УДК 517.98

В. М. Бобочко (Кіровогр. пед. ін-т)

ТОЧКА ЗВОРОТУ В СИСТЕМІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З АНАЛІТИЧНИМ ОПЕРАТОРОМ

A uniform asymptotics of a solution is constructed for a system of singularly perturbed differential equations with a turning point. The case when the boundary-value operator depends on a small parameter analytically is considered.

Побудована рівномірна асимптотика розв'язку системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь з точкою звороту. Розглядається випадок, коли граничний оператор аналітично залежить від малого параметра.

1. Вступ. Розглянемо задачу

$$L_\varepsilon W(x,\varepsilon) \equiv \varepsilon^2 W''(x,\varepsilon) - A_\varepsilon W(x,\varepsilon) = h(x),$$
$$E_1 W(m,\varepsilon) = E_1[\mu^{-2}\alpha_m + \hat{W}_m], \tag{1}$$
$$E_2 \frac{dW(m,\varepsilon)}{dx} = E_2[\mu^{-4}\alpha_m + \mu^{-3}\hat{W}_m]$$

при $\varepsilon \to +0$, $x \in I \equiv [0, l]$, $m = \{0, l\}$, $\mu = \sqrt[3]{\varepsilon}$. Тут A_ε — лінійний оператор, який діє в $\mathbb{R}^n$,

$$A_\varepsilon = A_0 + \sum_{s=4}^{p} \mu^s A_s; \tag{2}$$

$W(x,\varepsilon)$ — шукана вектор-функція; $h(x)$ — відома вектор-функція; $\hat{W}_m = (W_{m1}, \ldots, W_{mn})$, $m = \{0, l\}$, — довільним чином задані вектори; $\alpha_m = (\alpha_{m1}, \ldots, \alpha_{mn})$ — відомі вектори, в яких компоненти α_{mk} вибрані таким чином, щоб розв'язок задачі (1) був обмеженим при прямуванні малого параметра до нуля (див. формули (60), (63)); E_k — діагональні матриці n-го порядку;

$$E_1 = \operatorname{diag}\{1, 0, \ldots, 0\}, \quad E_2 = \operatorname{diag}\{0, 1, \ldots, 1\}.$$

Задачу (1) будемо досліджувати при виконанні таких умов.

Умова 1. $A_k(x)$, $h(x) \in C^\infty[I]$, де $A_k(x)$ — матриці операторів A_k в просторі $\mathbb{R}^n$.

Умова 2. Спектр граничного оператора A_0 дійсний і задовольняє умови

$$\lambda_1(x) \equiv x\tilde{\lambda}_1(x) \le 0 < \lambda_2(x) < \ldots < \lambda_n(x), \tag{3}$$

де $\tilde{\lambda}_1(x) < 0$ при $x \in I$.

З умов (3) випливає, що точка $x=0$ є стабільною точкою звороту для задачі (1).

Формула (2), тобто випадок, коли $A_k \equiv 0$, $k=\overline{1,3}$, відповідає задачі з точкою звороту для рівняння Ліувілля [1], а випадок, коли $A_1 \not\equiv 0$, відповідає задачі з сильною точкою звороту для рівняння Ліувілля [2]. Методика побудови рівномірної асимптотики розв'язку задач із звичайною точкою звороту розроблена як для скалярних, так і для векторних рівнянь [1, 3, 5]. Дослідження задач з сильною точкою звороту знаходиться на початковій стадії, тобто проведено тільки для скалярних рівнянь.

Задачі з точками звороту у випадку, коли оператор аналітично залежить від малого параметра, вивчались у роботах В. Вазова (див. [6], гл. VIII). Основна ідея методу Вазова полягає у знаходженні такого перетворення, яке досліджувану систему сингулярно збурених диференціальних рівнянь (с. с. з. д. р.) зводить до простішої, „модельної" системи рівнянь. Цей метод досить складний, особливо при побудові вищих наближень для неоднорідних с. с. з. д. р.

В монографії [7, с. 296 – 299] побудована фундаментальна система розв'язків (ф. с. р.) для с. с. з. д. р. з точкою звороту у випадку, коли оператор аналітично залежить від малого параметра. Ідея побудови ф. с. р. така ж, як і в монографії [6].

В цій роботі для побудови рівномірної асимптотики розв'язку задачі (1) буде використано метод, розроблений у роботах [1 – 5] та в інших роботах автора. Фундаментом запропонованого методу дослідження задач з точками звороту є метод регуляризації, розроблений С. О. Ломовим для стабільного спектра граничного оператора [8]. Рівномірна асимптотика розв'язку для скалярного рівняння з точкою звороту була побудована в роботах [9, 10]. Побудові розв'язку сингулярно збуреної задачі з точкою звороту в елементарних функціях присвячена робота [11] та інші роботи цих авторів.

2. Регуляризація сингулярно збуреної задачі (с. з. з.). Для правильного опису та збереження як єдиних цілих всіх істотно особливих многовидів (і. о. м), які виникають у розв'язку задачі (1), поряд з незалежною змінною x введемо додаткову вектор-змінну $t=\{t_{ik}\}$, $i=\overline{1,n}$; $k=1,2$, за формулами

$$t_{1k} = t_1 = \mu^{-2}\left(\frac{3}{2}\int_0^x \sqrt{-\lambda_1(x)}\,dx\right)^{2/3} \equiv \mu^{-2}\varphi_1(x) \equiv \Phi_1(x,\varepsilon),$$
$$t_{jk} = \mu^{-3}(-1)^k \int_{(k-1)l}^{x} \sqrt{\lambda_j(x)}\,dx \equiv \mu^{-3}\varphi_{jk}(x) \equiv \Phi_{jk}(x,\varepsilon), \quad j=\overline{2,n}. \tag{4}$$

Тоді замість функції $W(x,\varepsilon)$ будемо вивчати „розширену" функцію $\tilde W(x,t,\varepsilon)$, причому розширення проведемо таким чином, щоб виконувалась тотожність

$$\tilde W(x,t,\varepsilon)\Big|_{t=\Phi(x,\varepsilon)} \equiv W(x,\varepsilon), \tag{5}$$

де $\Phi(x,\varepsilon)=\{\Phi_1(x,\varepsilon),\ \Phi_{jk}(x,\varepsilon),\ j=\overline{2,n},\ k=1,2\}$.

Продиференціюємо два рази тотожність (5) і підставимо повні похідні в задачу (1). Тоді для визначення розширеної функції $\tilde W(x,t,\varepsilon)$ одержимо таку розширену задачу:

$$\tilde L_{\varepsilon,p}\tilde W(x,t,\varepsilon) = h(x), \quad M_m = (m, t(m)),$$
$$E_1\tilde W(M_m,\varepsilon) = E_1\left[\mu^{-2}\alpha_m + \hat W_m\right], \tag{6}$$

$$E_2 \frac{d\tilde{W}(M_m, \varepsilon)}{dx} = E_2 \big[\mu^{-4} \alpha_m + \mu^{-3} \hat{W}_m \big].$$

Тут

$$L_{\varepsilon,p} \equiv \mu^2 \varphi_1'^2(x) \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + \sum_{k=1}^{2} \sum_{j=2}^{n} \Big[\varphi_{jk}'^2(x) \frac{\partial^2}{\partial t_{jk}^2} + \mu^3 d_{jk} \frac{\partial}{\partial t_{jk}} \Big] +$$

$$+ \mu^4 d_1 \frac{\partial}{\partial t_1} - A_\varepsilon + \mu^6 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + Y_\varepsilon^\perp, \tag{7}$$

де $(d_1 \equiv d_{11} \equiv d_{12})$

$$d_{ik} \equiv 2\varphi_{ik}'(x) \frac{\partial}{\partial x} + \varphi_{1k}''(x), \quad i = \overline{1, n}; \quad k = 1, 2, \tag{8}$$

$Y_\varepsilon^\perp$ — оператор, який буде відігравати роль анулятора в просторі безрезонансних розв'язків Y_r (див. формули (9)).

Опишемо простір безрезонансних розв'язків (п. б. р.), в якому будемо розв'язувати розширену задачу (6). Розглянемо простори функцій

$$Y_{ri1k} \equiv Y_{rik} = \big\{ b_i(x) \big[V_{rik}(x) U_k(t_1) + Q_{rik}(x) U_k'(t_1) \big] \big\},$$

$$V_{ri} = \big\{ b_i(x) \big[f_{ri}(x) \Psi(t_1) + g_{ri}(x) \Psi'(t_1) \big] \big\}, \tag{9}$$

$$Y_{rijk} = \big\{ b_i(x) \alpha_{rijk}(x) \exp t_{jk} \big\}, \quad X_{ri} = \{ b_i(x) \omega_{ri}(x) \},$$

де

$$V_{rik}(x),\ Q_{rik}(x),\ f_{ri}(x),\ g_{ri}(x),\ \alpha_{rijk}(x),\ \omega_{ri}(x) \in C^\infty[I],$$

$b_i(x),\ i = \overline{1, n}$, — власні вектори оператора A_0, що відповідають власним значенням $\lambda_i(x)$; $U_k(t_1)$ — функції Ейрі, властивості яких описано в роботі [12],

$$\Psi(t_1) = \int_{+\infty}^{t} [U_2(t_1) U_1(\tau) - U_1(t_1) U_2(\tau)] d\tau. \tag{10}$$

Більш детально з властивостями і. о. м. $\Psi(t_1)$ можна ознайомитись в монографії [8, с. 199] та цитованих роботах [1 – 5].

З просторів (9) складемо новий простір

$$Y_r = \bigoplus_{i=1}^{n} Y_{ri} = \bigoplus_{i=1}^{n} \Big[\bigoplus_{k=1}^{2} \bigoplus_{j=1}^{n} Y_{rijk} \oplus V_{ri} \oplus X_{ri} \Big]. \tag{11}$$

Елемент простору (11) має вигляд

$$W_r(x, t) = \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \tilde{W}_{ri}(x, t) \equiv \sum_{i=1}^{n} W_{ri}(x, t), \tag{12}$$

де явний вигляд функцій $\tilde{W}_{ri}(x, t)$ легко записати, скориставшись для цього структурою п. б. р. (11).

Для проведення регуляризації с. з. з. (1) нам необхідно вивчити дію розширеного оператора (7) на елемент (12).

Оскільки $\lambda(x) = \{ \lambda_i(x) \}$ — спектр оператора A_0, то справедливі тотожності

$$(A_0 - \lambda_i(x) E) b_i(x) \equiv 0, \quad i = \overline{1, n}, \tag{13}$$

які будуть істотно використані в подальшому і які використовувались нами в роботах [4, 8].

В монографіях [6, 7] спочатку проводилась діагоналізація головного оператора A_0. Проте в процесі діагоналізації головного оператора A_0 інші оператори A_k не були діагоналізовані. При кожному ітераційному наближенні ми повинні заново проводити діагоналізацію відповідних операторів.

В запропонованому методі ми будемо діяти інакше. Запишемо розширений оператор (7) у вигляді

$$\tilde{L}_{\varepsilon,\,p} \equiv \tilde{L}_{\varepsilon} - \sum_{s=4}^{p} \mu^s A_s \equiv \tilde{L}_{\varepsilon} - A(p, \mu). \tag{14}$$

Подіємо оператором $A(p, \mu)$ на елемент з простору (11). Результат такої дії можна записати у вигляді

$$A(p, \mu) W_r(x, t) = \sum_{s=4}^{p} \sum_{i=1}^{n} \mu^s \tilde{W}_{ri}(x, t) A_s b_i(x). \tag{15}$$

В результаті дії лінійного оператора A_s на вектор $b_i(x)$ ми знову одержимо деякий вектор $\tilde{b}_{si}(x)$. Розкладемо цей вектор за базисною системою векторів $b(x) = \{ b_i(x) \}$, $i = \overline{1, n}$, наступним чином:

$$A_s b_i(x) = \tilde{b}_{si}(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(\tilde{b}_{si}(x), b_i^*(x) \right) b_i(x) \equiv \sum_{i=1}^{n} B_{si}(x) b_i(x), \tag{16}$$

де $b_i^*(x)$ — власні вектори оператора A_0^*, який є спряженим до оператора A_0. Тут вектори $b_i(x)$ та $b_j^*(x)$ утворюють біортогональну систему векторів.

Врахувавши тотожності (15) та (16), а також результат дії розширеного оператора $\tilde{L}_{\varepsilon}$ на функцію (12), одержимо тотожність $(\tilde{p} = \max(6, p))$

$$\tilde{L}_{\varepsilon,\,p} W_r(x, t) \equiv R_{0,p} W_r(x, t) + \sum_{s=2}^{\tilde{p}} \mu^s R_{s,p} W_r(x, t), \tag{17}$$

де оператори $R_{s,p}$ в їх дії на функції (12) можна записати у вигляді тотожностей

$$R_{0,p} W_r \equiv \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \Bigg\{ (\lambda_1 - \lambda_i) \Bigg[\sum_{k=1}^{2} \left[V_{rik}(x) U_k(t_1) + Q_{rik}(x) U_k'(t_1) \right] + f_{ri}(x)\, \Psi(t_1) + \\ + g_{ri}(x) \Psi'(t_1) \Bigg] + \sum_{k=1}^{2} \sum_{j=2}^{n} \left(\lambda_j - \lambda_i \right) \alpha_{rijk}(x) \exp t_{jk} - \lambda_i(x)\, \omega_{ri}(x) \Bigg\} \equiv R_0 W_r, \tag{18}$$

$$R_{2,p} W_r \equiv - \sum_{i=1}^{n} \Bigg[b_i(x) \tilde{D}_{i1} + \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq i}}^{n} \varphi_1(x) b_\nu(x) T_{i\nu 1} \Bigg] \Bigg[g_{ri}(x) \Psi(t_1) + \sum_{k=1}^{2} Q_{rik}(x) \dot{U}_k(t_1) \Bigg] + \\ + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\, \varphi_1'^2(x)\, f_{ri}(x), \tag{19}$$

$$R_{3,p} W_r \equiv \sum_{k=1}^{2} \sum_{j=2}^{n} \Bigg[\sum_{i=1}^{2} b_i(x) D_{ijk} + \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq i}}^{n} b_\nu(x) T_{i\nu jk} \Bigg] \alpha_{rijk}(x) \exp t_{jk}, \tag{20}$$

$$R_{4,p}W_r \equiv \sum_{i=1}^{n}\left[b_i(x)D_{i1} + \sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq i}}^{n} b_\nu(x)T_{i\nu 1}\right]\left[f_{ri}(x)\Psi'(t_1) + \sum_{k=1}^{2} V_{rik}(x)U_k'(t_1) + g_{ri}(x)\right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} b_i(x)B_{4i}(x)\tilde{W}_{ri}(x,t), \tag{21}$$

де

$$\begin{gathered} D_{i1} \equiv 2\varphi_1'(x)\left[\frac{\partial}{\partial x} + \left(b_i'(x), b_i^*(x)\right)\right] + \varphi_1''(x), \\ \tilde{D}_{i1} \equiv \varphi_1(x)D_{i1} + \varphi_1'^2(x), \\ D_{ijk} \equiv 2\varphi_{jk}'(x)\left[\frac{\partial}{\partial x} + \left(b_i'(x), b_i^*(x)\right)\right] + \varphi_{jk}''(x), \\ T_{i\nu 1} \equiv 2\varphi_1'(x)\left(b_i', b_i^*\right), \quad T_{i\nu jk} \equiv 2\varphi_{jk}'(x)\left(b_i', b_i^*\right). \end{gathered} \tag{22}$$

Наступні оператори $R_{k,p}$, $k = \overline{5, \tilde{p}}$, будуть відігравати другорядну роль при побудові асимптотики розв'язку розширеної задачі (6), а отже, і досліджуваної задачі (1). Тому немає необхідності виписувати результат дії цих операторів на елементи з простору (11).

Одержані тотожності (18) – (22) дають можливість зробити наступні висновки.

Висновки. **1.** П. б. р. (11) інваріантні відносно всіх операторів $R_{k,p}$, а отже, і відносно розширеного оператора $\tilde{L}_{\varepsilon,p}$, записаного у вигляді тотожності (17).

2. Оператор $R_{0,p}$ є головним оператором розширеного оператора $\tilde{L}_{\varepsilon,p}$ (див. тотожність (17)) в п. б. р. (11).

3. Якщо розв'язок розширеної задачі (6) будувати в п. б. р. (11), то малий параметр $\mu > 0$ входить в цю задачу регулярно, тобто розширена задача (6) регулярно залежить від малого параметра $\mu > 0$ в п. б. р. (11).

Висновки 1 – 3 показують, що нами проведена регуляризація с. з. з. (1), тобто с. з. з. (1) за описаним алгоритмом ми поставили у відповідність розширену задачу (6), яка в п. б. р. (11) вже регулярна за малим параметром $\mu = \sqrt[3]{\varepsilon} > 0$.

3. Формалізм побудови розв'язку розширеної задачі. Оскільки в п. б. р. (11) розширена задача (6) регулярна відносно малого параметра $\mu > 0$, то асимптотику розв'язку цієї задачі будуємо у вигляді ряду

$$\tilde{W}(x,t,\varepsilon) = \sum_{r=-2}^{+\infty} \mu^r W_r(x,t), \quad W_r(x,t) \in Y_r. \tag{23}$$

Підставимо формально ряд (23) у розширену задачу (6) та прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях малого параметра $\mu > 0$. Тоді для визначення коефіцієнтів формального ряду (23) одержимо наступну рекурентну систему задач:

$$\begin{gathered} R_0W_{-2} = 0, \quad E_1W_{-2}(M_m) = E_1\alpha_m, \\ G_mW_{-2w} \equiv E_2\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=2}^{n}\varphi_{jk}'(m)\frac{\partial W_{-2}(M_m)}{\partial t_{jk}} = 0, \end{gathered} \tag{24}$$

$$R_0 W_{-1} = 0, \quad E_1 W_{-1}(M_m) = 0,$$
$$G_m W_{-1} \equiv E_2\left(\alpha_m - \varphi_1'(m)\frac{\partial W_{-2}(M_m)}{\partial t_1}\right), \tag{25}$$

$$R_0 W_0 = h(x) - R_2 W_{-2}, \quad E_1 W_0(M_m) = E_1 \hat{W}_m,$$
$$G_m W_0 = E_2\left(\hat{W}_m - \varphi_1'(m)\frac{\partial W_{-1}(M_m)}{\partial t_1}\right), \tag{26}$$

....

$$R_0 W_r = -\sum_{\nu=2}^{\tilde{p}} R_\nu W_{r-\nu}(x,t), \quad E_1 W_r(M_m) = 0,$$
$$G_m W_r = -E_2\left[\varphi_1'(m)\frac{\partial W_{r-1}(M_m)}{\partial t_1} + \frac{\partial W_{r-3}(M_m)}{\partial x}\right]. \tag{27}$$

4. Про існування розв'язків ітераційних рівнянь. Одержані нами ітераційні рівняння (24) – (27) є диференціальними рівняннями з частинними похідними з точковими крайовими умовами, чого в загальному випадку недостатньо для однозначного розв'язання ітераційних задач (24) – (27). Проте нами буде показано, що серія ітераційних задач (24) – (27) асимптотично коректна у п. б. р. (11). З цією метою вивчимо питання існування розв'язків ітераційного рівняння

$$R_{0,p} W_r(x,t) = h_r(x,t) \tag{28}$$

у п. б. р. (11).

З одержаних тотожностей (18) – (22) випливає, що оператори A_s, $s = \overline{4, p}$, не внесли принципових змін у процес регуляризації с. з. з. (1). Це означає, що висновки 1 – 3 аналогічні висновкам 1 – 3 роботи [4], а отже, вірний аналог теореми 1 роботи [4]. В подальшому нам не обійтись без деяких формул та позначень, які відносяться до аналога теореми 1 роботи [4]. Тому наведемо необхідні формули.

Оскільки п. б. р. (11) інваріантний відносно головного оператора $R_{0,p}$ (див. тотожність (18)), то необхідною умовою існування розв'язку рівняння (28) в п. б. р. (11) є умова того, щоб права частина цього рівняння теж належала простору (11). Тому будемо вважати, що $h_r(x,t) \in Y_r$, тобто

$$h_r(x,t) = \sum_{i=1}^{n} h_{ri}(x,t) = \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\tilde{h}_{ri}(x,t), \tag{29}$$

де

$$h_{ri}(x,t) \equiv \sum_{k=1}^{2}\left[A_{rik}(x)U_k(t_1) + B_{rik}(x)U_k'(t_1) + \sum_{j=2}^{n}\beta_{rijk}(x)\exp t_{jk}\right] +$$
$$+ m_{ri}(x)\Psi(t_1) + n_{ri}(x)\Psi'(t_1) + S_{ri}(x). \tag{30}$$

Підпростори Y_{ri}, $i = \overline{1, n}$, теж інваріантні відносно головного оператора $R_{0,p}$. Тоді оператор $R_{0,p}$ є звідним у сім'ї просторів (див. [13, с. 36]), тобто допускає зображення

$$R_{0,p} = \bigoplus_{i=1}^{n} R_{(0,p)i}. \tag{31}$$

Головний оператор $R_{0,p}$ комутує з кожним проектором $p_i\colon Y_r \to Y_{ri}$, а отже, вірна тотожність

$$R_{0,p}W_r \equiv \sum_{i=1}^{n} p_i \bigoplus_{s=1}^{n} R_{(0,p)s} W_r \equiv \sum_{i=1}^{n} R_{(0,p)s} W_{ri}. \tag{32}$$

Тоді на основі рівностей (18), (29) та (32) векторне рівняння (28), задане в п. б. р. (11), можна замінити n скалярними рівняннями

$$R_{(0,p)i} W_{ri} = h_{ri}(x,t), \quad i = \overline{1,n}. \tag{33}$$

Таким чином, питання про існування розв'язку векторного рівняння (28) у гільбертовому просторі $Y_r = \bigoplus_{i=1}^{n} Y_{ri}$ ми звели до вивчення n скалярних рівнянь, кожне з яких задано відповідно в банаховому просторі Y_{ri}, $i = \overline{1,n}$.

Вивчимо питання існування розв'язку рівняння (33) при фіксованому значенні $i = \overline{1,n}$.

Скориставшись тотожністю (18) та зображенням (31), запишемо структуру ядер складових головного оператора. Маємо

$$\operatorname{Ker} R_{0,p} = \bigcup_{j=1}^{n} \operatorname{Ker} R_{(0,p)j} \tag{34}$$

де

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} R_{(0,p)1} &= \{ V_{r1k}(x) U_k(t_1),\ Q_{r1k}(x) U_k'(t_1), \\ &\qquad f_{r1}(x)\Psi(t_1),\ g_{r1}(x)\Psi'(t_1),\ k = 1,2 \}, \\ \operatorname{Ker} R_{(0,p)j} &= \{ \alpha_{rijk}(x) \exp t_{jk},\ j = \overline{2,n},\ k = 1,2 \}. \end{aligned} \tag{35}$$

Нехай права частина рівняння (33) при $i = \overline{1,n}$ не містить елементів ядра оператора $R_{(0,p)i}$. При $i = \overline{2,n}$ права частина рівняння (33) належить області значень оператора $R_{(0,p)i}$. Тоді згідно з методом невизначених коефіцієнтів частинний розв'язок цього рівняння шукаємо у вигляді

$$\begin{aligned} y_{ri}(x,t) = \sum_{k=1}^{2} \left[V_{rik}(x) U_k(t_1) + Q_{rik}(x) U_k'(t_1) + \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq 1}}^{n} \alpha_{rijk}(x) \exp t_{jk} \right] + \\ + f_{ri}(x)\Psi(t_1) + g_{ri}(x)\Psi'(t_1) + \omega_{ri}(x). \end{aligned} \tag{36}$$

Підставивши (36) у рівняння (33), одержимо наступні формули для визначення коефіцієнтів розв'язку (36):

$$\begin{aligned} V_{rik}(x) &= (\lambda_1 - \lambda_i)^{-1} A_{rik}(x), \quad Q_{rik}(x) = (\lambda_1 - \lambda_i)^{-1} B_{rik}(x), \\ f_{ri}(x) &= (\lambda_1 - \lambda_i)^{-1} m_{ri}(x), \quad g_{ri}(x) = (\lambda_1 - \lambda_i)^{-1} n_{ri}(x), \\ \alpha_{rijk}(x) &= (\lambda_j - \lambda_i)^{-1} \beta_{rijk}(x), \quad i \neq j, \\ \omega_{ri}(x) &= \lambda_i^{-1} S_{ri}(x), \quad i = \overline{1,n}. \end{aligned} \tag{37}$$

Права частина рівняння (33) при $i = 1$ в загальному випадку не належить області значень оператора $R_{(0,p)1}$. Тому будемо вимагати, щоб виконувалась точкова рівність

$$S_{r1}(0) = 0. \tag{38}$$

При виконанні умови (38) у просторі Y_{r1} існує частинний розв'язок рівняння (33) при $i = 1$ вигляду

$$y_{r1}(x,t) = \sum_{k=1}^{2} \sum_{j=2}^{n} \alpha_{r1jk}(x) \exp t_{jk} + \omega_{r1}(x), \tag{39}$$

коефіцієнти якого визначаються за формулами (37) при $i = 1$. В даному випадку

$$\lim_{x \to +0} \omega_{r1}(x) = \left[\tilde{\lambda}_1(0)\right]^{-1} S'_{r1}(0) < \infty. \tag{40}$$

Сформулюємо одержані результати у вигляді теореми.

Теорема 1. *Нехай: а) виконуються умови* 1 *та* 2*; б)* $h_r(x,t) \in Y_r$ *та не містить елементів ядра оператора* $R_{0,p}$*; в)* $S_{r1}(0) = 0$. *Тоді у просторі* Y_r *існує розв'язок рівняння* (28), *який можна записати у вигляді*

$$W_r(x,t) = Z_r(x,t) + y_r(x,t). \tag{41}$$

Тут

$$Z_r(x,t) \equiv b_1(x)\left[\sum_{k=1}^{2}\left[V_{r1k}(x)U_k(t_1) + Q_{r1k}(x)U'_k(t_1)\right] + f_{r1}(x)\Psi(t_1) + \right.$$

$$\left. + g_{r1}(x)\Psi'(t_1)\right] + \sum_{k=1}^{2} \sum_{j=2}^{n} b_j(x)\alpha_{rjjk}(x) \exp t_{jk} \tag{42}$$

де $v_{r1k}(x)$, $Q_{r1k}(x)$, $f_{r1}(x)$, $g_{r1}(x)$, $\alpha_{rjjk}(x)$ *— довільні, досить гладкі функції при* $x \in I$, *а* $y_r(x,t)$ *— однозначно визначена функція*

$$y_r(x,t) \equiv \sum_{i=2}^{n} b_i(x)\left\{\sum_{k=1}^{2}\left[V_{rik}(x)U_k(t_1) + Q_{rik}(x)U'_k(t_1)\right] + f_{ri}(x)\Psi(t_1) + \right.$$

$$\left. + g_{ri}(x)\Psi'(t_1)\right\} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\left[\omega_{ri}(x) + \sum_{k=1}^{2} \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^{n} \alpha_{rjjk}(x) \exp t_{jk}\right], \tag{43}$$

коефіцієнти якої обчислюються за формулами (37).

***Зауваження* 1.** Вимоги б) та в) теореми 1 є досить сильними та непрактичними, якщо ними треба буде користуватись при розв'язанні кожної з ітераційних задач (24) – (27). Проте при послідовному розв'язанні ітераційних задач (24) – (27) ці вимоги будуть виконуватись автоматично, за рахунок частини довільних функцій, що містяться в розв'язках (42), тобто за рахунок функцій $Q_{r1k}(x)$, $f_{r1}(x)$ та $g_{r1}(x)$.

Аналог теореми 2 роботи [4] ми не будемо розглядати, а проілюструємо результати цієї теореми при побудові асимптотики розв'язку розширеної задачі (6).

5. Побудова головного члена асимптотики розв'язку розширеної задачі. Оскільки рівняння (24) та (25) однорідні, то розв'язками цих рівнянь в п. б. р. (11) будуть $Z_r(x,t)$, $r = -2, -1$ (див. рівність (42)), коефіцієнти яких до певного часу будуть довільними, досить гладкими функціями при $x \in I$.

Приступимо до розв'язання наступного ітераційного рівняння (26). З цією метою обчислимо його праву частину. Скориставшись тотожністю (19), одержимо

$$h(x) - R_{2,p}W_{-2} \equiv \sum_{i=1}^{n} \big(h(x), b_i^*(x)\big) b_i(x) - R_{2,p}W_{-2}. \tag{44}$$

Скориставшись довільністю функцій $Q_{(-2)1k}(x)$ та $g_{(-2)1k}(x)$, виберемо їх як розв'язки диференціальних рівнянь

$$\tilde{D}_{11} Q_{r1k}(x) = 0, \quad k = 1, 2; \quad \tilde{D}_{11} g_{r1}(x) = 0. \tag{45}$$

При виконанні умов (45) права частина рівняння (26) не містить елементів ядра оператора $R_{0,p}$, тобто виконується умова б) теореми 1.

Для виконання умови в) даної теореми скористаємось довільною функцією $f_{(-2)1}(x)$, тобто виберемо цю функцію з такою початковою умовою:

$$f_{(-2)1}(0) = [\varphi_1'(0)]^{-2} \big(h(0), b_1^*(0)\big) \equiv f^0_{(-2)1}. \tag{46}$$

При виконанні умов (45) та (46) до розв'язання рівняння (26) ми можемо застосувати теорему 1, тобто у просторі Y_0 існує розв'язок цього рівняння вигляду (41) при $r = 0$, де

$$y_0(x, t) \equiv \omega_0(x) \equiv \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \omega_{0i}(x). \tag{47}$$

Оскільки оператор $\tilde{D}_{11}$ (див. формули (22)) має особливість при похідній $(\varphi_1(0) = 0)$, то диференціальні рівняння (45) необхідно розв'язувати при умовах $(r = -2)$

$$|Q_{r1k}(0)| < \infty, \quad k = 1, 2; \quad |g_{r1}(0)| < \infty. \tag{48}$$

Розв'язками задач (45), (48) в просторах досить гладких функцій будуть тотожні нулі.

Таким чином, на даному етапі ми одержали розв'язок рівняння (24), який замість п'яти довільних функцій містить тільки три довільні функції $V_{(-2)1k}(x)$, $k = 1, 2$, та $f_{(-2)1}(x)$.

Розпочнемо наступний цикл, тобто перейдемо до розв'язання у просторі Y_1 рівняння (27). По аналогії з попереднім спочатку обчислимо його праву частину. Маємо

$$\begin{aligned} H_2(x, t) \equiv -R_2 W_{-1} - R_3 W_{-2} \equiv -b_1(x) \tilde{D}_{11} \Big[g_{(-1)1}(x) \Psi(t_1) + \\ + \sum_{k=1}^{2} Q_{(-1)1k}(x) U_k(t_1) \Big] - b_1(x) \varphi_1'^2(x) f_{(-1)1}(x) - \\ - \sum_{k=1}^{2} \sum_{j=2}^{n} \Big[b_j(x) D_{jjk} + \sum_{\nu=2}^{n} b_\nu(x) T_{j\nu jk} \Big] \alpha_{(-2)jjk}(x) \exp t_{jk}. \end{aligned} \tag{49}$$

Вимагаючи виконання умови б) теореми 1, визначимо функції $Q_{(-1)1k}(x) \equiv$ $\equiv g_{(-1)1}(x) \equiv 0$, $k = 1, 2$, та одержимо наступні диференціальні рівняння:

$$D_{jjk} \alpha_{(-2)jjk}(x) = 0, \quad j = \overline{2, n}; \quad k = 1, 2. \tag{50}$$

При виконанні умови в) ми визначимо початкову умову $f_{(-1)1}(0) = 0$. При виконанні цих умов у просторі Y_1 існує розв'язок рівняння (27) при $r = 1$, зображений формулою (41) при $r = 1$, де

$$\omega_{11}(x) = -\varphi_1'^2(x)\lambda_1^{-1}(x)f_{(-2)1}(x), \quad \dot\omega_{1i}(x) \equiv 0, \quad i = \overline{2,n},$$

$$\beta_{1\nu jk}(x) = -(\lambda_j - \lambda_\nu)^{-1} \cdot 2\varphi_{jk}'(x)\big(b_\nu'(x), b_\nu^*(x)\big).$$

Розв'язками диференціальних рівнянь (50) будуть функції

$$\alpha_{(-2)jjk}(x) = \alpha_{(-2)jjk}^{(k-1)l} \exp\left\{-\int\limits_{(k-1)l}^{x} N(x)\,dx\right\}, \tag{51}$$

де

$$N(x) = \big(b_j'(x), b_j^*(x)\big) + \big[2\varphi_{jk}'(x)\big]^{-1}\varphi_{jk}''(x).$$

На наступному етапі, тобто при розв'язанні рівняння (27) при $r = 2$, будуть однозначно визначені функції $Q_{01k}(x)$, $k = 1, 2$, $g_{01}(x)$. Крім цього, будуть одержані такі диференціальні рівняння:

$$\begin{gathered} D_{jjk}\,\alpha_{(-1)jjk}(x) = -B_{4j}(x)\alpha_{(-2)jjk}(x), \\ D_{11}V_{(-2)1k} = -B_{4j}(x)\dot Q_{(-2)1k}, \quad D_{11}f_{(-2)1} = -B_{4j}(x)g_{(-2)1}. \end{gathered} \tag{52}$$

Розв'язуючи диференціальне рівняння відносно невідомої функції $f_{(-2)1}(x)$, що задовольняє початкову умову (46), ми однозначно визначимо цю функцію. Перші два рівняння з (52) визначають функції $\alpha_{(-1)jjk}(x)$ та $V_{(-2)1k}(x)$ з точністю до довільних сталих множників $\alpha_{(-1)jjk}^{(k-1)l}$ і $V_{(-2)1k}^{(k-1)l}$, $k = 1, 2$; $j = \overline{2,n}$ (див. формули (50), (51)).

***Висновок* 4.** Таким чином, розв'язуючи поступово ітераційні рівняння (24) – (27) при $r = 1, 2$, ми визначили функцію $W_{-2}(x,t)$ з точністю до $2n$ довільних сталих $V_{(-2)1k}^{(k-1)l}$, $\alpha_{(-2)jjk}^{(k-1)l}$, $k = 1, 2$; $j = \overline{2,n}$.

Проробивши ще два цикли, тобто розв'язавши поступово рівняння (27) при $r = 3, 4$, ми визначимо розв'язки $W_r(x,t)$, $r = -1, 0$, причому кожний з точністю до $2n$ сталих $V_{r1k}^{(k-1)l}$ та $\alpha_{rjjk}^{(k-1)l}$, $r = -1, 0$.

Продовжуючи далі ітераційний процес, методом математичної індукції можна показати, що при поступовому розв'язанні в п. б. р. (11) ітераційних рівнянь (24) – (27) при $r = \overline{1, s+4}$ ми визначимо з точністю до $2n$ сталих розв'язки рівнянь (24) – (27) при $r = \overline{1,s}$.

Пізніше буде показано, що визначена нами функція

$$\tilde W_0(x,t,\mu) \equiv \mu^{-2}W_{-2} + \mu^{-1}W_{-1} + W_0 \tag{53}$$

є головним членом асимптотики розв'язку розширеної задачі (6), а її звуження при $t = \Phi(x,\varepsilon)$ є головним членом асимптотики розв'язку с. з. з. (1).

6. Однозначне визначення стабільних розв'язків ітераційних задач. Нам необхідно спочатку побудувати головний член асимптотики розв'язку с. з. з. (1), який би мав найпростіший вигляд і в той же час був обмеженим при прямуванні малого параметра до нуля для всіх $x \in I$.

В попередньому пункті була визначена функція $(r = -2)$

$$\begin{aligned} W_r(x,t) = {} & b_1(x)\left[\sum_{k=1}^{2} V_{r1k}(x)U_k(t_1) + f_{r1}(x)\Psi(t_1)\right] + \\ & + \sum_{k=1}^{2}\sum_{j=2}^{n} b_j(x)\alpha_{rjjk}(x)\exp t_{jk} \end{aligned} \tag{54}$$

з точністю до $2n$ сталих.

Відомо [12, с. 80] що при $x > 0$ маємо асимптотичні оцінки $U_k(t_1) \cong \cong O\left(t_1^{-1/4}\right) \cong O\left(\mu^{1/2}\right)$, тобто вираз $\mu^{-2} U_k(t_1)$ необмежено зростає при прямуванні малого параметра до нуля.

Для дослідження на обмеженість виразу $\mu^{-2} W_{-2}(x, t)$ нам необхідно більш детально дослідити поведінку сталих, які містить функція $W_{-2}(x, t)$. З цією метою підставимо розв'язок $W_{-2}(x, t)$ у крайові умови (24). Тоді для визначення невідомих сталих одержимо алгебраїчну систему $2n$ рівнянь вигляду ($r = -2$)

$$\Delta(\varepsilon) C_r = \Gamma_r. \tag{55}$$

Тут C_r — невідомий вектор, а Γ_r — заданий вектор, причому вони мають таку структуру:

$$C_r = \left(V_{r11}^0, V_{r12}^l, \alpha_{r21}^0, \ldots, \alpha_{rn1}^0, \alpha_{r22}^l, \ldots, \alpha_{rn2}^l\right),$$

$$\Gamma_r = \left(\Gamma_{r1}^0, \Gamma_{r1}^l, \Gamma_{r2}^0, \ldots, \Gamma_{rn}^0, \Gamma_{r2}^l, \ldots, \Gamma_{rn}^l\right).$$

Матрицю системи (55) можна записати у вигляді блочної матриці

$$\Delta(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ 0 & \Delta_{22} \end{pmatrix}.$$

Визначник матриці $\Delta(\varepsilon)$ обчислюється за формулою [14, с. 45]

$$|\Delta(\varepsilon)| = |\Delta_{11}||\Delta_{22}|. \tag{56}$$

Тут

$$|\Delta_{11}| = b_{11}(0) b_{11}(l) \begin{vmatrix} U_1(0) & a_{12}(0) U_2(0) \\ a_{11}(l) U_1(t_1(l)) & U_2(t_1(l)) \end{vmatrix},$$

де

$$a_{1k}(x) = \exp\left\{-\int\limits_{(k-1)l}^{x} N(x)\, dx\right\}, \quad k = 1, 2.$$

Легко перевірити, що виконується асимптотична рівність

$$|\Delta_{11}| \cong O\left(t_1^{-1/4}(l)\right) \cong O\left(\sqrt{\mu}\right).$$

Провівши аналогічні дослідження відносно визначника $|\Delta_{22}|$, одержимо асимптотичну рівність $|\Delta_{22}| \cong O(1)$. Тоді для визначника $|\Delta(\varepsilon)|$ маємо $|\Delta(\varepsilon)| \cong O(\sqrt{\mu})$. Оскільки $\mu > 0$, то $|\Delta(\varepsilon)| \neq 0$. Умова $\Delta(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$ нами буде врахована при визначенні невідомих величин C_r.

При $r = -2$ маємо

$$\Gamma_{-2} = \left(\Gamma_{(-2)1}^0, \Gamma_{(-2)1}^l, 0, \ldots, 0\right), \tag{57}$$

де

$$\begin{aligned} \Gamma_{(-2)1}^0 &= \alpha_{01} - b_{11}(0) f_{(-2)1}(0) \Psi(t_1(0)), \\ \Gamma_{(-2)1}^l &= \alpha_{l1} - b_{11}(l) f_{(-2)1}(l) \Psi(t_1(l)). \end{aligned} \tag{58}$$

Розв'язуючи систему (55) при $r = -2$, одержуємо

$$V^0_{(-2)11} = |\Delta_{11}|^{-1}\left[\Gamma^0_{(-2)1}b_{11}(l)U_2(t_1(l)) - \Gamma^l_{(-2)1}b_{11}(0)a_{12}(0)U_2(t_1(0))\right] \equiv$$

$$\equiv |\Delta_{11}|^{-1}\,\Gamma^0_{(-2)}\,b_{11}(l)U_2(t_1(l)) \cong O(1), \tag{59}$$

$$V^l_{(-2)11} = |\Delta_{11}|^{-1}\left[\Gamma^l_{(-2)1}b_{11}(0)U_1(0) - \Gamma^0_{(-2)1}b_{11}(l)a_{11}(l)U_1(t_1(l))\right] \cong O\left(\mu^{-1/2}\right),$$

$$\alpha^{(k-1)l}_{(-2)jjk} = 0, \quad k = 1, 2; \quad j = \overline{2, n}.$$

Висновок 5. В загальному випадку вираз $\mu^{-2}W_{-2}(x,t)$ необмежено зростає при прямуванні малого параметра до нуля.

Проте, якщо компоненти вектора (57) вибрати у вигляді (див. рівності (58))

$$\alpha_{m1} = b_{11}(m)f_{(-2)1}(m)\Psi(t_1(m)), \quad m = \{0, l\}, \tag{60}$$

то одержимо тотожно рівний нулю вектор C_{-2}. Це означає, що вираз

$$\mu^{-2}W_{-2}(x,t) \equiv \mu^{-2}f_{(-2)1}(x)\Psi(t_1)$$

обмежений при $x > 0$ та при прямуванні малого параметра до нуля, оскільки $\Psi(t_1) \cong O(\mu^2)$ при $x > 0$ (див. [3, 8]).

Для визначення вектора C_{-1} підставимо в розв'язок $W_{-1}(x,t)$ (див. формулу (54) при $r = -1$) крайові умови (25). Одержимо систему алгебраїчних рівнянь (55) при $r = -1$. Компонентами невідомого вектора будуть числа

$$\begin{gathered}\Gamma^m_{(-1)s} = \alpha_{ms} + \varphi_1'(m)b_{1s}(m)f_{(-2)1}(m)\Psi(t_1(m)),\\ \Gamma^m_{(-1)1} = 0, \quad s = \overline{2, n}, \quad m = \{0, l\}.\end{gathered} \tag{61}$$

Виходячи з структури матриці $\Delta(\varepsilon)$, для визначення вектора $\tilde{C}_{-1} = \left(\alpha^0_{(-1)21}, \ldots, \alpha^l_{(-1)n2}\right)$ одержуємо систему алгебраїчних $2n-2$ рівнянь вигляду

$$\Delta_{22}\tilde{C}_{-1} = \tilde{\Gamma}_{-1}, \tag{62}$$

де

$$\tilde{\Gamma}_{-1} = \left(\Gamma^0_{(-1)2}, \ldots, \Gamma^0_{(-1)n}, \Gamma^l_{(-1)2}, \ldots, \Gamma^l_{(-1)n}\right).$$

Дослідивши більш детально визначник $|\Delta_{22}|$, дістанемо

$$|\Delta_{22}| = \prod_{j=2}^{n}\varphi'_{j1}(0)\varphi'_{j2}(l)\left|\tilde{B}(0)\right|\left|\tilde{B}(l)\right|,$$

де

$$\tilde{B}(x) = \begin{pmatrix} b_{22}(x) & \ldots & b_{2n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n2}(x) & \ldots & b_{nn}(x)\end{pmatrix}.$$

Припустимо, що $\left|\tilde{B}(m)\right| \neq 0$, $m = \{0, l\}$. Тоді з системи (62) однозначно визначимо компоненти вектора $\tilde{C}_{-1}$, а отже, буде однозначно визначений вектор C_{-1}.

Врахувавши конкретний вигляд компонент (61), тобто той факт, що $\Psi'(0) \cong O(1)$, а $\Psi'(t_1(l)) \cong O(\mu)$, будемо мати

$$C^m_{(-1)s} \cong O(1), \quad m = \{0, l\}, \quad s = \overline{2, n}.$$

При досить малих значеннях параметра $\mu > 0$ доданки $\mu^{-1} \exp t_{ik}$ все ж таки будуть обмеженими на інтервалі $(0, l)$. Проте необмеженими будуть доданки $\mu^{-1} U_k(t_1)$.

З метою одержання обмеженого виразу $\mu^{-1} W_{-1}(x, t)$, виходячи з формул (61), ми повинні взяти

$$\alpha_{ms} = -\varphi_1'(m) b_{1s}(m) f_{(-2)1}(m) \Psi'(t_1(m)). \tag{63}$$

При такому виборі компонент вектора $\tilde{\Gamma}_{-1}$ поступово одержимо $\tilde{\Gamma}_{-1} = 0$, $\Gamma_{-1} = 0$, а отже, $W_{-1}(x, t) \equiv 0$. Тут враховано, що $f_{(-1)1}(x) \equiv 0$.

Для визначення компонент невідомого вектора C_0, по аналогії з попереднім одержимо систему (55) при $r = 0$. Всі компоненти відомого вектора Γ_0 є величинами порядку $O(1)$. З даної системи ми однозначно визначимо невідомий вектор C_0, причому його компоненти будуть мати такі асимптотичні оцінки $(r = 0)$:

$$V_{r11}^0 \cong O(1), \quad V_{r12}^0 \cong O\left(\mu^{-1/2}\right), \quad \alpha_{rsk}^{(k-1)l} \cong O(1). \tag{64}$$

Зауваження 2. Не дивлячись на те, що $V_{012}^l \cong O\left(\mu^{-1/2}\right)$, вираз $V_{012}(x) b_1(x) U_2(t_1)$ є обмеженим при прямуванні малого параметра до нуля.

Висновок 6. Таким чином, при виборі компонент векторів α_m у вигляді формул (60) та (63) ми одержали однозначно визначену функцію

$$W_0(x, t, \mu) \equiv \mu^{-2} f_{(-2)1}(x) \Psi(t_1) + W_0(x, t), \tag{65}$$

яка при прямуванні малого параметра до нуля є обмеженою при $x > 0$.

Продовжимо далі ітераційний процес. Використовуючи крайові умови (27), для визначення невідомого вектора C_r ми одержимо систему (55) при $r > 0$, з якої завжди зможемо визначити невідомий вектор C_r. Асимптотичні властивості вектора C_r описані формулами (64).

Це означає, що система рекурентних задач (24) – (27) асимптотично коректна у п. б. р. (11).

7. Оцінка залишкового члена асимптотики розв'язку. Запишемо формальний розв'язок розширеної задачі (6) у вигляді тотожності

$$\tilde{W}(x, t, \mu) \equiv \tilde{W}_{\varepsilon m}(x, t, \mu) + \tilde{\xi}_{m+1}(x, t, \varepsilon), \tag{66}$$

де $\tilde{W}_{\varepsilon m}(x, t, \mu) \equiv \sum_{r=-2}^{m} \mu^r W_r(x, t)$ — часткова сума ряду (66), а $\tilde{\xi}_{m+1}(x, t, \varepsilon)$ — залишковий член цього ряду.

Проведемо звуження тотожності (66) при $t = \Phi(x, \varepsilon)$. Одержимо

$$W(x, \varepsilon) \equiv W(x, \Phi(x, \varepsilon), \mu) \equiv \tilde{W}(x, t, \mu)\big|_{t = \Phi(x, \varepsilon)} \equiv$$

$$\equiv W_{\varepsilon m}(x, \Phi(x, \varepsilon), \mu) + \xi_{m+1}(x, \Phi(x, \varepsilon), \varepsilon). \tag{67}$$

За відомою методикою [4, 8] можна показати, що для залишкового члена асимптотики розв'язку збуреної задачі (1) вірна оцінка

$$\left\| \xi_{m+1}(x, \Phi(x, \varepsilon)), \varepsilon \right\|_{C[I]} \le K \varepsilon^{m/2}, \quad m \ge 0, \tag{68}$$

де постійна K не залежить від $x \in I$ та малого параметра $\varepsilon > 0$.

Сформулюємо у вигляді загальної теореми одержані результати.

Теорема 2. *Нехай*: 1) *виконуються умови* 1 *та* 2; 2) $\left|\tilde{B}(m)\right| \neq 0$, $b_{11}(m) \neq$ $\neq 0$, $m = \{0, l\}$.

Тоді при досить малих значеннях $\varepsilon > 0$:

а) *для розв'язку розширеної задачі* (6) *описаним вище методом єдиним чином може бути побудований асимптотичний ряд* (23);

б) *звуження ряду* (23) *при* $t = \Phi(x, \varepsilon)$ *буде асимптотичним рядом збуреної задачі* (1);

в) *для залишкового члена асимптотики розв'язку с. з. з.* (1) *справедлива оцінка* (68);

г) *побудований розв'язок задачі* (1) *є рівномірно придатним для всіх* $x \in I$ *при* $0 < \delta < \varepsilon < \varepsilon_0 << 1$.

***Зауваження* 3.** Нехай $\left(h(0), b_1^*(0)\right) = 0$. Тоді згідно з формулою (46) одержимо $f_{(-2)1}^0 = 0$, а отже, $f_{(-2)1}(x) = 0$. В даному випадку вектор Γ_{-2} буде тотожно рівним нулю (див. формули (57), (58)), тобто $\alpha_{m1} = 0$ і $C_{-2} = 0$ (див. формули (60)). З формул (63) одержимо, що $\alpha_{ms} = 0$, $m = \{0, l\}$, $s = \overline{2, n}$. Таким чином, при виконанні умови $\left(h(0), b_1^*(0)\right) = 0$ маємо $\alpha_m = 0$, $W_{-2}(x, t) \equiv$ $\equiv W_{-1}(x, t) \equiv 0$. В цьому випадку розв'язок с. з. з. (1) буде рівномірно придатним для всіх $x \in I$ при $\varepsilon \to +0$.

1. *Бобочко В. Н.* Сингулярно возмущенная задача Коши с точкой поворота // Мат. физика и нелинейн. механика. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1991. – Вып. 16 (50). – С. 68–74.
2. *Бобочко В. Н.* Сильная точка поворота в теории сингулярных возмущений // Теория функций. Дифференц. уравнения в математическом моделировании: Тез. междунар. конф. (Воронеж, 25 янв. – 3 февр. 1993 г.). – Воронеж, 1993. – С. 36.
3. *Бобочко В. Н., Коломиец В. Г.* Асимптотическое интегрирование уравнения типа Орра – Зоммерфельда. – Киев, 1990. – 44 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; № 90.45).
4. *Бобочко В. Н.* Асимптотическое интегрирование системы дифференциальных уравнений с точкой поворота // Дифференц. уравнения. – 1991. – **27**, № 9. – С. 1505–1515.
5. *Бобочко В. Н.* Уравнение типа Орра – Зоммерфельда с двумя точками поворота // Там же. – 1992. – **28**, № 10. – С. 1559–1570.
6. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1968. – 464 с.
7. *Федорюк М. В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1983. – 352 с.
8. *Ломов С. А.* Введение в теорию сингулярных возмущений. – М.: Наука, 1981. – 400 с.
9. *Дзядык В. К.* Некоторые специальные функции и их роль при решении неоднородных дифференциальных уравнений с точкой поворота // Теория функций и ее приложения. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1979. – С. 61–81.
10. *Дзядык С. Ю.* Асимптотическое представление решений сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с точкой поворота // Теория функций и ее приложения. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1979. – С. 81–101.
11. *Шкиль Н. И., Завизион Г. В.* Асимптотическое представление решений системы линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при наличии точки поворота // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1988. – № 9. – С. 20–24.
12. *Дородницын А. А.* Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых основных видов дифференциальных уравнений второго порядка // Успехи мат. наук. – 1952. – **7**, вып. 6. – С. 3–96.
13. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972. – 740 с.
14. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Техтеоретиздат, 1953. – 492 с.

Одержано 10.06.94