2 плотны в топологии поточечной сходимости. Таким образом, группа $A(X)$ с топологией поточечной сходимости разложима. Снабдим группу $S(X)$ топологией поточечной сходимости и заметим, что $A(X)$ — плотная подгруппа группы $S(X)$. Следовательно, группа $S(X)$ с топологией поточечной сходимости также разложима. Вопрос об абсолютной разложимости групп $S(X)$ и $A(X)$ открыт. Следующий результат дает некоторое продвижение в этом направлении.

Теорема 5. *Группу $A(X)$ всех подстановок на несчетном множестве X с конечными носителями можно разбить на два подмножества, плотные в любой топологии несчетного дисперсионного характера с базой окрестностей единицы, состоящей из подгрупп.*

Доказательство. Для элемента $g \in A(X)$ обозначим через $\|g\|$ число элементов носителя $\operatorname{supp} g$ подстановки g. Зафиксируем на группе $A(X)$ произвольную топологию несчетного дисперсионного характера с базой окрестностей единицы из открытых подгрупп. Напомним, что $n(g)$ — натуральное число, удовлетворяющее неравенствам $2^{n(g)} \le \|g\| < 2^{n(g)+1}$. Покажем, что подмножества $A_1 = \{g \in A(X) : n(g)$ — нечетное число$\}$, $A_2 = A(X) \setminus A_1$ плотны в этой топологии. Для этого выберем произвольные элемент $g \in A(X)$, открытую подгруппу U и убедимся в том, что $gU \cap A_1 \ne \varnothing$, $gU \cap A_2 \ne \varnothing$.

По лемме о пересечениях найдется такое подмножество $\{g_n : n < \omega\} \subset U$ различных элементов одинаковой нормы, например, s, что подмножество $\{\operatorname{supp} g_n : n < \omega\}$ дизъюнктно по модулю пересечения. Пусть $m = |\bigcap \{\operatorname{supp} g_n : n < \omega\}|$. Тогда для любого натурального числа n $g_1 g_2 \ldots g_n \in U$ и справедливы неравенства

$$n(s-m) \le \|g_1 g_2 \ldots g_n\| \le ns.$$

Обозначим $d = \|g\|$ и заметим, что для любого натурального числа n выполняются неравенства

$$n(s-m) - d \le \|g g_1 g_2 \ldots g_n\| \le ns + d.$$

Так как $\{ns + d : n < \omega\}$, $\{n(s-m) - d : n < \omega\}$ — арифметические прогрессии, то легко найти такие пары натуральных чисел n_1, k_1 и n_2, k_2, что k_1 нечетно, k_2 четно и справедливы неравенства

$$2^{k_1} < n_1 s + d < 2^{k_1+1}, \quad 2^{k_1} < n_1(s-m) - d < 2^{k_1+1},$$

$$2^{k_2} < n_2 s + d < 2^{k_2+1}, \quad 2^{k_2} < n_2(s-m) - d < 2^{k_2+1}.$$

Тогда $gg_1g_2 \dots g_n \in A_1$, $gg_1g_2 \dots g_n \in A_2$. Значит, $gU \cap A_1 \neq \varnothing$, $gU \cap A_2 \neq \neq \varnothing$ и теорема доказана.

Упомянутая во введении конструкция Малыхина позволяет снабдить недискретной неразложимой топологией любую абелеву группу с бесконечной подгруппой экспоненты 2. В этой связи Комфорт и ван Милл поставили в [1] вопрос о недискретной неразложимой топологизируемости произвольной группы, которая содержит бесконечную подгруппу экспоненты 2. Отрицательный ответ на этот вопрос дает следствие 2 из теоремы 2. Но тогда естественно спросить, существует ли недискретная неразложимая топология на группе, которая имеет инвариантную бесконечную подгруппу экспоненты 2? Отрицательный ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 6. *Сплетение $G = H \sim Z$ произвольной группы H и группы целых чисел Z является абсолютно разложимой группой.*

Доказательство. По определению сплетения элементами группы G являются пары (f, z), где $f \in \mathrm{Fun}$, $z \in Z$, Fun — множество всех отображений $f: Z \to H$ с конечными носителями $\mathrm{supp} f = \{x \in Z : f(x) \neq e\}$, e — единица группы H. Умножение в группе G определяется следующим правилом:

$$(f_1(x), z_1)(f_2(x), z_2) = (f_1(x)f_2(x+z_1), z_1+z_2).$$

Для отображения $f \in \mathrm{Fun}$, отличного от тождественного отображения id ($id(x) = e$ для всех $x \in Z$) введем следующие обозначения: $l(f) = \min \mathrm{supp} f$, $r(f) = \max \mathrm{supp} f$.

Положим $\nu(g) = \max\{|l(f)|, r(f)\}$ для элемента $g = (f, z)$, $f \neq id$ и $\nu(g) = = 0$ для $g = (id, z)$. Ввиду теоремы 1 можно считать, что группа H не единична. Определим разбиение группы G на подмножества S_1, S_2:

$$S_1 = \{g \in G : \nu(g) \text{ — нечетное число}\}, \quad S_2 = G \setminus S_1.$$

Наша цель — показать, что подмножества S_1, S_2 плотны в любой недискретной топологии на группе G. Зафиксируем такую топологию.

Вначале убедимся в том, что в любой окрестности единицы найдется такой элемент (f, z), что $f \neq id$. Предположим противное и выберем окрестность единицы $V = \{(id, z) : z \in K\}$, K — бесконечное подмножество из Z. Зафиксируем неединичный элемент $h \in H$ и положим $f_0(0) = h$, $\bar{f}_0(0) = h^{-1}$ и $f(x) = = \bar{f}(x) = e$ для всех $x \neq 0$. Выберем такую окрестность единицы W, что $b^{-1}Wb \subseteq V$, где $b = (f_0, 0)$. В окрестности W возьмем произвольный элемент $g = (id, z)$, $z \neq 0$, и положим $c = b^{-1} g b$. Так как $c = (\bar{f}_0(x)f_0(x+z), z)$ и $|\mathrm{supp}\, \bar{f}_0(x)f_0(x+z)| = 2$, получено противоречие с тем, что $c \in V$.

Далее, проверим, что для любой окрестности единицы V подмножество $\{\nu(g) : g \in V\}$ не ограничено. Допустим противное и выберем такие окрестность единицы V' и натуральное число m, что $\nu(g) < m$ для всех $g \in V'$. Положим $a_{2m} = (id, 2m)$ и выберем такую окрестность единицы $W \subseteq V'$, что $a_{2m}^{-1} W a_{2m} \subseteq V'$. В окрестности W возьмем произвольный элемент $g = (f, z)$, $f \neq \neq id$, и положим $d = a_{2m}^{-1} g a_{2m}$. Так как $d = (f(x-2m), z)$ и $\nu(g) < m$, то $r(f(x-2m)) > m$ и $\nu(d) > m$. Поскольку $d \in V'$, получено противоречие с выбором окрестности V'.

Наконец, зафиксируем произвольный элемент $g = (f, z)$ группы G, окрестность единицы U и покажем, что $gU \cap S_1 \neq \varnothing$, $gU \cap S_2 \neq \varnothing$. Окрестность единицы V выберем так, чтобы $a^{-1}Va \subseteq U$; $aVa^{-1} \subseteq U$, где $a = (id, 1)$. Пусть $\nu(d) = m$. Возьмем такой элемент $g_1 = (f_1, z_1) \in V$, что $\nu(g_1) > m + |z|$. Так как $gg_1 = (f(x)f_1(x+z), z+z_1)$, то $\nu(gg_1) > m$. Обозначим $s(x) = f(x)f_1(x+$ $+z)$ и рассмотрим два случая.

1) $\nu(gg_1) = r(s)$. Положим $g_2 = a^{-1}g_1a$. Так как $gg_2 = (f(x)f_1(x+z-1),$ $z+z_1)$, то $\nu(gg_2) = r(s)+1$.

2) $\nu(gg_1) = -l(s)$. Положим $g_2 = ag_1a^{-1}$. Так как $gg_2 = (f(x)f_1(x+z+1),$ $z+z_1)$, то $\nu(gg_2) = -l(s)-1$.

Итак, в любом из двух возможных вариантов числа $\nu(gg_1)$ и $\nu(gg_2)$ разной четности. Поскольку $g_1, g_2 \in U$, то $gU \cap S_1 \neq \varnothing$, $gU \cap S_2 \neq \varnothing$ и теорема доказана.

Вопрос об абсолютной разложимости группы рациональных чисел Q — один из основных нерешенных вопросов на пути описания абсолютно разложимых абелевых групп. В [1] доказана лишь абсолютная разложимость циклических подгрупп из Q. Поэтому определенный интерес представляет следующая теорема.

Теорема 7. *Группа m-ичных дробей $Q_m = \{z/m^n :\ z, n$ — целые числа, $n \geq$ $\geq 0\}$ с операцией сложения абсолютно разложима для любого натурального числа $m > 1$.*

Доказательство. Положим $Q_m^+ = \{a \in Q_m :\ a \geq 0\}$ и заметим, что $Q_m =$ $= Q_m^+ \cup (-Q_m^+)$. Каждое число $a \in Q_m^+$ однозначно представимо в виде $a =$ $= \sum \{\alpha_i m^i :\ i \in Z\}$, где $\alpha_i \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, Z — множество целых чисел, причем множество $\varphi(a) = \{i \in Z :\ \alpha_i \neq 0\}$ конечно. Для числа $a \neq 0$ из множества Q_m^+ введем следующие обозначения:

$$l(a) = \min \varphi(a), \quad r(a) = \max \varphi(a), \quad \nu(a) = \max\{|l(a)|, r(a)\}.$$

Положим $S_1 = \{a \in Q_m^+ :\ \nu(a)$ — нечетное число$\}$, $S_2 = Q_m^+ \setminus S_1$. Зафиксируем произвольную недискретную топологию на группе Q_m и докажем, что подмножества S_1, S_2 плотны в подполугруппе Q_m^+, а следовательно, подмножества $S_1 \cup (-S_1)$, $S_2 \cup (-S_2)$ плотны в группе Q_m. Выберем произвольный элемент $g \in Q_m^+$ и окрестность нуля U подполугруппы Q_m^+.

Предположим, что в любой окрестности нуля подполугруппы Q_m^+ найдется такой элемент x, что $r(x) < -(\nu(g)+1)$. Выберем окрестность нуля V подполугруппы Q_m^+ так, чтобы $V \subseteq U$, $mV = \{mx :\ x \in V\} \subseteq U$. Возьмем такой элемент $a \in V$, что $r(a) < -(\nu(g)+1)$. Тогда $\nu(g+a) = \nu(a) = -l(a)$, $\nu(g+$ $+ma) = -l(a)+1$. Так как числа $\nu(g+a)$, $\nu(g+ma)$ разной четности и $a, ma \in U$, то $(g+U) \cap S_1 \neq \varnothing$, $(g+U) \cap S_2 \neq \varnothing$.

Далее предполагаем, что в любой окрестности нуля подполугруппы Q_m^+ найдется такой элемент x, что $r(x) > -(\nu(g)+1)$. Заметим, что $r(m^k x) =$ $= r(x)+k$ для любых натурального k и ненулевого элемента $x \in Q_m^+$. Поэтому для любого натурального числа r в любой окрестности нуля подполугруппы Q_m^+ найдется такой элемент x, что $r(x) > r$.

Выберем окрестность нуля V подполугруппы Q_m^+ так, чтобы выполнялись следующие включения:

$$V+V \subseteq U, \quad m(V+V) \subseteq U, \quad m^2(V+V) \subseteq U.$$

Зафиксируем такие элементы $a, b \in V$, что $s \leq r(a) < r(b)$, где $s = \nu(g)+$ $+1$. Запишем канонические разложения чисел a, b, $a+b$:

$$a = \sum \{\alpha_i m^i : i \in Z\}, \quad b = \sum \{\beta_i m^i : i \in Z\}, \quad a+b = \sum \{\gamma_i m^i : i \in Z\}.$$

Из чисел a, b, $a+b$ выберем одно число по следующим правилам и обозначим его через c. Если среди чисел $\alpha_s, \alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_{r(a)}$ есть отличное от $m-1$, то полагаем $c = a$. В противном случае, если среди чисел $\beta_s, \beta_{s+1}, \ldots, \beta_{r(b)}$ есть отличное от $m-1$, то полагаем $c = b$. Наконец, если $\alpha_s = \ldots = \alpha_{r(a)} = m-1$, $\beta_s = \ldots = \beta_{r(b)} = m-1$, то $\gamma_{r(a)+1} = 0$ и полагаем $c = a+b$. Такой выбор числа c обеспечивает выполнение следующих равенств:

$$r(g+c) = r(c), \quad r(g+mc) = r(mc) = r(c)+1.$$

Возможны следующие случаи.

1) $\nu(c) = r(c)$. Так как $\nu(g) < r(c)$, то $\nu(g+c) = \nu(c)$, $\nu(g+mc) = \nu(c)+1$.

2) $\nu(c) = -l(c)$, $r(c) < -l(c)$. Если $r(c) = |l(c)|-1$, то $\nu(mc) = r(mc)$. Заменим элемент c на элемент $mc \in m(V+V)$ и приходим к случаю 1. В противном случае $r(c) < |l(c)|-1$. Но тогда $\nu(g+c) = -l(c)$, $\nu(g+mc) = -l(c)+1$.

Итак, в любом из двух возможных вариантов числа $\nu(g+c)$, $\nu(g+mc)$ разной четности. Так как $c, mc \in U$, то $(g+U) \cap S_1 \neq \varnothing$, $(g+U) \cap S_2 = \varnothing$ и теорема доказана.

Теорема 8. *Группа G без элементов порядка 2 абсолютно разложима, если существует такая возрастающая цепочка ее конечных подгрупп*

$$G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_{n-1} \subset G_n \subset \ldots,$$

что $G = \bigcup \{G_n : n < \omega\}$ и каждая подгруппа G_{n-1} инвариантна в подгруппе G_n.

Доказательство. Возьмем произвольный элемент $g \in G_n \setminus G_{n-1}$. Так как фактор-группа G_n / G_{n-1} не имеет элементов порядка 2, то $gG_{n-1} \neq g^{-1}G_{n-1}$. Поэтому для некоторого подмножества $K_n \subseteq G_n \setminus G_{n-1}$ существует следующее разложение подмножества $G_n \setminus G_{n-1}$ на смежные классы по подгруппе G_{n-1}:

$$G_n \setminus G_{n-1} = (\bigcup \{gG_{n-1} : g \in K_n\}) \cup (\bigcup \{g^{-1}G_{n-1} : g \in K_n\}).$$

Положим $S_1(0) = G_0$, $S_2(0) = \varnothing$ и введем следующие обозначения:

$$S_1(n) = \bigcup \{gG_{n-1} : g \in K_n\}, \quad S_2(n) = \bigcup \{g^{-1}G_{n-1} : g \in K_n\},$$

$$S_1 = \bigcup \{S_1(n) : n < \omega\}, \quad S_2 = \bigcup \{S_2(n) : n < \omega\}.$$

Зафиксируем произвольную недискретную топологию на группе G и убедимся в том, что подмножества S_1, S_2 плотны в этой топологии. Возьмем произвольные окрестность единицы U, $U = U^{-1}$, элемент $a \in G$ и выберем такую подгруппу G_m, что $a \in G_m$. Так как окрестность U бесконечна, а подгруппа G_m конечна, то найдется элемент $h \in U \setminus G_m$. Выберем такой номер n, что $h \in G_n \setminus G_{n-1}$. Тогда $h \in gG_{n-1}$ либо $h \in g^{-1}G_{n-1}$ для некоторого элемента $g \in K_n$. Пусть для определенности $h \in gG_{n-1}$. Значит, $ha \in gG_{n-1}$ и $Ua \cap S_1 \neq \varnothing$. С другой стороны, $h^{-1} \in G_{n-1}g^{-1}$. Так как подгруппа G_{n-1} инвариантна в подгруппе G_n, то $G_{n-1}g^{-1} = g^{-1}G_{n-1}$. Следовательно, $h^{-1}a \in g^{-1}G_{n-1}$ и $Ua \cap S_2 \neq \varnothing$.

Отметим, что условию теоремы удовлетворяют любая счетная локально нормальная группа без элементов порядка 2 и любая счетная локально конечная p-группа (p — простое число $\neq 2$). Напомним, что группа называется локально конечной (локально нормальной), если любое конечное подмножество ее элементов содержится в конечной (конечной инвариантной) подгруппе.

Как следует из доказательства теоремы 8, группу G можно разбить на два подмножества S_1, S_2 таким образом, что $Ag \cap S_1 \neq \varnothing$, $Ag \cap S_2 \neq \varnothing$ для любых элемента $g \in G$ и бесконечного симметричного подмножества $A \subseteq G$ (симметричность A означает, что $A = A^{-1}$). Группу G, имеющую такое разбиение, назовем S-разложимой. Ясно, что всякая S-разложимая группа абсолютна разложима. Однако класс S-разложимых групп существенно уже класса абсолютно разложимых групп. Описанию S-разложимых абелевых групп предполагается посвятить отдельную статью. Отметим лишь следующий неожиданный факт: группа Z^2 в отличие от группы целых чисел Z не является S-разложимой.

По теореме Грэхема – Либа – Росчайльда для любого конечного разбиения бесконечномерного векторного пространства над конечным полем в одном из подмножеств разбиения есть аффинные подпространства любой конечной размерности. Для векторных пространств над полем из двух элементов эту теорему можно усилить: в одном из подмножеств разбиения есть аффинное подпространство бесконечной размерности. Сформулируем это утверждение на групповом языке.

Теорема 9. *Для любого конечного разбиения* $G = C_1 \cup \ldots \cup C_n$ *бесконечной группы экспоненты* 2 *найдутся такие подмножество разбиения* C_i, *элемент* $g \in G$ *и бесконечная подгруппа* H, *что* $gH \subseteq C_i$.

Доказательство. По теореме Хиндмена в одном из подмножеств разбиения C_i найдется такое бесконечное подмножество A, что $FP(A) \subseteq C_i$, где $FP(A)$ — множество конечных произведений различных элементов подмножества A. Зафиксируем произвольный элемент $g \in A$ и обозначим через H подгруппу, порожденную подмножеством $A \setminus \{g\}$. Так как G — группа экспоненты 2, то $gH \subseteq FP(A) \subseteq C_i$.

Теорема 10. *Абелева группа* G *с бесконечным числом элементов порядка* 2 *не является абсолютно разложимой.*

Доказательство. Допустим противное и рассмотрим разбиение группы G на подмножества S_1, S_2, плотные в любой недискретной топологии. Выделим в группе G бесконечную подгруппу S экспоненты 2 и положим $C_1 = S_1 \cap S$, $C_2 = S_2 \cap S$. По теореме 9 найдутся такие подмножество C_i, элемент $g \in S$ и бесконечная подгруппа $H \subseteq S$, что $gH \subseteq C_i$. Зафиксируем произвольную недискретную топологию τ' на подгруппе H. Рассмотрим топологию τ на группе G, которая индуцирует топологию τ' на H, причем подгруппа H открыта в топологии τ. Тогда внутренность подмножества S_i в топологии τ не пуста, а следовательно, подмножество $G \setminus S_i$ не плотно в топологии τ. Получено противоречие с выбором разбиения $G = S_1 \cup S_2$.

Замечания. **1.** В [1] Комфортом и ван Миллом поставлен вопрос: содержит ли недискретная абелева группа открытую подгруппу экспоненты 2? Используя теорему 4, дадим утвердительный ответ на этот вопрос.

Пусть G — недискретная неразложимая абелева группа. Ввиду теоремы 4 можно считать, что G — счетная группа экспоненты 2^n. Предположим, что $n > 1$ и любая окрестность единицы содержит элементы порядка 2^n. Представим группу G в виде прямого произведения семейства $\{A_m : m < \omega\}$ циклических групп порядка $\leq 2^n$. Пусть B_m — подгруппа экспоненты 2 группы A_m,

B — подгруппа экспоненты 2 группы G. Разобьем подмножество $A_m \backslash B_m$ на два подмножества X_m и $Y_m = X_m^{-1}$. Элементы группы G — это функции $f: \omega \to \{A_m : m < \omega\}$, $f(m) \in A_m$ с конечными носителями $\operatorname{supp} f = \{m : f(m) \neq \neq e_m\}$, e_m — единица группы A_m. Для элемента $f \in G \backslash B$ положим $r(f) = = \max\{m : f(m) \notin B_m\}$. Если $f(r(f)) \in X_m$, то отнесем элемент f к подмножеству X. В противном случае отнесем элемент f к подмножеству Y. Включим в подмножество Y также подгруппу B. По построению $X \bigcap Y = \varnothing$, $X \bigcup \bigcup Y = G$. Зафиксируем произвольные элемент $g \in G$ и симметричную окрестность единицы U. Если подмножество $\{\max r(f) : f \in U \backslash B\}$ ограничено, то, очевидно, подгруппа B открыта; что противоречит предположению. Значит, найдется такой элемент $f \in U \backslash B$, что $r(f) > \max \operatorname{supp} g$. Пусть $m = r(f)$ и, для определенности, $f(m) \in X_m$. Тогда $gf \in X$, $gf^{-1} \in Y$, следовательно, подмножества X, Y плотны в группе G. Полученное противоречие с неразложимостью группы G показывает, что $n = 1$.

2. Теорема 3 справедлива для всех несчетных абелевых групп. Это вытекает из того, что любую абелеву группу можно вложить в прямое произведение счетных групп и следующего утверждения.

Пусть H — прямое произведение несчетного семейства $\{H_\alpha : \alpha \in J\}$ счетных групп. Любую несчетную подгруппу $H \subseteq G$ можно разбить на два подмножества, плотные в любой топологии на G несчетного дисперсионного характера.

Для доказательства элементы группы G записываем как функции $f: J \to \bigcup \bigcup \{H_\alpha : \alpha \in J\}$, $f(\alpha) \in H_\alpha$ с конечными носителями $\operatorname{supp} f = \{\alpha \in J : f(\alpha) \neq \neq e_\alpha\}$, e_α — единица группы H_α. Покажем, что в любой окрестности единицы U недискретной топологии на G найдется такое бесконечное подмножество $\{f_n : n < \omega\}$, что подмножество $\{\operatorname{supp} f_n : n < \omega\}$ дизъюнктно и $|\operatorname{supp} f_n| = = |\operatorname{supp} f_m|$ для всех $n, m < \omega$. Выберем такую окрестность единицы V, что $VV^{-1} \subseteq U$. По лемме о пересечениях найдется такое несчетное подмножество $W \subseteq V$, что подмножество $\{\operatorname{supp} f : f \in W\}$ дизъюнктно по модулю пересечения $X = \bigcap \{\operatorname{supp} f : f \in W\}$. Так как подмножество X конечно, а подгруппы H_α счетны, существует такое несчетное подмножество $W' \subseteq W$, что $f(\alpha) = g(\alpha)$ для всех $f, g \in W'$ и $\alpha \in X$. Выберем подмножество $\{h_n : n < \omega\}$ различных элементов из W' и положим $h_n = h_{2n} h_{2n+1}^{-1}$. Далее можно воспользоваться доказательством теоремы 3.

3. В предположении аксиомы Мартина теорема 10 вытекает из существования недискретных неразложимых топологий на счетной группе экспоненты 2. Приведенное выше доказательство этой теоремы не зависит от дополнительных к ZFC предположений.

1. *Comfort W. W., van Mill J.* Groups with only resolvable group topologies // Proc. Amer. Math. Soc. – 1994. – **120**, № 3. – P. 687–696.
2. *Малыхин В. И.* Экстремально несвязные и близкие к ним группы // Докл. АН СССР. – 1975. **220**, № 1. – С. 27–30.
3. *Протасов И. В.* Фильтры и топологии на полугруппах // Мат. студії. Праці Львів. мат. тов-ва. – 1994. – Вип. 3. – С. 15–28.

Получено 06.03.95