УДК 517.547.2

М. М. Шеремета (Львів. ун-т)

УТОЧНЕННЯ ОДНІЄЇ ТЕОРЕМИ ФРІКЕ ПРО ЦІЛІ ФУНКЦІЇ ОБМЕЖЕНОГО ІНДЕКСУ

It is proved that for every sequence (a_k) of complex numbers, for which the conditions $\Sigma(1/|a_k|)<\infty$ and $|a_{k+1}|-|a_k| \nearrow \infty$ $(k\to\infty)$ are satisfied, there exists a continuous decreasing to 0 on $[0,+\infty]$ function l such that $f(z)=\Pi(1-z/|a_k|)$ is an entire function of bounded l-index.

Доведено, що для кожної послідовності (a_k) комплексних чисел, яка задовольняє умови $\Sigma(1/|a_k|)<\infty$ і $|a_{k+1}|-|a_k| \nearrow \infty$ $(k\to\infty)$, існує неперервна спадна до 0 на $[0,+\infty]$ функція l така, що $f(z)=\Pi(1-z/|a_k|)$ є цілою функцією обмеженого l-індексу.

1. Для додатної неперервної на $[0,+\infty)$ функції l ціла функція f називається [1] функцією обмеженого l-індексу, якщо існує $N\in\mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $N\in\mathbb{Z}_+$ і $z\in\mathbb{C}$

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!\,l^n(|z|)} \le \max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{k!\,l^k(|z|)}:\ 0\le k\le N\right\}. \tag{1}$$

При $l(x)\equiv 1$ звідси випливає означення цілої функції обмеженого індексу. Фріке [2] показав, що коли послідовність (a_k) додатних чисел задовольняє умови

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_k}\right) < \infty \tag{2}$$

і $a_1<a_k-a_{k-1}\nearrow\infty$ $(2\le k\to\infty)$, тоді ціла функція

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty}(1-z/a_k) \tag{3}$$

є функцією обмеженого індексу. Умова $a_k-a_{k-1}\nearrow\infty$ $(k\to\infty)$ є істотною в розумінні, що існує [2] ціла функція (3) необмеженого індексу, для якої a_k- $-a_{k-1}\to\infty$ $(k\to\infty)$, але не монотонно.

Безпосередньо з (1) випливає, що коли $l_1(x)\le l_2(x)$, $x\ge 0$, і f — ціла функція обмеженого l_1-індексу, тоді f є цілою функцією обмеженого l_2-індексу. Тому наступна теорема є уточненням наведеної вище теореми Фріке.

Теорема. *Якщо послідовність (a_k) комплексних чисел задовольняє умови* (2) *і*

$$0<|a_1|=d_1\le d_k=|a_k|-|a_{k-1}|\nearrow\infty \quad (2\le k\to\infty), \tag{4}$$

то існує неперервна спадна до 0 на $[0,+\infty)$ функція l така, що функція (3) *є цілою функцією обмеженого l-індексу.*

2. Доведення сформульованої теореми відрізняється від доведення Фріке. Далі нам буде потрібно декілька лем.

Через Q позначимо клас додатних неперервних на $[0,+\infty)$ функцій l таких, що

$$l(x+O(1/l(x))) = O(l(x)),\quad x\to+\infty, \tag{5}$$

а для $r>0$ і $l \in Q$ покладемо

$$G_r = G_r(f;l) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{z: |z-a_k| \le r/l(|a_k|)\},$$

$$n(r, z_0, 1/f) = \sum_{|a_k - z_0| \le r} 1,$$

де a_k — нулі цілої функції f.

Лема 1 [3]. *Нехай $l \in Q$. Для того щоб ціла функція f була функцією обмеженого l-індексу, необхідно і досить, щоб виконувалися наступні умови:*

1) *для кожного $r>0$ існує $P(r)>0$ таке, що для всіх $z \in \mathbb{C} \setminus G_r$*

$$|f'(z)/f(z)| \le P(r)\, l(|z|);$$

2) *для кожного $r>0$ існує $\tilde{n}(r) \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $z_0 \in \mathbb{C}$*

$$n\left(\frac{r}{l(|z_0|)},\ z_0,\ \frac{1}{f}\right) \le \tilde{n}(r).$$

Лема 2. *Для кожної додатної на $[0, +\infty)$ функції β, яка прямує до 0 при $x \to +\infty$, існує спадна до 0 на $[0, +\infty)$ функція $l \in Q$ така, що $x l(x) \nearrow \infty$ $(x \to \infty)$ і $\beta(x) \le l(x)$ для $x \ge 0$.*

Доведення. Нехай

$$\beta_1(x) = \max\{\beta(x), (x+1)^{-1} \ln(x+e)\}, \quad \beta_2(x) = \sup\{\beta_1(t):\ t \ge x\}.$$

Тоді $\beta_1(x) \to 0$, $\beta_2(x) \searrow 0$ і $x\beta_2(x) \to \infty$ при $x \to +\infty$. Тому існує функція l така, що $l(x) \downarrow 0$, $x l(x) \nearrow \infty$ при $x \to +\infty$ і $l(x) \ge \beta_2(x) \ge \beta(x)$ при $x \ge 0$. Для такої функції l і числа $K>0$ маємо

$$l(x+K/l(x)) \le l(x) \le l(x-K/l(x)) = \frac{(x-K/l(x))\, l(x-K/l(x))}{x-K/l(x)} \le$$

$$\le \frac{x l(x)}{x-K/l(x)} = \frac{l(x)}{1-K/x l(x)} = (1+o(1))\, l(x), \quad x \to +\infty,$$

тобто має місце (5) і, отже, $l \in Q$.

Лема 3. *Якщо послідовність (a_k) задовольняє умови* (3) *і* (4), *то*

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{|a_n|-|a_k|} \le (1+o(1)) \frac{n \ln n}{|a_n|} = o(1), \quad n \to \infty, \tag{6}$$

$$\sum_{k=n+1}^{2n-1} \frac{1}{|a_k|-|a_n|} \le \frac{\ln n}{|a_{n+1}|-|a_n|} = o(1), \quad n \to \infty, \tag{7}$$

$$\sum_{k=2n}^{\infty} \frac{1}{|a_k|-|a_n|} \le 2 \sum_{k=2n}^{\infty} \frac{1}{|a_k|} = o(1), \quad n \to \infty. \tag{8}$$

Доведення. З умови (4) випливає, що $d_n + d_{n-1} + \ldots + d_{k+1} \ge (n-k) d_k$, тобто $|a_n| - |a_k| \ge (n-k)(|a_k| - |a_{k-1}|)$ при $n \ge k$. Тому

$$\frac{n-k}{|a_n|-|a_k|} \le \frac{n-(k-1)}{|a_n|-|a_{k-1}|} \quad (1 \le k \le n-1),$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{|a_n|-|a_k|} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n-k} \frac{n-k}{|a_n|-|a_k|} \le \frac{n-1}{|a_n|-|a_1|} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n-k} =$$

$$= \frac{n-1}{|a_n|-|a_1|} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \le (1+o(1)) \frac{n \ln n}{|a_n|}, \quad n \to \infty.$$

Але $n d_n \ge d_1 + d_2 + \ldots + d_n$, тобто

$$(n-1)|a_n| = (n-1) \sum_{k=1}^{n} d_k \ge n \sum_{k=1}^{n-1} d_k = n |a_{n-1}|.$$

Тому $|a_n| = n p_n$, де (p_n) — неспадна послідовність така, що $\sum_{n=1}^{\infty} (1/np_n) < \infty$. Звідси випливає, що для кожного $\varepsilon > 0$ при $n \ge n_0(\varepsilon)$ справедлива нерівність

$$\varepsilon > \sum_{\ln n \le k \le n} \frac{1}{kp_k} \ge \frac{1}{p_n} \sum_{\ln n \le k \le n} \frac{1}{k} \ge \frac{1}{p_n} (\ln n - \ln(\ln n - 1)),$$

тобто

$$\frac{n \ln n}{|a_n|} = \frac{\ln n}{p_n} \to 0, \quad n \to \infty,$$

і отже, співвідношення (6) доведені.

Далі, при $k > n$ маємо $d_k + d_{k-1} + \ldots + d_{n+1} \le (k-n) d_k$, тобто $|a_k| - |a_n| \le \le (k-n)(|a_k| - |a_{k-1}|)$. Тому

$$\frac{k-n}{|a_k|-|a_n|} \le \frac{(k-1)-n}{|a_{k-1}|-|a_n|}, \quad k > n,$$

$$\sum_{k=n+1}^{2n-1} \frac{1}{|a_k|-|a_n|} = \sum_{k=n+1}^{2n-1} \frac{1}{k-n} \frac{k-n}{|a_k|-|a_n|} \le$$

$$\le \frac{1}{|a_{n+1}|-|a_n|} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k-n} = \frac{1}{|a_{n+1}|-|a_n|} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \le \frac{\ln n}{|a_{n+1}|-|a_n|}.$$

Оскільки $|a_n| = d_1 + \ldots + d_n \le n d_n$, то $\sum_{n=1}^{\infty} (1/nd_n) < \infty$ і, як при доведенні (6), маємо

$$\frac{\ln n}{|a_n|-|a_{n-1}|} = \frac{\ln n}{d_n} \to 0, \quad n \to \infty,$$

тобто одержуємо співвідношення (7). Нарешті,

$$|a_{2n}| = \sum_{k=1}^{2n} d_k = \left(\sum_{k=1}^{n} + \sum_{k=n+1}^{2n} \right) d_k \ge 2 \sum_{k=1}^{n} d_k = 2|a_n|,$$

і тому

$$\sum_{k=2n}^{\infty} \frac{1}{|a_k|-|a_n|} = \sum_{k=2n}^{\infty} \frac{1}{|a_k|(1-|a_n|/|a_k|)} \le$$

$$\le \frac{|a_{2n}|}{|a_{2n}|-|a_n|} \sum_{k=2n}^{\infty} \frac{1}{|a_k|} \le 2 \sum_{k=2n}^{\infty} \frac{1}{|a_k|},$$

тому завдяки умові (3) маємо (8).

3. Доведемо теорему. За лемою 3 існує додатна на $[0,+\infty)$ функція β така, що $\beta(x)\to 0$, $x\to+\infty$, і

$$\beta(a_n) = \max\left\{\frac{n\ln n}{|a_n|}, \frac{\ln n}{|a_{n+1}|-|a_n|}, \sum_{k=2n}^{\infty}\frac{1}{|a_k|}\right\}, \quad n\ge 2,$$

а за лемою 2 існує неперервна на $[0,+\infty)$ функція $l\in Q$ така, що $l(x)\downarrow 0$, $xl(x)\nearrow+\infty$ при $x\to+\infty$ і $\beta(x)\le l(x)$ при $x\ge 0$. Тоді

$$|a_{n+1}|-|a_n| \ge \frac{\ln n}{l(|a_n|)}, \quad n\ge 2. \tag{9}$$

Покажемо, що для кожного $r>0$ при $k\ge k_0(r)$

$$|a_{k+1}|-|a_k| \ge \frac{2r}{l(|a_{k+1}|)}. \tag{10}$$

Дійсно, якщо для необмеженої множини значень k виконується протилежна нерівність, то

$$|a_{k+1}|-\frac{2r}{l(|a_{k+1}|)} \le |a_k| \le |a_{k+1}|+\frac{2r}{l(|a_{k+1}|)}. \tag{11}$$

Покладемо $l(x)=l(0)$ при $x\le 0$ і

$$\lambda(r) = \sup\left\{\frac{1}{l(x)}\,l\left(x+\frac{t}{l(x)}\right):\ -r\le t\le r,\ x\ge 0\right\}. \tag{12}$$

Оскільки $l\in Q$, то $1\le\lambda(r)<+\infty$ і з (11) маємо $l(|a_k|)\le\lambda(2r)\,l(|a_{k+1}|)$. Тому $|a_{k+1}|-|a_k|\le 2r\lambda(2r)/l(|a_k|)$, що неможливо завдяки (9).

З нерівностиі (10) випливає

$$|a_k|+\frac{r}{l(|a_k|)} < |a_{k+1}|-\frac{r}{l(|a_{k+1}|)}, \quad k\ge k_0(r), \tag{13}$$

і $n(r/l(|z_0|), z_0, 1/f)\le 1$ для всіх досить великих $|z_0|$, тобто виконується умова 2 леми 1.

Оцінимо тепер

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{z-a_k}\right|.$$

Нехай $r>0$ — довільне число, а $k_0(r)$ таке, що для всіх $k\ge k_0(r)$ виконується (10) і, отже, (13). Для $n\ge k_0(r)+1$ покладемо

$$A_n = \left\{z:\ ||z|-|a_n||\le\frac{r}{l(|a_n|)},\ |z-a_n|\ge\frac{r}{l(|a_n|)}\right\},$$

$$B_n = \left\{z:\ |a_n|+\frac{r}{l(|a_n|)}\le|z|\le|a_{n+1}|-\frac{r}{l(|a_{n+1}|)}\right\}.$$

Якщо $z\in A_n$, то завдяки (10), (6), (7) і (8) маємо

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \le \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{|z|-|a_k|}+\frac{1}{|z-a_n|}+\frac{1}{|a_{n+1}|-|z|}+\sum_{k=n+2}^{\infty}\frac{1}{|a_k|-|z|}\le$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{|a_n|-|a_k|-r/l(|a_n|)} + \frac{1}{r}\, l(|a_n|) +$$

$$+ \frac{1}{|a_{n+1}|-|a_n|-r/l(|a_n|)} + \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{1}{|a_k|-|a_{n+1}|} \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(|a_n|-|a_k|)(1-r/(|a_n|-|a_k|)l(|a_n|))} + \frac{1}{r}\, l(|a_n|) +$$

$$+ \frac{1}{2r/l(|a_{n+1}|)-r/l(|a_n|)} + \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{1}{|a_k|-|a_{n+1}|} \leq$$

$$\leq \frac{1}{1-r/(|a_n|-|a_{n-1}|)l(|a_n|)} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{|a_n|-|a_k|} + \frac{2}{r}\, l(|a_n|) +$$

$$+ \sum_{k=n+2}^{2n+1} \frac{1}{|a_k|-|a_{n+1}|} + \sum_{k=2(n+1)}^{\infty} \frac{1}{|a_k|-|a_{n+1}|} \leq$$

$$\leq (2+o(1))\, \frac{n \ln n}{|a_n|} + \frac{2}{r}\, l(|a_n|) + \frac{\ln(n+1)}{|a_{n+2}|-|a_{n+1}|} + 2 \sum_{k=2(n+1)}^{\infty} \frac{1}{|a_k|} \leq$$

$$\leq 3\beta(a_n) + 4\beta(a_{n+1}) + \frac{2}{r}\, l(|a_n|) \leq \frac{7r+2}{r}\, l(|a_n|). \tag{14}$$

Оскільки $\big||a_n|-|z|\big| \leq r/l(|a_n|)$, то

$$l(|z|) \leq \lambda(r)\, l(|a_n|), \quad \big||a_n|-|z|\big| \leq \frac{r\lambda(r)}{l(|z|)}$$

і $l(|a_n|) \leq \lambda(r\lambda(r))\, l(|z|)$, де стала $\lambda(r)$ визначена рівністю (12). Тому з (14) випливає, що для всіх $z \in A_n$ і $n \geq k_1(r) \geq k_0(r)+1$ справедлива нерівність

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leq P_1(r)\, l(|z|), \quad P_1(r) = \frac{1}{r}(7r+2)\lambda(r\lambda(r)). \tag{15}$$

Якщо ж $z \in B_n$, то аналогічно маємо

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{|z|-|a_k|} + \frac{1}{|z|-|a_n|} +$$

$$+ \frac{1}{|a_{n+1}|-|z|} + \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{1}{|a_k|-|z|} \leq$$

$$\leq \frac{1}{|z|} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1-|a_k|/(|a_n|+r/l(|a_n|))} +$$

$$+ \frac{1}{|z|}\, \frac{1}{1-|a_n|/(|a_n|+r/l(|a_n|))} + \frac{1}{|a_{n+1}|-|a_{n+1}|+r/l(|a_{n+1}|)} +$$

$$+ \sum_{k=n+2}^{2n+1} \frac{1}{|a_k|-|a_{n+1}|} + \sum_{k=2(n+1)}^{\infty} \frac{1}{|a_k|-|a_{n+1}|} \leq$$

$$\leq \frac{a_n}{|z|}\left(1+\frac{r}{|a_n|l(|a_n|)}\right)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{|a_n|-|a_k|+r/l(|a_n|)}+$$

$$+\frac{a_n}{|z|}\left(1+\frac{r}{|a_n|l(|a_n|)}\right)\frac{l(|a_n|)}{r}+\frac{l(|a_{n+1}|)}{r}+$$

$$+\frac{\ln(n+1)}{|a_{n+2}|-|a_{n+1}|}+2\sum_{k=2(n+1)}^{\infty}\frac{1}{|a_k|}\leq$$

$$\leq (1+o(1))\frac{|a_n|\beta(|a_n|)}{|z|}+\frac{|a_n|l(|a_n|)}{|z|r}(1+o(1))+$$

$$+\frac{l(|a_{n+1}|)}{r}+3\beta(|a_{n+1}|)\leq$$

$$\leq 2\left(1+\frac{1}{r}\right)\frac{|a_n|l(|a_n|)}{|z|}+\left(3+\frac{1}{r}\right)l(|a_{n+1}|)\leq$$

$$\leq 2\left(1+\frac{1}{r}\right)\frac{|z|l(|z|)}{|z|}+\left(3+\frac{1}{r}\right)l(|z|)\leq$$

$$\leq P_2(r)l(|z|),\qquad P_2(r)=\frac{5r+3}{r}, \tag{16}$$

для всіх $n\geq k_2(r)\geq k_0(r)+1$. З (15) і (16) випливає виконання умови 1 леми 1 для всіх $z\in\mathbb{C}\setminus G_r$ таких, що $|z|\geq R(r)$, де величина $R(r)$ не залежить від z.

Позначимо

$$E(r)=\{z\in\mathbb{C}\setminus G_r\colon |z|\leq R(r)\},$$

$$m(r)=\min\{|f(z)|\colon z\in E(r)\},$$

$$M(r)=\max\{|f'(z)|\colon z\in E(r)\}.$$

Тоді для $z\in E(r)$ маємо

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|\leq\frac{M(r)}{m(r)}\leq\frac{M(r)}{m(r)l(R(r))}l(|z|),$$

тобто умова 1 леми 1 виконується для всіх $z\in\mathbb{C}\setminus G_r$ таких, що $|z|\leq R(r)$.

За лемою 1 функція (2) має обмежений l-індекс, і теорема доведена.

Дана робота частково фінансована Грантом № UKR000 Міжнародного наукового фонду та Грантом проф. Сороса.

1. *Кузык А. Д., Шеремета М. Н.* Целые функции ограниченного l-распределения значений // Мат. заметки. – 1986. – **39**, № 1. – С. 3–13.
2. *Fricke G. H.* Entire functions having positive zeros // Indiana J. Pure and Appl. Math. – 1974. – **5**, № 5. – P. 478–485.
3. *Шеремета М. Н., Кузык А. Д.* О логарифмической производной и нулях целой функции ограниченного l-индекса // Сиб. мат. журн. – 1992. – **33**, № 2. – С. 142–150.

Одержано 22.11.94