УДК 519.41/47

Н. С. Черников (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О ГРУППАХ, ФАКТОРИЗУЕМЫХ ПЕРЕСТАНОВОЧНЫМИ ПОЧТИ ЛОКАЛЬНО НОРМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ

We prove that an RN-(in particular a locally soluble group) group $G = G_1 G_2 \ldots G_n$ with $G_i G_j = G_j G_i$ and $\pi(G_i) \cap \pi(G_j) = \varnothing$, $i \neq j$ is periodic hyper-Abelian if the subgroups G_i are locally normal.

Доведено, що RN-(зокрема, локально розв'язна група) $G = G_1 G_2 \ldots G_n$ з $G_i G_j = G_j G_i$ і $\pi(G_i) \cap \pi(G_j) = \varnothing$, $i \neq j$, є періодично гіперабелевою, якщо підгрупи G_i майже локально нормальні.

В [1] автором установлено, что произвольная RN-группа G, факторизуемая n попарно перестановочными периодическими разрешимыми подгруппами G_i с $\pi(G_i) \cap \pi(G_j) = \varnothing$ при $i \neq j$, является периодической разрешимой группой. (Там же, а также в [2] отмечалось, почему условие $\pi(G_i) \cap \pi(G_j) = \varnothing$ является существеным, и почему даже при соблюдении этого условия разрешимость группы G не вытекает из разрешимости подгрупп G_i, если не требовать периодичности последних.) В связи с этим результатом естественно возник вопрос: в каких случаях будет гиперабелевой RN-группа G, факторизуемая n попарно перестановочными периодическими гиперабелевыми подгруппами G_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, с $\pi(G_i) \cap \pi(G_j) = \varnothing$ при $i \neq j$. Теорема 1 показывает, что это так в случае, когда подгруппы G_i почти локально нормальны. Из теоремы 2 следует, что в теореме 1 условие принадлежности G классу RN-групп можно ослабить до условия ее локальной ступенчатости в некоторых естественных ситуациях.

Теорема 1. *Пусть группа G разложима в произведение n попарно перестановочных почти локально нормальных подгрупп G_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, таких, что $\pi(G_i) \cap \pi(G_j) = \varnothing$ при $i \neq j$, и каждая подгруппа вида $G_i G_j$ является (почти) RN-группой. Тогда G является (почти) гиперабелевой π-группой для $\pi = \bigcup_{i=1}^{n} \pi(G_i)$ и имеет локальную систему конечных подгрупп, факторизуемых своими попарно перестановочными пересечениями с подгруппами G_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Далее, для $\pi_i = \pi(G_i)$ любой π_i-фактор произвольной нормальной системы группы G покрывается подгруппой G_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Теорема 2. *Пусть группа G разложима в произведение n попарно перестановочных почти локально нормальных подгрупп G_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, таких, что $\pi(G_i) \cap \pi(G_j) = \varnothing$ при $i \neq j$, и каждая подгруппа вида $G_i G_j$ является локально ступенчатой. Тогда G является гиперабелевой π-группой с $\pi = \bigcup_{i=1}^{n} \pi(G_i)$ в каждом из следующих случаев:*

1) *все подгруппы G_i локально нильпотентны;*

2) *все подгруппы G_i локально разрешимы и при этом $3 \notin \pi$;*

3) $2 \notin \pi$.

***Доказательство** теоремы* 1. Пусть D — произвольная максимальная инвариантная RN-подгруппа конечного индекса группы $G_i G_j$, $i \neq j$, и F — подгруппа, порожденная в D всеми конечными нормальными делителями подгрупп $D \cap G_i$ и $D \cap G_j$. Тогда с учетом периодичности G_i и G_j и соотношения $\pi_i \cap \pi_j = \varnothing$, $D = (D \cap G_i)(D \cap G_j)$ и $F = (F \cap G_i)(F \cap G_j)$ ([1], лемма 1).

Отсюда с учетом теоремы 2 из [2] следует, что подгруппа D периодична и локально разрешима. Далее, $|D : F| < \infty$ ([3], лемма 1.17). Пусть N_i — произвольный конечный нормальный делитель подгруппы $F \cap G_i$, который со всеми конечными нормальными делителями $F \cap G_j$ порождает подгруппу, содержащую $F \cap G_j$, l — длина главного ряда N_i и N — подгруппа, порожденная N_i и произвольным конечным нормальным делителем $F \cap G_j$. Тогда ввиду лемм 5, 1 и 3 из [2] $\langle N_i^N \rangle$ имеет инвариантный ряд длины $\leq 2l$ с π_i- и с π_j-факторами. Поэтому такой ряд длины $\leq 2l+1$ имеет подгруппа K, порожденная N_i и всеми конечными нормальными делителями $F \cap G_j$ (применение метода проекционных множеств), а значит, и подгруппа $\langle N_i^F \rangle \subseteq K$. Отсюда ввиду произвольности нормального делителя N_i вытекает, что F, а значит, и D имеет возрастающий инвариантный ряд с π_i- и с π_j-факторами. Следовательно, ввиду произвольности i и j согласно предложению 3 из [1] (соответственно предложению 4 из [1]) G имеет возрастающий ряд характеристических подгрупп, произвольный фактор которого покрывается одной из подгрупп G_k (соответственно имеет характеристическую подгруппу конечного индекса, имеющую такой ряд). Заметим теперь, что если H_k — максимальная инвариантная локально разрешимая подгруппа группы G_k, то число факторов этого ряда, которые покрываются G_k, но не покрываются H_k, конечно и произвольная почти локально нормальная локально разрешимая группа имеет возрастающий ряд характеристических подгрупп с примарными абелевыми факторами. Учитывая это, нетрудно убедиться в том, что группа G имеет возрастающий ряд характеристических подгрупп с примарными абелевыми факторами (соответственно характеристическую подгруппу конечного индекса, имеющую возрастающий ряд характеристических подгрупп, все факторы которого примарные абелевы за исключением, может быть, конечного числа конечных факторов). Поэтому G гиперабелева (почти гиперабелева). Наличие соответствующей локальной системы и справедливость соотношения $\pi(G) = \bigcup_{i=1}^{n} \pi(G_i)$ гарантируются предложением 2 из [1], а свойство покрываемости фактора — леммой 3 из [1]. Теорема доказана.

Замечание. В процессе доказательства теоремы 1 фактически установлено, что группа G имеет возрастающий ряд характеристических подгрупп с примарными абелевыми факторами в случае, когда каждая подгруппа вида $G_i G_j$ является RN-группой, а в случае, когда каждая подгруппа вида $G_i G_j$ является почти RN-группой, некоторая характеристическая подгруппа конечного индекса группы G имеет такой ряд.

Теорема 2 справедлива ввиду теоремы 1 и теоремы 3 из [2], согласно которой произвольная локально ступенчатая группа G, факторизуемая двумя почти локально нормальными подгруппами A и B с $\pi(A) \cap \pi(B) = \varnothing$, является локально разрешимой π-группой для $\pi = \pi(A) \cup \pi(B)$, если или: а) подгруппы A и B локально нильпотентны, или б) подгруппы A и B локально разрешимы и при этом $3 \notin \pi$, или в) $2 \notin \pi$.

Из теоремы 1 вытекают такие следствия.

***Следствие* 1.** *Пусть группа G разложима в произведение попарно перестановочных почти локально нормальных подгрупп G_i, $i \in \mathbb{N}$, таких, что*

$\pi(G_i) \cap \pi(G_j) = \varnothing$ *при* $i \neq j$, *и каждая подгруппа вида* $G_i G_j$ *является почти* RN*-группой. Тогда* G *является локально конечной* π*-группой для* $\pi = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \pi(G_i)$ *и имеет локальную систему конечных подгрупп, факторизуемых своими попарно перестановочными пересечениями с подгруппами* G_i.

Следствие 2. *Пусть группа* G *разложима в произведение попарно перестановочных почти локально нормальных подгрупп* G_i, $i \in \mathbb{N}$, *таких, что* $\pi(G_i) \cap \pi(G_j) = \varnothing$ *при* $i \neq j$, *и каждая подгруппа вида* $G_i G_j$ *является* RN*-группой. Тогда* G — *локально конечная локально разрешимая* π*-группа с* $\pi = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \pi(G_i)$.

Из теорем 1 и 2 вытекают такие следствия.

Следствие 3. *Пусть группа* G *разложима в произведение попарно перестановочных почти локально нормальных подгрупп* G_i, $i \in \mathbb{N}$, *таких, что* $\pi(G_i) \cap \pi(G_j) = \varnothing$ *при* $i \neq j$, *и каждая подгруппа вида* $G_i G_j$ *является локально ступенчатой группой;* $\pi = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \pi(G_i)$. *Пусть также выполняется хотя бы одно из условий:*

1) *все подгруппы* G_i *локально нильпотентны;*

2) *все подгруппы* G_i *локально разрешимы и при этом* $3 \notin \pi$;

3) $2 \notin \pi$.

Тогда G *является локально конечной локально разрешимой* π*-группой и имеет локальную систему конечных подгрупп, факторизуемых своими попарно перестановочными пересечениями с подгруппами* G_i.

Следствие 4. *Пусть группа* G *разложима в произведение* n *попарно перестановочных почти локально нормальных подгрупп* G_i, $i = 1, 2, \ldots; n$, *примарных по попарно различным простым числам. Тогда если каждая подгруппа вида* $G_i G_j$ *локально ступенчатая, то* G *является локально конечной гиперабелевой* π*-группой для* $\pi = \bigcup_{i=1}^{n} \pi(G_i)$.

1. *Черников Н. С.* Группы, факторизуемые перестановочными периодическими подгруппами без элементов одинаковых простых порядков // Исследования групп с ограничениями для подгрупп. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1988. – С. 98–117.
2. *Черников Н. С.* Разрешимость и локальная разрешимость факторизуемых *RN*-групп // Методы исследований алгебраических и топологических структур (сб. науч. тр.). – Киев: Киев. пед. ин-т, 1989. – С. 122–129.
3. *Черников Н. С.* Группы, разложимые в произведение перестановочных подгрупп. – Киев: Наук. думка, 1987. – 206 с.

Получено 06.02.95