УДК 517.958

О. М. Боценюк (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

ГЛОБАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ ОДНІЄЇ ДВОВИМІРНОЇ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИСТЕМИ ПІВЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ МАГНІТОПРУЖНОСТІ

For the system of semilinear magnetoelasticity equations the theorem on global existence and uniqueness of the solutions in two-dimensional space obtained.

Для системи півлінійних рівнянь магнітопружності одержана теорема існування і єдиності глобальних розв'язків у двовимірному просторі.

Нехай електропровідне пружне середовище займає область $\Omega' = \Omega \times \mathbb{R}$, де Ω — область в $\mathbb{R}^2$ з гладкою межею Γ і $\Sigma = \Gamma \times]0, T[$, $Q = \Omega \times]0, T[$, $T > 0$. Будемо розглядати випадок, коли магнітне поле і переміщення в такому середовищі мають спеціальний вигляд, а саме: $\vec{u} = (u_1(x_1, x_2, t), u_2(x_1, x_2, t), 0)$, $\vec{b} = (0, 0, b(x_1, x_2, t))$ і зовнішнє магнітне поле $\vec{B}_0 = (0, 0, B_0(x_1, x_2, t))$. В цьому випадку початково-крайова задача, яка розглядалась в [1], набере вигляду

$$\frac{\partial b}{\partial t} - \frac{1}{\sigma\mu_0}\Delta b + \operatorname{div}\left(B_0 \frac{\partial u}{\partial t}\right) + \operatorname{div}\left(b \frac{\partial u}{\partial t}\right) = f_1, \tag{1}$$

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mu \Delta u - (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u + \frac{1}{\mu_0} B_0 \operatorname{grad} b +$$

$$+ \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{grad} b^2 = f_2 \tag{2}$$

в Q із початковими і крайовими умовами

$$b(x, 0) = b_0(x), \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad u'(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

$$\frac{\partial b}{\partial n} = 0, \quad u = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma. \tag{4}$$

В (1), (2) $u(x, t)$ позначає вектор в $\mathbb{R}^2$ і для простоти припускаємо, що величини σ, ρ, λ, μ, μ_0, які характеризують середовище, не залежать від x, t і додатні.

1. Означення. Позначимо через $(\cdot, \cdot)$, $|\cdot|$ скалярний добуток і норму в $(L^2(\Omega))^n$, $n = 1, 2$, а через $\|\cdot\|_s$ норму в $(H^s(\Omega))^n$, $s \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2$. Норму в $(H^1(\Omega))^n$ будемо також позначати через $\|\cdot\|$, тобто $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|$. Тут $H^s(\Omega)$ — простір Соболєва дробового порядку [2]. Означимо білінійні форми

$$a_1(\varphi, \psi) = \frac{1}{\sigma\mu_0} \int_\Omega \operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} \psi \, dx + \int_\Omega \varphi\psi \, dx, \quad \varphi, \psi \in H^1(\Omega),$$

$$a_2(\varphi, \psi) =$$

$$= \int_\Omega \left\{ \lambda \operatorname{div} \varphi \operatorname{div} \psi + 2\mu \sum_{i,j=1}^{2} \varepsilon_{ij}(\varphi)\, \varepsilon_{ij}(\psi) \right\} dx, \quad \varphi, \psi \in (H_0^1(\Omega))^2,$$

де $\varepsilon_{ij} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$, $1 \le i, j \le 2$, для $v \in (H^1(\Omega))^2$.

Нехай A_1, A_2 — необмежені оператори в $L^2(\Omega)$, $(L^2(\Omega))^2$, які асоційовані відповідно з формами a_1, a_2. Тоді $D(A_1) = \{v \mid v \in H^2(\Omega), dv/dn = 0$ на $\Gamma\}$, $D(A_2) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^2$ і $A_1\varphi = -\Delta\varphi/(\sigma\mu_0) + \varphi$, $\varphi \in D(A_1)$, $A_2\psi = -\mu\Delta\psi - (\lambda + \mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\psi$, $\psi \in D(A_2)$. Стандартним чином означаються дробові степені операторів A_1, A_2, і ми маємо співвідношення [3, 4] $D(A_1^\theta) = \{v \mid v \in H^{2\theta}(\Omega), dv/dn = 0$ на $\Gamma\}$ при $3/4 < \theta \le 1$, $D(A_1^\theta) = H^{2\theta}(\Omega)$ при $\theta < 3/4$, $D(A_2^\theta) = (H^{2\theta}(\Omega))^2$ при $\theta < 1/4$, $D(A_2^\theta) = \{v \mid v \in (H^{2\theta}(\Omega))^2, v = 0$ на $\Gamma\}$ при $1/4 < \theta \le 1$. В цих співвідношеннях норми еквівалентні. Через c будемо позначати різні додатні сталі, які можуть залежати від Ω і коефіцієнтів системи (1), (2), але не залежать від T, b_0, u_0, u_1, f_1, f_2, B_0.

2. Існування глобального розв'язку. Якщо $\{b, u\}$ є гладкий розв'язок (1)–(4), то $\{b, u\}$ задовольняє систему рівнянь

$$(b', \varphi) + a_1(b, \varphi) - (b, \varphi) - \int_\Omega (B_0 + b)\, u' \cdot \nabla\varphi \, dx =$$

$$= (f_1, \varphi) \quad \forall\, \varphi \in H^1(\Omega), \tag{5}$$

$$\rho(u'', \psi) + a_2(u, \psi) + \frac{1}{\mu_0}\int_\Omega (B_0 + b)\nabla b \cdot \psi \, dx =$$

$$= (f_2, \psi) \quad \forall\, \psi \in (H_0^1(\Omega))^2. \tag{6}$$

Задача 1. Припустимо, що $f_1 \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, $f_2 \in L^1(0, T; L^2(\Omega))^2$, $b_0 \in L^2(\Omega)$, $u_0 \in (H_0^1(\Omega))^2$, $u_1 \in (L^2(\Omega))^2$, $B_0 \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$. Знайти b і u, які задовольняють (3)–(6) і включення

$$b \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)),$$

$$u \in L^\infty(0, T; (H_0^1(\Omega))^2), \quad u' \in L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^2).$$

Теорема 1. *Існує принаймні один розв'язок задачі* 1.

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню теореми 1 в [1].

Задача 2. Для заданих f_1, f_2, B_0, b_0, u_0, u_1: $f_1 \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, $f_2 \in L^1(0, T; (H^\gamma(\Omega))^2)$, $b_0 \in H^\gamma(\Omega)$, $u_0 \in (H_0^{1+\gamma}(\Omega))^2$, $u_1 \in (H^\gamma(\Omega))^2$ $(0 < \gamma < 1/2)$, $B_0 \in L^2(0, T; H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega))$ знайти функції b і u, які задовольняють (3)–(6) і включення $b \in L^2(0, T; H^{1+\gamma}(\Omega))$, $b \in C([0, T]; H^\gamma(\Omega))$, $u \in C([0, T]; (H_0^{1+\gamma}(\Omega))^2)$, $u' \in C([0, T]; (H^\gamma(\Omega))^2)$.

Теорема 2. *Існує єдиний розв'язок задачі* 2.

Спочатку наведемо деякі твердження.

Лема 1. *Нехай* $u \in H^s(\Omega)$ $(s < 1)$ *і* $v \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. *Тоді*

$$\| u \cdot v \|_s \le c \| u \|_s (\| v \|_1 + \| v \|_{L^\infty}). \tag{7}$$

Доведення. Продовжимо функції u, v на весь простір $\mathbb{R}^2$ із збереженням класу (див. [2]). Тодідостатньо довести лему для $\Omega = \mathbb{R}^2$. Нам знадобиться простір Бєсова $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. Для $0 < s < 1$ в ньому можна означити норму таким чином [5, с. 227]:

$$\|f\|_{B^s_{p,q}} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \left(\int\limits_{Q_\delta} \frac{\|f(x+h) - f(x)\|^q_{L^p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^{n+qs}}\, dh \right)^{1/q}$$

де $Q_\delta = \{y \mid y = (y_1, \ldots, y_n);\ 0 < y_i < \delta\}$, $0 < \delta \le \infty$.

Використовуючи тотожність $B^s_{2,2} = H^s$ і нерівність Гельдера, одержуємо

$$\|u \cdot v\|_s \le c\,\|uv\|_{B^s_{2,2}} \le$$

$$\le c\,|uv| + c\left(\int\limits_{Q_\delta} \frac{|u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)|^2}{|h|^{2+2s}}\, dh \right)^{1/2} \le$$

$$\le c\,|uv| + c\left(\int\limits_{Q_\delta} \frac{|(u(x+h) - u(x))v(x+h)|^2}{|h|^{2+2s}}\, dh \right)^{1/2} +$$

$$+ c\left(\int\limits_{Q_\delta} \frac{|u(x)(v(x+h) - v(x))|^2}{|h|^{2+2s}}\, dh \right)^{1/2} \le$$

$$\le c\,|u|\,\|v\|_{L^\infty} + c\,\|v\|_{L^\infty}\left(\int\limits_{Q_\delta} \frac{|u(x+h) - u(x)|^2}{|h|^{2+2s}}\, dh \right)^{1/2} +$$

$$+ c\,\|u\|_{L^{2p'}}\left(\int\limits_{Q_\delta} \frac{\|v(x+h) - v(x)\|^2_{L^{2p}}}{|h|^{2+2s}}\, dh \right)^{1/2} \le$$

$$\le c\,\|u\|_s\,\|v\|_{L^\infty} + c\,\|u\|_{B^s_{2,2}}\,\|v\|_{L^\infty} + \|u\|_{L^{2p'}}\|v\|_{B^s_{2p,2}}, \tag{8}$$

де $p' = p/(p-1)$. Для $p = 1/s$ маємо вкладення (див. [6], теорема 6.5.1) $H^1 \subset B^1_{2,2} \subset B^s_{2p,2}$, $H^s \subset L^{2p'}$, тому із (8) отримуємо (7). Лема доведена.

Означимо на $H^1(\Omega) \times (H^1_0(\Omega))^2$ білінійну форму $m(\varphi, \psi) = \int_\Omega \varphi \operatorname{div} \psi\, dx$, $\varphi \in H^1(\Omega)$, $\psi \in (H^1_0(\Omega))^2$. Ця форма задовольняє умови $|m(\varphi, \psi)| \le$ $\le |\varphi|\,\|\psi\|_1$, $|m(\varphi, \psi)| \le \|\varphi\|_1\,|\psi|$, $\varphi \in H^1(\Omega)$, $\psi \in (H^1_0(\Omega))^2$.

Лема 2. *Форма m може бути єдиним чином продовжена до білінійної форми на $H^\theta(\Omega) \times (H^{1-\theta}_0(\Omega))^2$ при $\theta < 1/2$ і на $H^\theta(\Omega) \times (H^{1-\theta}(\Omega))^2$ при $\theta > 1/2$. Причому виконується нерівність $|m(\varphi, \psi)| \le \|\varphi\|_\theta\,\|\psi\|_{1-\theta}$.*

Доведення. Із теореми 4.4.1 в [6] випливає, що m може бути єдиним чином продовжена до обмеженої білінійної форми на $[L^2(\Omega), H^1(\Omega)]_\theta \times$ $\times [(H^1_0(\Omega))^2, (L^2(\Omega))^2]_\theta$. Звідси, згідно з результатами про інтерполяцію просторів Соболєва [2], випливає лема 2.

Нам буде потрібна також нерівність [7–9] $(\gamma > 0)$

$$\|v\|_{L^\infty} \le c\,\|v\|_1 \left(1 + \ln\left(1 + \frac{\|v\|_{1+\gamma}}{\|v\|_1}\right)\right)^{1/2}, \quad v \in H^{1+\gamma}(\Omega), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2. \quad (9)$$

Доведення теореми 2. Застосуємо метод Фаедо–Гальоркіна. Нехай $w_j \in H^1(\Omega)$, $v_j \in (H_0^1(\Omega))^2$ — власні функції наступних спектральних задач: $a_1(w_j, \varphi) = \lambda_j^1(w_j, \varphi)$ $\forall\, \varphi \in H^1(\Omega)$, $|w_j| = 1$, $a_2(v_j, \psi) = \lambda_j^2(v_j, \psi)$ $\forall\, \psi \in (H_0^1(\Omega))^2$, $|v_j| = 1$. Нехай $V_{1m} = \mathcal{L}(w_1, \ldots, w_m)$, $V_{2m} = \mathcal{L}(v_1, \ldots, v_m)$, $\mathcal{L}(E)$ — лінійна оболонка множини E. Визначимо наближений розв'язок $\{b_m(t), u_m(t)\}$ таким чином: $b_m(t) \in V_{1m}$, $u_m(t) \in V_{2m}$

$$(b_m', \varphi_m) + a_1(b_m, \varphi_m) - \int_\Omega (B_0 + b_m)\, u_m' \cdot \nabla\varphi_m\, dx =$$

$$= (b_m + f_1, \varphi_m) \quad \forall\, \varphi_m \in V_{1m}, \quad (10)$$

$$\rho(u_m'', \psi_m) + a_2(u_m, \psi_m) + \frac{1}{\mu_0}\int_\Omega (B_0 + b_m)\, \nabla b_m \cdot \psi_m\, dx =$$

$$= (f_2, \psi_m) \quad \forall\, \psi_m \in V_{2m}, \quad (11)$$

$$b_m(0) = b_{0m}, \quad b_{0m} = P_m^{(1)} b_0,$$

$$u_m(0) = u_{0m}, \quad u_{0m} = P_m^{(2)} u_0, \quad u_m'(0) = u_{1m}, \quad u_{1m} = P_m^{(2)} u_1,$$

де $P_m^{(1)}: L^2(\Omega) \to V_{1m}$, $P_m^{(2)}: (L^2(\Omega))^2 \to V_{2m}$ — проектори.

Апріорна оцінка I. Покладемо в (10), (11) $\varphi_m = b_m(t)$, $\psi_m = \mu_0 u_m'(t)$, проінтегруємо на $[0, t]$ і додамо ці рівняння. Застосувавши лему Біхарі, одержимо

$$|b_m(t)|^2 + \int_0^t |\nabla b_m|^2 d\sigma + |u_m'(t)|^2 + \|u_m(t)\|^2 \le$$

$$\le c\left(|b_0| + \|u_0\| + |u_1| + \int_0^t \big(|f_1| + |f_2|\big)\, d\sigma\right)^2. \quad (12)$$

Апріорна оцінка II. Покладемо в (10), (11) $\varphi_m = A_1^\gamma b_m$, $\psi_m = A_2^\gamma u_m'$ $(0 < \gamma < 1/2)$, проінтегруємо на $[0, t]$ і додамо ці рівняння. Отримаємо

$$|A_1^{\gamma/2} b_m(t)|^2 + 2\int_0^t |A_1^{(1+\gamma)/2} b_m|^2 d\sigma +$$

$$+ \rho\, |A_2^{\gamma/2} u_m'(t)|^2 + |A_2^{(1+\gamma)/2} u_m(t)|^2 + J(t) =$$

$$= |A_1^{\gamma/2} b_{0m}|^2 + \rho\, |A_2^{\gamma/2} u_{1m}|^2 + |A_2^{(1+\gamma)/2} u_{0m}|^2 + 2\int_0^t \big(f_1, A_1^\gamma b_m\big)\, d\sigma +$$

$$+ 2\int_0^t |A_1^{\gamma/2} b_m|^2 d\sigma + 2\int_0^t \big(A_2^{\gamma/2} f_2, A_2^{\gamma/2} u_m'\big)\, d\sigma, \quad (13)$$

де

$$J(t) = 2 \int_0^t \int_\Omega \operatorname{div}\left[(B_0 + b_m)\, u'_m\right] A_1^\gamma b_m \, dx\, d\sigma \; +$$

$$+ \; \frac{2}{\mu_0} \int_0^t \int_\Omega A_2^{\gamma/2} \left[(B_0 + b_m)\nabla b_m\right] \cdot A_2^{\gamma/2} u'_m \, dx\, d\sigma .$$

Використавши лему 2 і (7), (9), оцінимо $J(t)$:

$$|J(t)| \le c \int_0^t \|(B_0 + b_m)\, u'_m\|_\gamma \|A_1^\gamma b_m\|_{1-\gamma}\, d\sigma \; +$$

$$+ \; c\int_0^t \|(B_0 + b_m)\nabla b_m\|_\gamma \|u'_m\|_\gamma \, d\sigma \; \le$$

$$\le c \int_0^t \left(\|B_0 + b_m\|_1 + \|B_0 + b_m\|_{L^\infty}\right) \|u'_m\|_\gamma \|b_m\|_{1+\gamma}\, d\sigma \; +$$

$$+ \; c \int_0^t \left(\|B_0 + b_m\| + \|B_0 + b_m\|_{L^\infty}\right) \|\nabla b_m\|_\gamma \, \|u'_m\|_\gamma \, d\sigma \; \le$$

$$\le c \int_0^t \left(\|B_0\| + \|B_0\|_{L^\infty} + \|b_m\|\right) \|u'_m\|_\gamma \, \|b_m\|_{1+\gamma}\, d\sigma \; +$$

$$+ \; c \int_0^t \|b_m\| \left(1 + \ln\left(1 + \frac{\|b_m\|_{1+\gamma}}{\|b_m\|}\right)\right)^{1/2} \|u'_m\|_\gamma \|b_m\|_{1+\gamma}\, d\sigma . \qquad (14)$$

Застосувавши нерівність Юнга до (14) ($\varepsilon > 0$ — довільне), дістанемо

$$|J(t)| \le \varepsilon \int_0^t \|b_m\|^2_{1+\gamma}\, d\sigma \; +$$

$$+ \; \frac{c}{\varepsilon} \int_0^t \left(\|B_0\|^2 + \|B_0\|^2_{L^\infty} + \|b_m\|^2\right) \|u'_m\|^2_\gamma \, d\sigma \; + \; J_1(t), \qquad (15)$$

де

$$J_1(t) = \frac{c}{\varepsilon} \int_0^t \|b_m\|^2 \ln\left(1 + \frac{\|b_m\|_{1+\gamma}}{\|b_m\|}\right) \|u'_m\|^2_\gamma \, d\sigma .$$

Для $a \ge 0$, $b \ge 0$ виконується нерівність $ab \le a\ln(1 + a) + e^b$. Візьмемо $a = \|u'_m\|^2_\gamma$, $b = \ln(1 + \|b_m\|_{1+\gamma} / \|b_m\|)$. Тоді одержимо

$$J_1(t) \le \frac{c}{\varepsilon} \int_0^t \|b_m\|^2 \|u'_m\|^2_\gamma \ln\left(1 + \|u'_m\|^2_\gamma\right) d\sigma \; +$$

$$+ \; \frac{c}{\varepsilon} \int_0^t \|b_m\|^2 \, d\sigma \; + \; \frac{c}{\varepsilon} \int_0^t \|b_m\| \, \|b_m\|_{1+\gamma}\, d\sigma . \qquad (16)$$

Із (13)–(16), вибираючи ε достатньо малим і ще раз застосовуючи нерівність Юнга, виводимо

$$\psi(t) = \|b_m(t)\|_\gamma^2 + \int\limits_0^t \|b_m\|_{1+\gamma}^2 d\sigma + \|u_m'(t)\|_\gamma^2 + \|u_m(t)\|_{1+\gamma}^2 \le$$

$$\le d + c\int\limits_0^t \left(g_m + \|b_m\|^2 \ln\left(1 + \|u_m'\|_\gamma^2\right)\right)\psi\, d\sigma, \qquad (17)$$

де

$$d = c\left(\|b_0\|_\gamma^2 + \|u_0\|_{1+\gamma}^2 + \|u_1\|_\gamma^2 + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^T |f_1|^2 d\sigma + \int\limits_0^T \|f_2\|_\gamma d\sigma + \int\limits_0^T \|b_m\|^2 d\sigma\right),$$

$$g_m = \|B_0\|^2 + \|B_0\|_{L^\infty}^2 + \|b_m\|^2 + \|f_2\|_\gamma.$$

Застосувавши до (17) лему Гронуола, дістанемо

$$\psi(t) \le d\exp\left(c\int\limits_0^t \left(g_m + \|b_m\|^2 \ln\left(1 + \|u_m'\|_\gamma^2\right)\right) d\sigma\right). \qquad (18)$$

Із (18) випливає нерівність

$$\ln(1 + \psi(t)) \le \ln(d+1) + c\int\limits_0^t g_m\, d\sigma + c\int\limits_0^t \|b_m\|^2 \ln(1+\psi)\, d\sigma.$$

Звідси, застосувавши лему Гронуола щодо функції $p(t) = \ln(1+\psi(t))$, отримаємо

$$\ln(1 + \psi(t)) \le \left[\ln(d+1) + c\int\limits_0^T g_m\, d\sigma\right]\exp\left(c\int\limits_0^t \|b_m\|^2 d\sigma\right). \qquad (19)$$

Із (12), (19) випливає апріорна оцінка II:

$$\|b_m(t)\|_\gamma^2 + \int\limits_0^t \|b_m\|_{1+\gamma}^2 d\sigma + \|u_m'(t)\|_\gamma^2 + \|u_m(t)\|_{1+\gamma}^2 \le C(T). \qquad (20)$$

Використовуючи теореми про компактність і оцінки (12), (20), переходимо до границі в рівняннях (10), (11) (див. [1]). Таким чином, доведено існування розв'язку задачі 2.

Єдиність розв'язку. Нехай $\{b_1, u_1\}$ і $\{b_2, u_2\}$ — розв'язки задачі 2 і $b = b_1 - b_2$, $u = u_1 - u_2$. Тоді із (5), (6), використовуючи енергетичну рівність [2, с. 308], одержуємо

$$|b(t)|^2 + 2\int\limits_0^t a_1(b,b)\, d\sigma + \rho\mu_0 |u'(t)|^2 + \mu_0 a_2(u(t), u(t)) =$$

$$= 2\int\limits_0^t\int\limits_\Omega b u_1' \cdot \nabla b\, dx\, d\sigma - 2\int\limits_0^t\int\limits_\Omega b\nabla b_1 \cdot u'\, dx\, d\sigma + 2\int\limits_0^t |b|^2 d\sigma. \qquad (21)$$

Використовуючи вкладення $H^\gamma(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ $(p = 2/(1-\gamma))$, $H^{1-\gamma}(\Omega) \subset L^r(\Omega)$ $(r = 2/\gamma)$, інтерполяційну нерівність $\|v\|_{1-\gamma} \le c\|v\|^{1-\gamma}|v|^\gamma$, маємо

$$\left| 2\int_0^t \int_\Omega b u_1' \cdot \nabla b \, dx \, d\sigma \right| \le 2 \int_0^t \|b\|_{L^r} \|u_1'\|_{L^p} \|b\| \, d\sigma \le$$

$$\le c \int_0^t |b|^\gamma \|b\|^{2-\gamma} d\sigma \le \mu_1 \int_0^t \|b\|^2 d\sigma + \frac{c}{\mu_1} \int_0^t |b|^2 d\sigma, \tag{22}$$

$$\left| 2\int_0^t \int_\Omega b \, \nabla b_1 \cdot u' \, dx \, d\sigma \right| \le 2 \int_0^t \|b\|_{L^r} \|b_1\|_{1+\gamma} |u'| \, d\sigma \le$$

$$\le c \int_0^t \|b\| \|b_1\|_{1+\gamma} |u'| \, d\sigma \le \mu_2 \int_0^t \|b\|^2 d\sigma + \frac{c}{\mu_2} \int_0^t \|b_1\|_{1+\gamma}^2 |u'|^2 d\sigma, \tag{23}$$

де μ_1, $\mu_2 > 0$ — довільні сталі. Вибравши μ_1, μ_2 достатньо малими, із (21)–(23) дістанемо

$$|b(t)|^2 + |u'(t)|^2 + \|u(t)\|^2 \le c \int_0^t |b|^2 d\sigma + c \int_0^t \|b_1\|_{1+\gamma}^2 |u'|^2 d\sigma. \tag{24}$$

Застосовуючи до (24) лему Гронуола, виводимо $b \equiv 0$, $u \equiv 0$. Отже, теорема 2 доведена.

1. *Боценюк О. М.* Про розв'язність початково-крайової задачі для системи півлінійних рівнянь магнітопружності // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 9. – С. 1181–1185.
2. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, 1971. – 371 с.
3. *Lions J.-L., Magenes E.* Non-homogeneous boundary value problems and applications. – Berlin: Springer, 1972. – **2**. – 242 p.
4. *Grisvard P.* Caractérisation de quelques espaces d'interpolation // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1967. – **25**. – P. 40–63.
5. *Трибель X.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. – М.: Мир, 1980. – 664 с.
6. *Берг Й., Лефстрем Й.* Интерполяционные пространства. Введение. – М.: Мир, 1980. – 264 с.
7. *Engler H.* An alternative proof of the Brezis–Wainger inequality // Commun. Part. Different. Equat. – 1989. – **14**, № 4. – P. 541–544.
8. *Brezis H., Gallouet T.* Nonlinear Schrödinger evolution equations // J. Nonlinear Anal. – 1980. – **4**, № 4. – P. 677–681.
9. *Brezis H., Wainger S.* A note on limiting cases of Sobolev imbeddings // Commun. Part. Different. Equat. – 1980. – **5**. – P. 773–789.

Одержано 08.06.94