УДС 517.944

Л. Г. Хома, Н. Г. Хома (Терноп. пед. ін-т)

УЗАГАЛЬНЕНІ ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ КВАЗІЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

We study the boundary-value problem for the quasilinear equation $u_{tt}-u_{xx}=F[u, u_t\, u_x]$, $u(0,t)=u(\pi,t)$, $u(x,t+\pi/q)=u(x,t)$, $0\le x\le\pi$, $t\in\mathbb{R}$, $q\in\mathbb{N}$. The conditions, which are sufficient for uniqueness of a smooth solution, are found.

Вивчається крайова періодична задача для квазілінійного рівняння $u_{tt}-u_{xx}=F[u, u_t\, u_x]$, $u(0,t)=u(\pi,t)$, $u(x,t+\pi/q)=u(x,t)$, $0\le x\le\pi$, $t\in\mathbb{R}$, $q\in\mathbb{N}$. Знаходяться умови, при яких справедлива теорема єдиності гладкого розв'язку.

На основі операторів Вейводи – Штедри [1–3] можна продовжити дослідження розв'язності крайових періодичних задач при конкретних значеннях періоду T. Зауважимо, що при $T=2\pi$ така задача розглянута в [4], а випадок $T=\pi$ розглядається у даній роботі.

1. Лінійна π-періодична задача. Дослідимо спочатку таку крайову π-періодичну задачу:

$$u_{tt}-u_{xx} = g(x,t), \quad 0<x<\pi, \quad t\in\mathbb{R}, \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t\in\mathbb{R}, \tag{2}$$

$$u(x,t+\pi/q) = u(x,t), \quad 0\le x\le\pi, \quad t\in\mathbb{R}, \quad q\in\mathbb{N}. \tag{3}$$

Розглянемо оператор вигляду

$$(R_1 g)(x,t) = (Sg)(x,t)+\frac{1}{4}\int_0^{\pi} d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau, \tag{4}$$

$$(Sg)(x,t) = \frac{1}{4}\int_0^{\pi} Q(\xi)\,d\xi \int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau, \tag{5}$$

де

$$Q(\xi) = \begin{cases} 1, & 0\le\xi\le x, \\ -1, & x<\xi\le\pi. \end{cases} \tag{6}$$

Позначимо через C_π простір функцій, неперервних і обмежених на $[0,\pi]\times\times\mathbb{R}$, через C_t — простір функцій, неперервних і обмежених на $[0,\pi]\times\mathbb{R}$ разом з похідною відносно t, а через A_1^T — простір функцій $g(x,t)$:

$$A_1^T = \{g : g(x,t)=g(\pi-x,t)=g(x,t+T)\}. \tag{7}$$

Враховуючи позначення (4)–(6) і припускаючи, що $g\in A_1^T\cap C_\pi$, одержуємо такі рівності:

$$(R_1 g)(0,t) = (R_1 g)(\pi,t) = 0, \quad (R_1 g)(x,t+T) = (R_1 g)(x,t).$$

Отже, функція $u(x,t)=(R_1 g)(x,t)$ задовольняє умови (2) і (3). Оскільки функція $\tilde{u}(x,t)=(Sg)(x,t)$ [1, 2] задовольняє неоднорідне рівняння (1), то для того щоб функція $u(x,t)=(R_1 g)(x,t)$ була розв'язком неоднорідного рівняння (1), потрібно, щоб функція

$$u^0(x,t) = \frac{1}{4}\int_0^{\pi} d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau \tag{8}$$

задовольняла однорідне рівняння $u_{tt}^0 - u_{xx}^0 = 0$. Оскільки $u_{xx}^0 \equiv 0$ (функція $u^0(x,t)$ від x не залежить), то можна показати, що й $u_{tt}^0 \equiv 0$.

Враховуючи (8), маємо

$$u_t^0(x,t) = \frac{1}{4}\int_0^\pi g(\xi, t+\xi)\,d\xi - \frac{1}{4}\int_0^\pi g(\xi, t-\xi)\,d\xi. \tag{9}$$

Зробивши заміну змінної $\xi = \pi - \eta$ в першому інтегралі рівності (9), одержуємо

$$u_t^0(x,t) = -\frac{1}{4}\int_\pi^0 g(\pi-\eta, t+\pi-\eta)\,d\xi - \frac{1}{4}\int_0^\pi g(\xi, t-\xi)\,d\xi. \tag{10}$$

Якщо припустити, що $g \in A_1^T$, тобто виконується умова $g(\pi - x, t) = g(x, t)$, то рівність (10) запишеться таким чином:

$$u_t^0(x,t) = \frac{1}{4}\int_0^\pi g(\eta, t+\pi-\eta)\,d\eta - \frac{1}{4}\int_0^\pi g(\xi, t-\xi)\,d\xi. \tag{11}$$

Тепер, покладаючи $T = \pi/q$, $q \in \mathbb{N}$, тобто вважаючи, що функція $g(x,t)$ є π/q-періодичною відносно змінної t, зокрема, $g(x, t+\pi) = g(x,t)$, з (11) одержуємо, що $u_t^0(x,t) \equiv 0$, а це означає, що й $u_{tt}^0 \equiv 0$.

Таким чином, справедливе наступне твердження.

Теорема 1. *Якщо*

$$g(x,t) \in G_t \cap A_1^\omega = \{g : g(x,t) = g(\pi - x, t) = g(x, t+\omega),\ \omega = \pi/q,\ q \in \mathbb{N}\},$$

то функція

$$u(x,t) \equiv (R_1 g)(x,t) = (Sg)(x,t) + \frac{1}{4}\int_0^\pi d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau \tag{12}$$

є єдиною функцією з простору $C_\pi^2 \cap A_1^\omega$, *що задовольняє умови* (1)–(3), *причому*

$$\| u(x,t)\|_{C_\pi} \le \frac{\pi^2}{2}\| g(x,t)\|_{C_\pi}; \tag{13}$$

$$\| u_t(x,t)\|_{C_\pi} \le \frac{\pi}{2}\| g(x,t)\|_{C_\pi}; \tag{14}$$

$$\| u_x(x,t)\|_{C_\pi} \le \frac{\pi}{2}\| g(x,t)\|_{C_\pi}, \tag{15}$$

де $\| g(x,t)\|_{C_\pi} = \sup\{|g(x,t)|;\ 0 \le x \le \pi,\ t \in \mathbb{R}\}$.

Доведення. Те, що функція $u = R_1 g$ є розв'язком задачі (1)–(3), випливає з властивостей оператора S [1, 2] і проведених вище досліджень.

Встановимо оцінки (13)–(15). На основі (5) і (6) одержуємо

$$4|(Sg)(x,t)| \le \| g(x,t)\|_{C_\pi} \left| \int_0^\pi d\xi \left| \int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} d\tau \right| \right| =$$

$$= 2\| g(x,t)\|_{C_\pi} \left\{ \int_0^x (x-\xi)\,d\xi - \int_x^\pi (x-\xi)\,d\xi \right\} =$$

$$= \| g(x,t) \|_{C_\pi} (2x^2 - 2x\pi + \pi^2) \leq \pi^2 \| g(x,t) \|_{C_\pi}. \tag{16}$$

Аналогічно знаходимо оцінку

$$\left| \int_0^\pi d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi,\tau)\, d\tau \right| \leq \pi^2 \| g(x,t) \|_{C_\pi}. \tag{17}$$

Тепер, враховуючи нерівності (16) і (17), на основі формули (12) одержуємо оцінку (13).

Оскільки $g(x,t) \in G_t \cap A_1^\omega$, справедливі рівності

$$u_t(x,t) = \frac{1}{4} \int_0^\pi Q(\xi) \{ g(\xi, t - x + \xi) - g(\xi, t + x - \xi) \} d\xi, \tag{18}$$

$$u_x(x,t) = -\frac{1}{4} \int_0^\pi Q(\xi) \{ g(\xi, t - x + \xi) + g(\xi, t + x - \xi) \} d\xi. \tag{19}$$

Звідси

$$| u_t(x,t) | \leq \frac{\pi}{2} \| g(x,t) \|_{C_\pi}, \quad | u_x(x,t) | \leq \frac{\pi}{2} \| g(x,t) \|_{C_\pi},$$

що й треба було довести.

2. Нелінійна π-періодична задача. Дослідимо існування гладкого ($u \in C_\pi^1$) розв'язку такої задачі:

$$u_{tt} - u_{xx} = F[u, u_t, u_x], \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{20}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{21}$$

$$u(x, t + \pi/q) = u(x,t), \quad (x,t) \in [0,\pi] \times \mathbb{R}, \quad q \in \mathbb{N}. \tag{22}$$

Заданий оператор $F[u, u_t, u_x]$, взагалі кажучи, нелінійний, переводить гладку ($u \in C_\pi^1 \cap A_1^\omega$) функцію $u(x,t)$ в скалярну функцію $F[u, u_t, u_x](x,t) \in C_\pi \cap A_1^\omega$.

За аналогією з лінійною задачею (1)–(3) і її розв'язками (12), (18), (19) розглянемо таку систему інтегральних рівнянь:

$$\begin{gathered} u(x,t) \equiv (R_1 F[u, u_t, u_x])(x,t) = (SF[u, u_t, u_x])(x,t) + \\ + \frac{1}{4} \int_0^\pi d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} F[u, u_t, u_x](\xi,\tau)\, d\tau, \\ u_t(x,t) = \frac{1}{4} \int_0^\pi Q(\xi) \{ F[u, u_t, u_x](\xi, t - x + \xi) - F[u, u_t, u_x](\xi, t + x - \xi) \} d\xi, \\ u_x(x,t) = -\frac{1}{4} \int_0^\pi Q(\xi) \{ F[u, u_t, u_x](\xi, t - x + \xi) + F[u, u_t, u_x](\xi, t + x - \xi) \} d\xi, \end{gathered} \tag{23}$$

де функція $Q(\xi)$ визначена формулою (6).

Означення. *Неперервний розв'язок* $(u, u_t, u_x) \in C_\pi$, $u \in C_\pi \cap A_1^\omega$, *системи інтегральних рівнянь* (23) *будемо називати гладким розв'язком нелінійної крайової* π-*періодичної задачі* (20)–(22).

Використовуючи інтегральне зображення (12) розв'язку $u = R_1 g$ лінійної задачі (1)–(3) і позначення (5) оператора S, на основі теореми 1 переконуємося в справедливості наступного твердження.

Теорема 2. *Нехай* $g \in C_\pi \cap A_1^\omega$. *Тоді лінійна задача* (1)–(3) *має єдиний гладкий розв'язок* $u = R_1 g$, *для якого справедливі оцінки* (13)–(15).

Сформулюємо і доведемо тепер аналогічне твердження для нелінійної задачі (20)–(22).

Теорема 3. *Нехай скалярна функція* $F[u, u_t, u_x]$ *задовольняє такі умови*:

1) $F[u, u_t, u_x](x, t) \in C([0, \pi] \times \mathbb{R} \times \| u\|_{C_\pi} < \infty \times \| u_t\|_{C_\pi} < \infty \times \| u_x\|_{C_\pi} < \infty)$;

2) $0 < \| F[0, 0, 0](x, t)\|_{C_\pi} = \Gamma < \infty$;

3) $$\begin{aligned} &|F[u, u_t'', u_x''](x, t) - F[u, u_t', u_x'](x, t)| \le \\ &\le N_1 |u'' - u'| + N_2 |u_t'' - u_t'| + N_3 |u_x'' - u_x'|; \end{aligned}$$

4) $F[0, 0, 0](x, t) \in A_1^\omega$;

5) *для всіх* $u \in A_1^\omega \cap C_\pi^1$ *функція* $F[u, u_t, u_x](x, t) \in A_1^\omega \cap C_\pi$, $\omega = \pi / q$, $q \in \mathbb{N}$.

Тоді при виконанні умови

$$\frac{\pi^2}{2} N_1 + \frac{\pi}{2}(N_2 + N_3) < \frac{1}{2} \tag{24}$$

задача (20)–(22) *має єдиний гладкий розв'язок* $u(x, t) \in A_1^\omega \cap C_\pi^1$.

Доведення. Визначимо нульове наближення $u^0(x, t)$ за такою формулою:

$$u^0(x, t) = \frac{1}{4} \int_0^\pi Q(\xi) d\xi \int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} F[0, 0, 0](\xi, \tau) d\tau +$$
$$+ \frac{1}{4} \int_0^\pi d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} F[0, 0, 0](\xi, \tau) d\tau.$$

Звідси на основі умов 2 і 4 теореми 3 і оцінок (13)–(15) для відповідної лінійної задачі маємо, що $u^0(x, t) \in A_1^\omega \cap C_\pi^1$ і

$$\begin{gathered} |u^0(x, t)| \le \frac{\Gamma \pi^2}{2} = \Gamma_1, \quad \pi |u_t^0(x, t)| \le \Gamma_1, \\ \pi |u_x^0(x, t)| \le \Gamma_1. \end{gathered} \tag{25}$$

Виберемо число M таке, що

$$M > 2\Gamma_1. \tag{26}$$

У банаховому просторі функцій $D = \{ u \in A_1^\omega \cap C_\pi^1 : \|u\|_{C_\pi^1} \le M \}$ з нормою

$$\|u\|_{C_\pi^1} = \max \{ \| u\|_{C_\pi}, \pi \| u_t\|_{C_\pi}, \pi \| u_x\|_{C_\pi} \} \tag{27}$$

розглянемо оператор $R_1 F[u, u_t, u_x]$, визначений за допомогою правої частини першого інтегрального рівняння системи (23). На підставі умов 1 і 5 теореми 3 одержуємо, що $(R_1 F[u, u_t, u_x])(x, t) \in C_\pi^1 \cap A_1^\omega$.

Далі для $u(x, t) \in D$ будемо мати

$$(R_1 F[u, u_t, u_x])(x, t) = u^0(x, t) +$$

$$+\frac{1}{4}\int_0^{\pi} Q(\xi)d\xi \int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} (F[u,u_t,u_x])(\xi,\tau)-F[0,0,0](\xi,\tau))\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{4}\int_0^{\pi} d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} (F[u,u_t,u_x])(\xi,\tau)-F[0,0,0](\xi,\tau))\,d\tau.$$

Звідси, враховуючи (23) і умову 3 теореми 3, знаходимо

$$|(R_1F[u,u_t,u_x])(x,t)| \le |u^0(x,t)| + \frac{\pi^2}{2}(N_1\|u\|_{C_\pi} + N_2\|u_t\|_{C_\pi} + N_3\|u_x\|_{C_\pi}),$$

$$|(R_1F[u,u_t,u_x])_t(x,t)| \le |u_t^0(x,t)| + \frac{\pi}{2}(N_1\|u\|_{C_\pi} + N_2\|u_t\|_{C_\pi} + N_3\|u_x\|_{C_\pi}),$$

$$|(R_1F[u,u_t,u_x])_x(x,t)| \le |u_t^0(x,t)| + \frac{\pi}{2}(N_1\|u\|_{C_\pi} + N_2\|u_t\|_{C_\pi} + N_3\|u_x\|_{C_\pi}).$$

Якщо останні дві нерівності помножити на π, а $((N_2\pi^2)/2)\|u_t\|_{C_\pi}$ і $((N_3\pi^2)/2)\|u_x\|_{C_\pi}$ переписати у вигляді $((N_2\pi)/2)\pi\|u_t\|_{C_\pi}$ і $((N_3\pi)/2)\times\times\pi\|u_x\|_{C_\pi}$, то одержуємо

$$\|(R_1F[u,u_t,u_x])(x,t)\|_{C^1_\pi} \le \Gamma_1 + \left(\frac{\pi^2}{2}N_1 + \frac{\pi}{2}(N_2+N_3)\right)\|u\|_{C^1_\pi} \le$$

$$\le \Gamma_1 + \left(\frac{\pi^2}{2}N_1 + \frac{\pi}{2}(N_2+N_3)\right)M. \tag{28}$$

Якщо вибрати константи Ліпшіца N_i, $i=1,2,3$, так, щоб виконувалася умова (24) теореми 3, то з нерівності (27), беручи до уваги $\Gamma_1 < M/2$, одержуємо

$$\|(R_1F[u,u_t,u_x])(x,t)\|_{C^1_\pi} \le \Gamma_1 + M/2 < M.$$

Отже, при вибраних N_1, N_2, N_3, що задовольняють нерівність (24), маємо, що коли $u\in D$, то $(R_1F[u,u_t,u_x])(x,t)\in D$.

Для функцій $u(x,t)$ і $z(x,t)$ введемо відстань $\rho(u,z)$, покладаючи $\rho(u,z)=\|u(x,t)-z(x,t)\|_{C^1_\pi}$. Тоді D буде метричним простором, до того ж, цей простір повний.

Переконаємося тепер, що при виконанні умови (24) відображення R_1F буде стисненим. Справді, якщо $u\in D$ і $z\in D$, то з формул (23) і

$$(R_1F[z,z_t,z_x])(x,t) = \frac{1}{4}\int_0^{\pi} Q(\xi)d\xi \int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} F[z,z_t,z_x])(\xi,\tau)\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{4}\int_0^{\pi} d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} F[z,z_t,z_x])(\xi,\tau)\,d\tau,$$

використовуючи умову 3 теореми 3, одержуємо

$$|(R_1F[u,u_t,u_x])(x,t)-(R_1F[z,z_t,z_x])(x,t)| \le$$

$$\le \frac{\pi^2}{2}(N_1\|u-z\|_{C_\pi} + N_2\|u_t-z_t\|_{C_\pi} + N_3\|u_x-z_x\|_{C_\pi}),$$

$$|(R_1F[u, u_t, u_x])_t(x, t) - (R_1F[z, z_t, z_x])_t(x, t)| \le$$
$$\le \frac{\pi}{2}(N_1\|u-z\|_{C_\pi} + N_2\|u_t - z_t\|_{C_\pi} + N_3\|u_x - z_x\|_{C_\pi}),$$
$$|(R_1F[u, u_t, u_x])_x(x, t) - (R_1F[z, z_t, z_x])_x(x, t)| \le$$
$$\le \frac{\pi}{2}(N_1\|u-z\|_{C_\pi} + N_2\|u_t - z_t\|_{C_\pi} + N_3\|u_x - z_x\|_{C_\pi}).$$

Звідси маємо

$$\rho(R_1F[u, u_t, u_x], R_1F[z, z_t, z_x]) \le$$
$$\le \left(\frac{\pi^2}{2}N_1 + \frac{\pi}{2}(N_2 + N_3)\right)\rho(u, z) \equiv \alpha\rho(u, z),$$

де $\alpha < 1/2$.

Таким чином, виконані всі умови принципу стиснених відображень [5]. Отже, існує єдиний неперервний обмежений на $[0, \pi] \times \mathbb{R}$ розв'язок (u, u_t, u_x) системи інтегральних рівнянь (23), а отже, й гладкий розв'язок $u(x, t) \in C^1_\pi \cap A^\omega_1$ крайової періодичної задачі (20)–(22), причому $\|u(x, t)\|_{C^1_\pi} < M$. Теорема 3 доведена.

Зауваження. Умову (24) можна послабити, якщо доведення проводити на основі теореми 0.1 з [6, с. 475], тобто справедливе наступне твердження.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови* 1–5 *теореми* 3. *Тоді при виконанні умови*

$$\frac{\pi^2}{2}N_1 + \frac{\pi}{2}(N_2 + N_3) < 1$$

задача (20)–(22) *має єдиний гладкий розв'язок* $u(x, t) \in C^1_\pi \cap A^\omega_1$.

1. *Митропольский Ю. А., Хома Г. П., Громяк М. И.* Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа. – Киев: Наук. думка, 1991. – 232 с.
2. *Вейвода О., Штедры М.* Существование классических периодических решений волнового уравнения: Связь теоретико-числового характера периода и геометрических свойств решений // Дифференц. уравнения. – 1984. – **20**, № 10. – С. 1733–1739.
3. *Митропольський Ю. О., Хома Н. Г.* Періодичні розв'язки квазілінійних гіперболічних рівнянь другого порядку // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 10. – С. 1370–1375.
4. *Хома Н. Г.* Існування гладкого розв'язку однієї крайової задачі // Укр. мат. журн. – 1995. – **46**, № 12. – С. 1717–1719.
5. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965. – 520 с.
6. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.

Одержано 28.03.95