УДК 517.5

Б. В. Винницкий (Дрогобыч. пед. ин-т)

АППРОКСИМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА СИСТЕМ ЭКСПОНЕНТ В ОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

A completeness criteria is obtained for a system of exponentials in the Hardy–Smirnov spaces in unbounded convex polygons. Some properties of incomplete families of exponentials are studied.

Одержано критерій повноти системи експонент у просторах Харді–Смірнова в необмежених опуклих многокутниках і вивчені властивості неповних систем експонент.

Пусть (λ_n) — произвольная последовательность различных комплексных чисел и D — неограниченная выпуклая n-угольная область с границей ∂D, состоящей из полупрямых l_1, l_n и, возможно, отрезков $l_2, l_3, \ldots, l_{n-1}$ (их нумерация соответствует положительному обходу ∂D), $E^p[D]$, $1 \le p < +\infty$, — множество функций f, аналитических в D, для которых

$$\sup \left(\int\limits_{\gamma} |f(z)|^p |dz| \right) < +\infty, \tag{1}$$

где супремум берется по всем отрезкам $\gamma \subset D$ (можно рассматривать только те γ, которые параллельны хотя бы одной из сторон ∂D). Функции f из $E^p[D]$ имеют почти всюду (п.в.) на ∂D угловые предельные значения (их обозначаем через $f(z)$), принадлежащие $L^p(\partial D)$, и равенство

$$\|f\|^p = \int\limits_{\partial D} |f(z)|^p |dz| \tag{2}$$

определяет норму на $E^p[D]$. В случае полуполосы $(D = D_{\sigma,\tau},\ D_{\sigma,\tau} = \{z: |\operatorname{Im} z| < \sigma,\ \operatorname{Re} z < \tau\},\ \tau \in \mathbb{R},\ 0 < \sigma < \infty)$ пространство $E^p[D]$ рассматривалось в [1]. Если D — полуплоскость $(D = \mathbb{C}_+,\ \mathbb{C}_+ = \{z:\ \operatorname{Re} z > 0\})$, то $E^p[D]$ совпадает с пространством Харди H^p в этой полуплоскости. Если же D — угол $(D = D(\beta) = \{z: |\arg z - \pi| < \pi/2\beta\},\ 1 \le \beta < \infty)$, то $E^p[D]$ совпадает с соответствующим пространством, рассмотренным в [2], где получен следующий результат. Пусть $|\arg \lambda_n| < \pi/2\alpha$, $1/\alpha + 1/\beta = 1$, $1 < \beta < +\infty$ и $\varphi_n = \arg \lambda_n$. Тогда для того чтобы система

$$\{\exp(\lambda_n z)\}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

не была полной в $E^2[D(\beta)]$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{|\lambda_n| \le 1} |\lambda_n|^{\alpha} \cos \alpha\varphi_n + \sum_{|\lambda_n| > 1} |\lambda_n|^{-\alpha} \cos \alpha\varphi_n < +\infty. \tag{4}$$

Если $\operatorname{Re} \lambda_n > 0$, то, согласно теореме 5 из [1], для того чтобы система (3) не была полной в $E^2[D_{\sigma,0}]$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\sum_{|\lambda_n| \le 1} \operatorname{Re} \lambda_n < +\infty, \tag{5}$$

$$\overline{\lim_{r \to +\infty}} \left(S(r) - \frac{\sigma}{\pi} \ln r \right) < +\infty, \quad S(r) = \sum_{1 < |\lambda_n| \le r} \left(\frac{1}{|\lambda_n|} - \frac{|\lambda_n|}{r^2} \right) \cos \varphi_n. \quad (6)$$

Целью настоящей статьи является, в частности, получение критерия полноты системы (3) в любом пространстве $E^2[D]$, содержащем хотя бы одну функцию вида $\exp(\lambda_n z)$. Через π/β, $1 \le \beta < +\infty$, обозначим величину угла между l_1 и l_n, а в случае $l_1 \| l_n$ через 2σ — расстояние между l_1 и l_n. Возьмем на l_1 и l_n по одной точке так, чтобы отрезок b_0, который их соединяет, образовал равные углы с l_1 и l_n. Обозначим через $\vec{b}$ единичный вектор, лежащий на серединном перпендикуляре к b_0 и направленный в сторону бесконечной части D, а через φ_*, $0 \le \varphi_* < 2\pi$, — величину угла между положительным направлением действительной оси и вектором $\vec{b}$, измеряемым от этой оси в положительном направлении. Пусть $\Delta_n = \varphi_n - \pi + \varphi_*$, $t_\nu(a) = \{z : |\arg(z-a)| < \nu\}$, $1/\alpha + 1/\beta = 1$ (если $\beta = +\infty$, то считаем $\alpha = 1$). Очевидно, что справедливы следующие два утверждения. Во-первых, для того чтобы пространство $E^2[D]$ содержало хотя бы одну функцию вида $\exp(\lambda_n z)$, $\lambda_n \in \mathbb{C}$, необходимо и достаточно, чтобы: 1) область D лежала в некотором угле раствора $\nu < \pi$, т. е. чтобы D была отличной от полуплоскости и полосы. Во-вторых, если условие 1 выполнено, то для того чтобы $\exp(\lambda_n z) \in E^2[D]$, необходимо и достаточно, чтобы: 2) $|\arg \lambda_n - \pi + \varphi_*| < \pi/2\alpha$. Следовательно, о полноте системы (3) в $E^2[D]$ есть смысл говорить только в случае выполнения условий 1 и 2. Поэтому далее считаем, что они выполнены.

Теорема 1. *Пусть условия* 1 *и* 2 *выполнены. Тогда для того чтобы система* (3) *не была полной в* $E^2[D]$, *необходимо и достаточно, чтобы последовательность* (λ_n) *в случае* $\beta = +\infty$ (*т. е. в случае* $l_1 \| l_n$) *удовлетворяла условию*

$$\sum_{|\lambda_n| \le 1} |\lambda_n| \cos \Delta_n +$$

$$+ \overline{\lim_{r \to \infty}} \left(\left(\sum_{1 < |\lambda_n| \le r} \left(\frac{1}{|\lambda_n|} - \frac{|\lambda_n|}{r^2} \right) \cos \Delta_n \right) - \frac{\sigma}{\pi} \ln r \right) < \infty, \quad (7)$$

а в случае $1 < \beta < +\infty$ — *условию*

$$\sum_{|\lambda_n| \le 1} |\lambda_n|^\alpha \cos \alpha\Delta_n + \sum_{|\lambda_n| > 1} |\lambda_n|^{-\alpha} \cos \alpha\Delta_n < +\infty. \quad (8)$$

Теорема 2. *Пусть условия* 1 *и* 2 *выполнены, но система* (3) *не является полной в* $E^2[D]$. *Тогда если последовательность*

$$P_n(z) = \sum_{k=1}^{m_n} d_{k,n} \exp(\lambda_k z) \quad (9)$$

сходится в $E^2[D]$ *к* F, *то существуют пределы* (*конечные*)

$$\lim_{n \to \infty} d_{k,n} = d_k, \quad k = 1, 2, \ldots . \quad (10)$$

Теорема 3. *Пусть условия* 1 *и* 2 *выполнены, система* (3) *не полна в* $E^2[D]$

и некоторая последовательность (9) *сходится в* $E^2[D]$ *к* F. *Тогда* $F \equiv 0$ *в том и только в том случае, когда все* $d_k = 0$.

Теоремы 1–3 доказываются в пп. 5–7. В пп. 1–4 устанавливаются некоторые вспомогательные факты, а в п. 8 — некоторые следствия теорем 1–3.

1. Пусть

$$J_m(z) = \exp(cz) \prod_{k=1}^{m} (1 + z/k) \exp(-z/k),$$

$$J_m^*(z) = \prod_{k=m+1}^{\infty} (1 + z/k) \exp(-z/k),$$

где c — постоянная Эйлера (через $c_1, c_2, \ldots$ обозначаем положительные постоянные). Очевидно,

$$1/\Gamma(z) = zJ_m(z)\, J_m^*(z). \tag{11}$$

Пусть $\overline{\mathbb{C}}_+ = \{z\colon \operatorname{Re} z \geq 0\}$ и

$$\tau_k(z) = (z + k + 1)\ln(z + k + 1) - (z + k)\ln(z + k) -$$
$$- 1 - \ln(z + k + 1) + \frac{\ln(z + k + 1) - \ln(z + k)}{2},$$

$$R_m(z) = \sum_{k=2}^{m-1} \tau_k(z),$$

где ветвь $\ln z$ в $\mathbb{C}_+$ выбрана обычным образом.

Лемма 1. *Для всех* $z \in \overline{\mathbb{C}}_+$ *и* $m \geq 2$ *выполняется* $|R_m(z)| \leq c_1$.

Действительно, это справедливо, ибо в силу равенства [3, с. 137]

$$\tau_k(z) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (n-1)/(2n(n+1)(z+k)^n)$$

имеем

$$|\tau_k(z)| \leq |z + k|^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} 1/(2(n+2)\, 2^n) \leq 1/k^2.$$

Лемма 2. *Для всех* $z \in \overline{\mathbb{C}}_+$ *и* $m \geq 2$ *выполняется*

$$J_m(z) = \exp\biggl(-\delta_m z - r_m(z) - (z+2)\ln(z+2) +$$
$$+ z\ln\left(1 + \frac{z}{m}\right) + \left(m + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{z}{m}\right)\biggr)\frac{z+1}{\sqrt{z+2}}, \tag{12}$$

где $|r_m(z)| \leq c_2$, $0 < \delta_m \to 0$ *и* $z = r\exp(i\varphi) = x + iy$.

Доказательство. Имеем $R_m(z) = (z+m)\ln(z+m) - (z+2)\ln(z+2) - m + 2 - (\ln(z+m) - \ln(z+2))/2 - \ln((z+3)(z+4)\ldots(z+m))$. Поэтому

$$\ln\prod_{k=1}^{m}\left(1 + \frac{z}{k}\right) = -\ln m! + (z+m)\ln(z+m) - (z+2)\ln(z+2) -$$
$$- m + 2 + \frac{1}{2}\ln(z+m) - \frac{1}{2}\ln(z+2) + \ln(1+z) - R_m(z).$$

Отсюда, учитывая, что

$$m! = (1+\varepsilon_m)\sqrt{2\pi m}\left(\frac{m}{e}\right)^m, \quad 0 < \varepsilon_m \to 0,$$

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} = \ln m + c + \frac{\theta_m}{m}, \quad 0 < \theta_m < 1,$$

получаем

$$\ln J_m(z) = -\delta_m z + z\ln\left(1+\frac{z}{m}\right) + \left(m+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{z}{m}\right) - R_m(z) -$$

$$-(z+2)\ln(z+2) + 2 - \frac{1}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln(z+2) + \ln(1+z) - \ln(1+\varepsilon_m),$$

откуда и следует нужное заключение.

Лемма 3. *Для всех* $z \in \overline{\mathbb{C}}_+$ *и* $m \geq 2$ *выполняется*

$$|J_m^*(z)| \leq c_2 \frac{\exp\left(c_2 x + \pi|y|/2 - x\ln(1+r/m)\right)}{1+r}.$$

Доказательство. Перейдя к пределу в (12) при $m \to \infty$, с учетом леммы 1 при $z \in \mathbb{C}_+$ имеем

$$\left|\frac{1}{\Gamma(z)}\right| \leq c_1|z||z+1| \frac{\exp(-\operatorname{Re}((z+2)\ln(z+2) - x))}{\sqrt{|z+2|}}.$$

Следовательно, учитывая (11), при $m \geq 2$ и $z \in \overline{\mathbb{C}}_+$ получаем

$$|J_m^*(z)| \leq c_2 \frac{\exp\left((1+\delta_m)x - \operatorname{Re}(z\ln(1+z/m))\right)}{|1+z/m|^m} =$$

$$= c_2 \exp\left((1+\delta_m)x - \frac{1}{2}(x+m)\ln\left(1+\frac{2x}{m}+\frac{r^2}{m^2}\right) + y\operatorname{arctg}\frac{y}{x+m}\right). \quad (13)$$

Замечая, что $\operatorname{arctg} t + 1/(1+t) \leq \pi/2$ при $t \geq 0$, и обозначая $\psi(y,m) = y\operatorname{arctg}(y/m) - (m/2)\ln(1+y^2/m^2) - \pi|y|/2 + \ln(1+|y|)$, имеем $\psi'_y(y,m) = \operatorname{arctg}(y/m) - \pi/2 + 1/(1+y) \leq 0$, $m \geq 1$, $y > 0$. Поскольку $\psi(0,m) = 0$ и ψ — четная функция от y, приходим к выводу, что $\psi(y,m) \leq 0$ при всех $y \in \mathbb{R}$ и $m \geq 2$. Далее, полагая

$$\eta(x,y,m) = y\operatorname{arctg}\frac{y}{x+m} - \frac{m}{2}\ln\left(1+\frac{2x}{m}+\frac{x^2+y^2}{m^2}\right) - \frac{\pi|y|}{2} -$$

$$- x + \ln\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right),$$

при всех $x \geq 0$, $y \in \mathbb{R}$ и $m \geq 2$ имеем

$$\frac{\partial\eta}{\partial x} = -\frac{y^2+m(m+x)}{m^2+2mx+r^2} - 1 + \frac{x}{r(1+r)} \leq 0, \quad r = |z|.$$

Поскольку $\eta(0,y,m) = \psi(y,m) \leq 0$, то $\eta(x,y,m) \leq 0$ и, значит, при всех $x \geq 0$, $y \in \mathbb{R}$ и $m \geq 2$ выполняется

$$y\operatorname{arctg}\frac{y}{x+m} - \frac{m}{2}\ln\left(1+\frac{2x}{m}+\frac{r^2}{m^2}\right) \leq \frac{\pi|y|}{2} - \ln(1+r) + x. \quad (14)$$

К тому же,

$$-\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{2x}{m}+\frac{r^2}{m^2}\right) = -\ln\left(1+\frac{r}{m}\right)+\frac{1}{2}\ln\frac{m^2+2mr+r^2}{m^2+2mx+r^2} \le$$
$$\le -\ln\left(1+\frac{r}{m}\right)+\frac{1}{2}\ln 2, \tag{15}$$

ибо $2rm \le m^2+r^2$. Поэтому утверждение леммы 3 получаем из (13)–(15).

2. Пусть $\operatorname{Re}\lambda_n > 0$ и выполнены условия (5), (6). Рассмотрим полукольца $K_n = \{z\colon \operatorname{Re} z > 0,\ 2^n < |z| \le 2^{n+1}\}$. Из (6) следует, что

$$+\infty > \sum_{1<|\lambda_k|\le 2^{n+2}} \frac{\operatorname{Re}\lambda_k}{|\lambda_k|^2}\left(1-\frac{|\lambda_k|^2}{4^{n+2}}\right) \ge \frac{3}{4}\sum_{\lambda_k\in K_n}\frac{\operatorname{Re}\lambda_k}{|\lambda_k|^2}.$$

Поэтому каждое K_n содержит конечное (возможно и пустое) подмножество $U_n = \{\lambda_i\}$, $i = i_1, i_2, \ldots, i_{m_n}$, такое, что

$$\sum_{\lambda_k\in V_n\setminus U_n}\frac{\operatorname{Re}\lambda_k}{|\lambda_k|^2} \le \frac{1}{(n+1)^2}, \quad V_n = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}\cap K_n.$$

Обозначая $U = \bigcup_{n=0}^{\infty}(V_n\setminus U_n)$, имеем

$$\sum_{\lambda_k\in U}\frac{\operatorname{Re}\lambda_k}{|\lambda_k|^2} < +\infty. \tag{16}$$

Пусть $w_k(z) = (1+z/\overline{\lambda}_k)^{-1}(1-z/\lambda_k)\exp(z/\lambda_k + z/\overline{\lambda}_k)$ и

$$e_k(z) = \begin{cases} (z-\lambda_k)/(z+\overline{\lambda}_k), & \text{если } |\lambda_k|\le 1;\\ (1-z/\lambda_k)/(1+z/\overline{\lambda}_k), & \text{если } |\lambda_k|>1,\ \lambda_k\in U;\\ w_k(z), & \text{если } |\lambda_k|>1,\ \lambda_k\notin U.\end{cases}$$

Из условий (5), (6) следует [1, 4], что произведение

$$G_m(z) = \prod_{k=m+1}^{\infty} e_k(z)$$

при каждом $m\in\mathbb{N}$ сходится абсолютно и равномерно на каждом компакте из $\mathbb{C}_+$ и имеет п.в. на мнимой оси угловые предельные значения, равные по модулю 1.

Лемма 4. *Если* $\operatorname{Re}\lambda_n > 0$ *и выполнены условия* (5), (6), *то найдутся последовательность* (s_n), $0 < s_n \nearrow +\infty$, *и постоянная* c_1 *такие, что при всех* $z\in\mathbb{C}_+$ *и* $m\ge 2$ *выполняется*

$$|G_m(z)| \le c_1\exp\left(c_1 x + \frac{2\sigma}{\pi}x\ln\left(1+\frac{r}{s_m}\right)\right). \tag{17}$$

Доказательство. Если

$$\sum_{|\lambda_n|>1}\frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|^2} < +\infty, \tag{18}$$

то $G_m(z)$ лишь множителем вида $\exp(z\alpha_m)$, где $0\le\alpha_m\le\alpha_1$, отличается от произведения Бляшке для $\mathbb{C}_+$, и в этом случае (17) очевидно. Пусть (18) не выполняется и ν_n, $1\le\nu_1<\nu_2<\ldots$, — номера тех членов последовательности (λ_n), которые не принадлежат U и для которых $|\lambda_n| > 1$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \lambda_{\nu_k}}{|\lambda_{\nu_k}|^2} = +\infty \tag{19}$$

и $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_{\nu_k} = \infty$, ибо в каждом U_n содержится конечное число членов последовательности (λ_n). Далее, согласно (6) найдется $b \geq 1$ такое, что при всех $r \geq 1$ имеем

$$S(r) \leq \frac{\sigma}{\pi} \ln(br). \tag{20}$$

Функция S непрерывна на $(1;+\infty)$ и $\lim\limits_{r\to 1+} S(r) = 0$. Считая $S(1) = 0$, положим $r_0 = \max\{r\colon S(r) = 0\}$. Тогда на $[r_0;+\infty)$ функция S возрастает. Пусть S^{-1} — функция, обратная сужению S на $[r_0;+\infty)$ и $S_1(r) = S^{-1}((\sigma/\pi)\ln(16br+1))$. Из (20) следует, что $S_1(r) \geq 16r$ при $r > 0$. Поэтому, учитывая, что при $|\lambda_n| \geq 8r$ выполняется [5] $\ln|w_n(z)| \leq c_1 xr \operatorname{Re}\lambda_n/|\lambda_n|^3$, как и при доказательстве леммы 2 из [1], получаем

$$\sum_{|\lambda_n| > S_1(r)/2} \ln|w_n(z)| \leq c_2 x \sup_{t\geq 1} \left\{ e^{(\pi/\sigma)S(t)} \sum_{|\lambda_n| > t/2} \frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|^3} \right\} < c_3 x. \tag{21}$$

Пусть $p_m = \min\{k\colon \nu_k \geq m+1\}$, $\lambda_k^* = \lambda_{\nu_k}$, $\varphi_k^* = \varphi_{\nu_k}$, $w_k^* = w_{\nu_k}$ и q_m — наименьшее из натуральных чисел j, для которых $|\lambda_j^*| = \min\{|\lambda_k^*|\colon k \geq p_m\}$. Тогда $p_m \to \infty$ и $\lambda_{q_m}^* \to \infty$ при $m \to \infty$. Следовательно, в силу (19)

$$\ln s_m := \frac{17\pi}{81\sigma} \sum_{\substack{|\lambda_k^*| \leq |\lambda_{q_m}^*|, \\ k < p_m}} \frac{\operatorname{Re}\lambda_k^*}{|\lambda_k^*|^2} \to \infty, \quad m \to \infty.$$

Имеем

$$\ln|G_m(z)| \leq \sum_{k=p_m}^{\infty} \ln|w_{\nu_k}(z)| = \sum_{k=p_m}^{\infty} \ln|w_k^*(z)| \leq$$

$$\leq \sum_{\substack{k=p_m, \\ |\lambda_k^*| \leq S_1(r)/2}} \ln|w_k^*(z)| + \sum_{|\lambda_k^*| > S_1(r)/2} \ln|w_k^*(z)|. \tag{22}$$

Если r и m таковы, что $|\lambda_{q_m}^*| > S_1(r)/2$, то и все λ_k^* с $k \geq p_m$ удовлетворяют неравенству $|\lambda_k^*| > S_1(r)/2$ и в этом случае из (21) имеем $|G_m(z)| \leq \exp(c_3 x)$. Если же $|\lambda_{q_m}^*| \leq S_1(r)/2$, то, учитывая, что при $|\lambda_n| \leq S_1(r)/2$ выполняется (см. доказательство леммы 2 из [1])

$$\ln|w_n(z)| \leq 2x\left(\frac{1}{|\lambda_n|} - \frac{|\lambda_n|}{(S_1(r)9/16)^2}\right)\cos\varphi_n,$$

из (21) и (22) получаем

$$\sum_{\substack{k \geq p_m, \\ |\lambda_k^*| \leq S_1(r)/2}} \ln|w_k^*(z)| \leq$$

$$\leq 2x\left(\sum_{|\lambda_k^*|\leq S_1(r)/2} - \sum_{\substack{k<p_m,\\ |\lambda_k^*|\leq|\lambda_{q_m}^*|}}\right)\left(\frac{1}{|\lambda_k^*|} - \frac{|\lambda_k^*|}{(S_1(r)9/16)^2}\right)\cos\varphi_k^* \leq$$

$$\leq 2x\sum_{1<|\lambda_n|\leq S_1(r)/2}\left(\frac{1}{|\lambda_n|} - \frac{|\lambda_n|}{(S_1(r))^2}\right)\cos\varphi_n - \frac{34}{81}x\sum_{\substack{k<p_m,\\ |\lambda_k^*|\leq|\lambda_{q_m}^*|}}\frac{\operatorname{Re}\lambda_k^*}{|\lambda_k^*|^2} \leq$$

$$\leq 2xS(S_1(r)) - \frac{2x\sigma}{\pi}\ln s_m = \frac{2\sigma}{\pi}x(\ln(16br+1) - \ln s_m) \leq$$

$$\leq \frac{2\sigma}{\pi}x\ln(1+r/s_m) + c_4x.$$

Отсюда и из (22), (21) получаем (17).

3. Пусть $D_* = \mathbb{C}\setminus(D\cup\partial D)$, $1\leq p<+\infty$, и $E_*^p[D]$ — пространство функций, аналитических в D_*, для которых выполняется (1), где супремум берется по всем отрезкам γ, лежащим в D_*. Прямая l_j^*, $j=1,2,\ldots,n$, проходящая через сторону l_j, делит плоскость на две полуплоскости $\pi(l_j)$ и $\pi_*(l_j)$, соответственно содержащую D и не содержащую D.

Лемма 5. *Если $F\in E^p[D]$, то F имеет п.в. на ∂D угловые предельные значения, причем $F\in L^p(\partial D)$ и*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{F(t)}{t-z}\,dt = \begin{cases} F(z), & z\in D;\\ 0, & z\in D_*.\end{cases}$$

Лемма 6. *Если $F\in E_*^p[D]$, то F имеет п.в. на ∂D угловые предельные значения, причем $F\in L^p(\partial D)$ и*

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{F(t)}{t-z}\,dt = \begin{cases} F(z), & z\in D_*;\\ 0, & z\in D.\end{cases}$$

Лемма 7. *Если $F\in E^1[D]$, то $\int_{\partial D}F(z)\,dz = 0$.*

Лемма 8. *Если $p>1$, то $F\in E^p[D]$ тогда и только тогда, когда $F = F_1+F_2+\ldots+F_n$, где F_j, $j=1,2,\ldots,n$, принадлежит классам Харди H^p в $\pi_*(l_j)$.*

Лемма 9. *Функция F тогда и только тогда принадлежит $E_*^p[D]$, когда F принадлежит H^p в каждой из полуплоскостей $\pi_*(l_j)$.*

Лемма 10. *Если $h\in L^p(\partial D)$, $p>1$, то для определенных соотношением*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{h(t)}{t-z}\,dt = \begin{cases} F_+(z), & z\in D;\\ F_-(z), & z\in D_*,\end{cases} \tag{23}$$

функций F_+ и F_- имеем $F_+\in E^p[D]$ и *$F_-\in E_*^p[D]$, причем $h(z) = F_+(z)-F_-(z)$ п.в. на ∂D.*

Лемма 11. *Значения функции $h\in L^p(\partial D)$, $p>1$, тогда и только тогда могут п.в. на ∂D совпадать с угловыми предельными значениями некоторой функции $F_+\in E^p[D]$ (функции $F_-\in E_*^p[D]$), когда определяемая равенством (23) функция F_- (функция F_+) тождественно равна нулю.*

Лемма 12. *Если на каждом из пространств $E^2[D]$ и $E^2_*[D]$ определить норму равенством* (2) *с* $p = 2$, *то они превращаются в полные пространства, которые можно рассматривать как замкнутые подпространства пространства* $L^2(\partial D)$.

Лемма 13. *Каждому линейному и непрерывному функционалу* Φ *на* $E^2[D]$ *соответствует единственная функция* $\omega \in E^2_*[D]$ *такая, что значение* $\langle \Phi; F \rangle$ *функционала* Φ *на элементе* $F \in E^2[D]$ *находится по формуле*

$$\langle \Phi; F \rangle = \int_{\partial D} \omega(t) F(t)\, dt, \tag{24}$$

при этом норма функционала Φ *эквивалентна норме функции* ω, *пространство* $(E^2[D])'$, *сопряженное (сильно) к* $E^2[D]$, *можно реализовать как* $E^2_*[D]$ *и пространство* $E^2[D]$ *рефлексивно.*

Доказательства лемм 5–13 почти дословно повторяют соответствующие рассуждения из [1] для полуполосы и поэтому мы их не приводим.

***Замечание* 1.** Если $D = D(\beta)$, $1 < \beta < +\infty$, то $E^2[D]$ совпадает с множеством $E^2_0[D]$ функций F, аналитических в D, для которых

$$\sup_{|\varphi - \pi| < \pi/2\beta} \left\{ \int_0^\infty |F(re^{i\varphi})|^2\, dr \right\} < +\infty,$$

ибо в силу [6, с. 414; 7] лемма 8 справедлива и для $E^2_0[D]$.

4. Пусть D удовлетворяет условию 1 и $h(\theta) = \sup\{\operatorname{Re}(z \exp(i\theta)) : z \in \overline{D}\}$. Поскольку при любом $\varepsilon > 0$ найдется r_0 такое, что для всех $z \in \overline{D}$, $|z| \ge r_0$, выполняется $|\arg z - \varphi_*| < \varepsilon + \pi/2\beta$, то $\operatorname{Re}(z \exp(i\theta) < 0$ при $z \in \overline{D}$, $|z| \ge r_0$ и $|\theta - \pi + \varphi_*| < \pi/2\alpha$ и, значит, $h(\theta) < +\infty$ для таких θ. Пусть, далее, $H^2_h[T_\alpha]$ — пространство функций f, аналитических в $T_\alpha = \{z : |\arg z - \pi + \varphi_*| < \pi/2\alpha\}$, для которых

$$\|f\|^2 := \sup_{|\varphi - \pi + \varphi_*| < \pi/2\alpha} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^2 e^{-2rh(\varphi)}\, dr \right\} < +\infty.$$

Лемма 14. *Если* $f \in H^2_h[T_\alpha]$, *то* f *имеет п.в. на* ∂T_α *угловые предельные значения и* $f(r\exp(i(\pi - \varphi_* \pm \pi/2\alpha)))\exp(-rh(\pi - \varphi_* \pm \pi/2\alpha)) \in L^2(0; \infty)$.

Доказательство. Можем считать, что $0 \in D$ и $\varphi_* = \pi$. Пусть γ_k — вершина D, принадлежащая сторонам l_k и l_{k+1}, $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Тогда [8, с. 53] при $|\varphi| < \pi/2\alpha$ имеем $h(\varphi) = \max_k \{|\gamma_k| \cos(\varphi + \psi_k)\}$, $\psi_k = \arg \gamma_k$. Проведем из начала координат к стороне l_k перпендикулярный луч $\{z : \arg z = \theta_k\}$. Тогда [8, с. 53; 9, с. 655] при $\varphi \in [-\theta_{k+1}; -\theta_k]$ имеем $h(\varphi) = \operatorname{Re}(\gamma_k \exp(i\varphi)) = |\gamma_k| \cos(\varphi + \psi_k)$ и поэтому для таких φ выполняется $rh(\varphi) = \operatorname{Re}(z\gamma_k)$. Следовательно, полагая $\nu_k(z) = f(z)\exp(-z\gamma_k)$, имеем

$$\sup_{\varphi \in (-\theta_k; -\theta_{k+1})} \left\{ \int_0^{+\infty} |\nu_k(z)|^2 |dz| \right\} < +\infty. \tag{25}$$

Отсюда и из [6, с. 415] (см. также [7, 9]) получаем нужное заключение.

Замечание 2. Из (25) получаем также, что $f(re^{-i\theta_k})e^{-h(-\theta_k)r} \in L^2(0;+\infty)$ и [9, с. 666, 670]

$$\|f\|^2 = \max_{k=1,2,\ldots,n} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{-i\theta_k})|^2 \exp(-2r\,h(-\theta_k))\,dr \right\} < +\infty.$$

Лемма 15. *Если* $f \in H_h^2[T_\alpha]$, *то*

$$(\exists\, c_1 < +\infty)\,(\forall\, z = re^{i\varphi} \in T_\alpha):$$

$$|f(z)| \le c_1 \|f\| \frac{\exp(c_1 r)}{(r\cos\alpha(\varphi - \pi + \varphi_*))^{1/2}}.$$

Доказательство. Считаем, что $\varphi_* = \pi$ и $0 \in D$. Пусть $\sigma_2 = \max\{0; \sigma_1\}$, $\sigma_1 = \max\{h(\varphi)\colon \varphi \in [-\pi/2\alpha; \pi/2\alpha]\}$ и $f_1(z) = f(z)\exp(-2(1-i)\sigma_2 z)$. Поскольку $\cos\varphi + \sin\varphi \ge 1$ при $\varphi \in [0;\pi/2]$, то для $\varphi \in [0;\pi/2\alpha]$ имеем

$$\int_0^{+\infty} |f_1(re^{i\varphi})|^2\,dr \le$$

$$\le \|f\|^2 \int_0^{+\infty} \exp(-2\sigma_2 r(2\cos\varphi + 2\sin\varphi - 1))\,dr \le c_1\|f\|^2.$$

Следовательно, при обычном выборе ветвей функций $z^{1/2\alpha}$ и $z^{1/2s}$, $s = 2\alpha/(2\alpha - 1)$, функция $q_1(z) = f_1(z^{1/2\alpha}\exp(i\pi/4\alpha))/z^{1/2s}$ аналитична в $\mathbb{C}_+$ и при $|\theta| < \pi/2$

$$\int_0^{+\infty} |q_1(re^{i\theta})|^2\,dr \le 2\alpha \int_0^{+\infty} \left| f_1\left(t\exp\left(\frac{i\theta}{2\alpha} + \frac{\pi i}{4\alpha}\right)\right)\right|^2 dt \le c_2\|f\|^2.$$

Поэтому [6, 7] q_1 принадлежит классу Харди H^2 в $\mathbb{C}_+$ и, следовательно [10, с. 59], $|q_1(z)| \le c_2\|f\|/(\operatorname{Re} z)^{1/2}$. Значит, $|f_1(\rho e^{i\psi})| \le c_3\|f\|/(\rho\cos(2\alpha\psi - \pi/2))^{1/2} = c_3\|f\|/(\rho\sin 2\alpha\psi)^{1/2}$. Отсюда получаем нужное неравенство для $\varphi \in (\pi/2\alpha; \pi/8\alpha)$. Аналогичные рассуждения, проведенные применительно к функции $q_2(z) = f_2(z^{1/2\alpha}\exp(-i\pi/4\alpha))/z^{1/2s}$, где $f_2(z) = f(z)\exp(-2(1+i)\sigma_2 z)$, убеждают в справедливости этого же неравенства при $\varphi \in (-\pi/2\alpha; -\pi/8\alpha)$. Наконец, взяв достаточно большую постоянную η_0 и рассмотрев функцию $q_3(z) = f_3(z^{1/2\alpha})/z^{1/2s}$, где $f_3(z) = f(z)\exp(-\eta_0 z)$, получим доказываемое неравенство и для $|\varphi| \le \pi/8\alpha$.

Заметим, что из леммы 15 вытекает полнота пространства $H_h^2[T_\alpha]$.

Лемма 16. *Равенство*

$$F_2(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty\exp(i\theta^*)} F_1(w)\exp(-zw)\,dw, \tag{26}$$

где $F_1 \in H_h^2[T_\alpha]$ *и* $|\theta^* - \pi + \varphi_*| < \pi/2\alpha$, *задает топологическое отобра-*

жение пространства $H_h^2[T_\alpha]$ *на* $E_*^p[D]$ *и справедлива двойственная формула*

$$F_1(w) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{\partial D} F_2(z) \exp(zw)\, dz. \tag{27}$$

Доказательство. Считаем, что $\varphi_* = \pi$ и $0 \in D$, и используем обозначения из доказательства леммы 14. Если $F_1 \in H_h^2[T_\alpha]$, то определяемая равенством (26) функция F_2 аналитична в полуплоскости $\{z:\ \operatorname{Re} z > h(0)\}$. На основании леммы 15, как и при доказательстве леммы 15 из [1], убеждаемся, что равенство

$$F_2(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty \exp(-i\theta_k)} F_1(w) \exp(-zw)\, dw$$

дает аналитическое продолжение F_2 в полуплоскость $\pi_*(l_k)$ и в силу замечания 2 на основании теоремы Пэли–Винера [11, с. 20] получаем, что F_2 принадлежит классу Харди H^2 в этой полуплоскости, причем

$$\left(\int_{l_k^*} |F_2(z)|^2 |dz| \right)^{1/2} = \| F_1(r \exp(-i\theta_k) \exp(-rh(-\theta_k)) \|_{L^2(0;+\infty)}.$$

Следовательно, по лемме 9 $F_2 \in E_*^2[D]$ и

$$\|F_2\|_{E_*^2[D]} \le n \|F_1\|_{H_h^2[T_\alpha]}. \tag{28}$$

Пусть теперь $F_2 \in E_*^2[D]$ и обозначим правую часть (27) через F_3. Функцию F_3 можно представить в виде $F_3 = F_{3,1} + F_{3,n} + F_{3,0}$, где $F_{3,1}$, $F_{3,n}$ и $F_{3,0}$ равны соответственно интегралу от $F_1(w)\exp(zw)$, взятому по l_1, l_n и $\partial D \setminus \{l_1 \cup l_n\}$. Очевидно,

$$F_{3,1}(w) = -\frac{1}{i\sqrt{2\pi}} e^{w\gamma_1 + i\nu_0} \int_0^{+\infty} F_2(\rho e^{i\nu_0} + \gamma_1) \exp(w\rho e^{i\nu_0})\, d\rho =$$

$$= e^{w\gamma_1} P_1(w),$$

где $\nu_0 = \pi + \pi/2\beta$, и по теореме Пэли–Винера P_1 принадлежит классу Харди H^2 в полуплоскости $\pi_*(l_1)$, ибо $F_2(\rho \exp(i\nu_0) + \gamma_1) \in L^2(0;+\infty)$. Следовательно [7, 6],

$$\sup_{|\varphi| < \pi/2\alpha} \left\{ \int_0^{+\infty} |P_1(re^{i\varphi})|^2\, dr \right\} < +\infty.$$

Но (см. доказательство леммы 14) $\operatorname{Re}(w\gamma_1) \le |w| h(\varphi)$ при $|\varphi| \le \pi/2\alpha$. Поэтому получаем, что $F_{3,1} \in H_h^2[T_\alpha]$. Аналогично убеждаемся, что $F_{3,n}(w) = P_3(w)\exp(w\gamma_{n-1})$, где P_3 принадлежит H^2 в $\pi_*(l_n)$ и, следовательно, $F_{3,n} \in H_h^2[T_\alpha]$. Наконец, имеем

$$F_{3,0}(w) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{\partial D_1} F_{2,1}(z) \exp(zw)\, dz,$$

где D_1 является выпуклым $(n-1)$-угольником, вершины которого лежат в

γ_j, $j = 1, 2, \dots, n-1$, (т. е. в конечных вершинах D), а $F_{2,1}(z) = 0$ на отрезке $[\gamma_1; \gamma_{n-1}]$ и $F_{2,1} = F_2$ на $\partial D_1 \setminus [\gamma_1; \gamma_{n-1}]$. По теореме Б. Левина [12, с. 502] (см. также [5, с. 686])

$$\sup_{|\varphi| \le \pi} \cdot \left\{ \int_0^{+\infty} |F_{3,0}(\rho e^{i\varphi})|^2 e^{-2rk(-\varphi)} dr \right\} < +\infty,$$

где $k(\varphi)$ — опорная функция D_1. Но $k(-\varphi) = h(\varphi)$ при $|\varphi| \le \pi/2\alpha$. Следовательно, $F_{3,0} \in H_h^2[T_\alpha]$ и, значит, $F_3 \in H_h^2[T_\alpha]$. Покажем, что $F_3 = F_1$, если F_2 определена равенством (26). Функция $F_1(u) e^{-uh(0)}$ принадлежит $L^2(0; +\infty)$ и по теореме Пэли–Винера F_2 принадлежит H^2 в полуплоскости $\{z: \operatorname{Re} z > h(0)\}$. Значит,

$$F_1(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{h(0)-i\infty}^{h(0)+i\infty} F_2(z) \exp(zu)\, dz, \quad u > 0,$$

где интеграл понимается в L^2-смысле. Отсюда формальным деформированием контура получаем (26), а обоснование выглядит так. Функцию F_1 можно для п.в. $u > 0$ представить в виде [8, с. 173, 174]

$$\exp(-uh(0)) F_1(u) = \lim_{v \to 0+} F_+(u + iv) + \lim_{v \to 0-} F_-(u + iv),$$

где принадлежащие классу Харди H^2 соответственно в верхней и нижней полуплоскостях функции F_+ и F_- определяются равенствами

$$F_+(w) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_0^{+i\infty} F_2(z + h(0))\, e^{zw}\, dz,$$

$$F_-(w) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{-i\infty}^{0} F_2(z + h(0))\, e^{zw}\, dz.$$

Используя лемму 14 из [1], убеждаемся, что аналитические продолжения функций $F_+(w)\exp(wh(0))$ и $F_-(w)\exp(wh(0))$ в $\mathbb{C}_+$ задаются равенствами

$$F_+(w) e^{wh(0)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, i} \int_{\partial D_+} F_2(z)\, e^{zw}\, dz,$$

$$F_-(w) e^{wh(0)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, i} \int_{\partial D_-} F_2(z)\, e^{zw}\, dz,$$

и поэтому $F_+(w)\exp(wh(0)) + F_-(w)\exp(wh(0)) = F_3(w)$, где ∂D_+ и ∂D_- — части ∂D, лежащие соответственно в верхней и нижней полуплоскостях. Таким образом, $F_3 = F_1$. Следовательно, равенство (26) задает взаимно однозначное отображение $H_h^2[T_\alpha]$ на $E_*^2[D]$. Из (28) следует, что это отображение непрерывно и по теореме Банаха обратное отображение также непрерывно.

5. Докажем теорему 1. Если система (3) полна в $E^2[D]$, то она полна и в $E^2[D + a]$ при любом $a \in \mathbb{C}$ (это вытекает непосредственно из определения полноты). Также очевидно, что система (3) полна в $E^2[D]$ тогда и только тогда, когда в $E^2[D\exp(i(\pi - \varphi_*))]$ полна система $\{\exp(\lambda_n^* z)\}$, $\lambda_n^* = \lambda_n \exp(-i(\pi - \varphi_*)$. Поэтому можно считать, что $\varphi_* = \pi$ и точка A, делящая отрезок b_0 пополам, совпадает с началом координат. Из леммы 13 следует также, что если неограниченная выпуклая m-угольная область D_1 содержится в D и система (3) полна в $E^2[D]$, то она полна и в $E^2[D_1]$. Пусть сначала $l_1 \| l_n$. Тогда D содержится в некоторой полуполосе D_{σ,τ_1} и содержит некоторую полуполосу D_{σ,τ_2}. Но система (3) не полна в $E^2[D_{\sigma,\tau}]$ тогда и только тогда, когда выполняются условия (5) и (6), а они в рассматриваемом случае эквивалентны условию (7). В случае $1 < \beta < +\infty$ поступаем аналогично, только вместо полуполос используем углы $D_\beta(a) = \{z : |\arg(z-a)| < < \pi/2\beta\}$ и вместо результата из [1] — уже цитированную теорему из [2].

***Замечание* 3.** Теорему 1 в обоих случаях можно получить единым путем, не используя приведенные в начале статьи результаты из [1, 2]. Опишем кратко схему доказательства, считая, что $\varphi_* = \pi$ и точка A совпадает с началом координат. Согласно леммам 16 и 13 система (3) не полна в $E^2[D]$ тогда и только тогда, когда найдется такая функция $P \in H_h^2[T_\alpha]$, что $P \not\equiv 0$ и $P(\lambda_n) = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Поэтому, если система (3) не полна в $E^2[D]$, то, применяя к аналитической в $\mathbb{C}_+$ функции $f_1(z) = P(z^{1/\alpha})$ обобщенные формулы Неванлинны и Карлемана [4, с. 22–27] (в формулировках, сходных к указанным в [1] при доказательстве теоремы 4), получаем необходимость условий (7) и (8). Обратно, если условия (7) и (8) выполнены, то полагая соответственно $P(z) = = (1+z)^{-2}\exp(-c_1 z - (2\sigma/\pi) z \ln z) Q(z)$, $P(z) = (1+z)^{-2}\eta(z)$, где

$$\eta(z) = \left(\prod_{|\lambda_n|\le 1} \frac{z^\alpha - \lambda_n^\alpha}{z^\alpha + \lambda_n^\alpha}\right)\left(\prod_{|\lambda_n|>1} \frac{1-(z/\lambda_n)^\alpha}{1+(z/\lambda_n)^\alpha}\right),$$

$$Q(z) = \left(\prod_{|\lambda_n|\le 1} \frac{z-\lambda_n}{z+\bar{\lambda}_n}\right)\left(\prod_{|\lambda_n|>1} w_n(z)\right), \tag{29}$$

имеем $P_n(\lambda_n) = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$, $P \not\equiv 0$ и $P \in H_h^2[T_\alpha]$.

***Замечание* 4.** Согласно леммам 16 и 13 система $\{z^k \exp(\lambda_n z)\}$, $n \in \mathbb{N}$, $m_n \in \mathbb{N}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, m_n - 1$, не полна в $E^2[D]$ тогда и только тогда, когда найдется функция $P \in H_h^2[T_\alpha]$, $P \not\equiv 0$, имеющая в каждой точке λ_m нуль порядка $\nu \ge m_n$. Поэтому теорема 1 допускает естественное обобщение на такие системы. Например, если $\operatorname{Re}\lambda_n > 0$, то эта система не полна в $E^2[D_{\sigma,0}]$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{|\lambda_n|\le 1} m_n \operatorname{Re}\lambda_n +$$

$$+ \varlimsup_{r\to\infty}\left(\sum_{1<|\lambda_n|\le r}\left(m_n\left(\frac{1}{|\lambda_n|} - \frac{|\lambda_n|}{r^2}\right)\cos\varphi_n\right) - \frac{\sigma}{\pi}\ln r\right) < \infty.$$

6. Докажем теорему 2. Будем считать, что $\varphi_* = \pi$ и точка A совпадает с началом координат. Пусть сначала $\beta = +\infty$. Тогда (7) эквивалентна условиям (5), (6), а из последних следует, что (см. [1], а также лемму 4)

$$|Q(z)| \le c_1 \exp(c_1 x + (2\sigma/\pi) x \ln r), \quad z \in \mathbb{C}_+, \tag{30}$$

причем если из последовательности (λ_n) выбросить один член, то оценка (30) также будет иметь место и $c_1 > 0$ можно подобрать независящим от выброшенного члена. Поэтому, полагая $Q_\nu(z) = Q(z)/(z-\lambda_\nu)$, имеем

$$|Q_\nu(z)| \le c_1|z+\bar{\lambda}_n|^{-1}\exp(c_1x + (2\sigma/\pi)x\ln r + 2x\operatorname{Re}\lambda_\nu/|\lambda_\nu|^2) \le$$
$$\le c_2\exp(c_2x + (2\sigma/\pi)x\ln r)/|z+\bar{\lambda}_\nu|, \tag{31}$$

где c_2 не зависит от $\nu \in \mathbb{N}$ и $z \in \mathbb{C}_+$. В нашем случае $h\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \sigma$. Следовательно, можно подобрать $c_3 > 0$ столь большим, чтобы $\sigma|\sin\varphi| - c_3\cos\varphi \le$ $\le h(\varphi)$, $|\varphi| \le \pi/2$. Поэтому для функции $f_\nu(z) = Q_\nu(z)\exp(-(c_2+c_3)z -$ $-(2\sigma/\pi)z\ln z)$ имеем $|f_\nu(z)| \le c_2\exp(rh(\varphi))/|z+\bar{\lambda}_n|$. Значит, $f_\nu \in$ $\in H_h^2[T_\alpha]$. Пусть

$$\gamma_\nu(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} f_\nu(w)\exp(-zw)\,dw.$$

Согласно лемме 16

$$f_\nu(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,i}\int_{\partial D}\gamma_\nu(z)\exp(zw)\,dz.$$

Следовательно,

$$\int_{\partial D} P_n(z)\gamma_\nu(z)\,dz = \sum_{k=1}^{m_n} d_{k,n}\int_{\partial D}\gamma_\nu(z)e^{\lambda_k z}dz = d_{\nu,n}f_\nu(\lambda_\nu)\sqrt{2\pi}\,i,$$

ибо $f_\nu(\lambda_k) = 0$ при $\nu \ne k$. Поэтому

$$d_{\nu,n} = \frac{1}{if_\nu(\lambda_\nu)\sqrt{2\pi}}\int_{\partial D} P_n(z)\gamma_\nu(z)\,dz. \tag{32}$$

Если последовательность P_n сходится в $E^2[D]$ к F, то она также слабо сходится. Следовательно, из (32) получаем

$$d_\nu = \frac{1}{if_\nu(\lambda_\nu)\sqrt{2\pi}}\int_{\partial D} F(z)\gamma_\nu(z)\,dz, \quad \nu \in \mathbb{N}, \tag{33}$$

т. е. в случае $\beta = +\infty$ теорема 2 доказана. В случае $1 < \beta < +\infty$ теорема 2 доказывается аналогично. Отметим лишь, что теперь нужно положить $f_\nu(z) =$ $= \exp(-c_1z)\eta(z)/(z-\lambda_\nu)$.

7. Докажем теорему 3. Считаем, что $\varphi_* = \pi$ и точка A совпадает с началом координат. Из (33) следует, что если $F \equiv 0$, то все $d_\nu = 0$. Покажем, что справедливо и обратное утверждение. Пусть сначала $\beta = +\infty$ и $k_m = [s_m\pi/2\sigma]$, а $\eta_m(z) = G_m(z)J_{k_m}^*(2\sigma z/\pi)$, где $[x]$ — целая часть числа $x > 0$, G_m и J_m^* — функции из лемм 3 и 4. Из этих лемм следует, что для всех $m \ge 2$ и $z \in \mathbb{C}_+$ выполняется

$$|\eta_m(z)| \le c_1\exp(c_1x + \sigma|y|)/(1+r). \tag{34}$$

Далее, если $D = D_{\sigma,\tau}$, то $h(\theta) = \sigma|\sin\theta| + \tau\cos\theta$. Следовательно, из (34) получаем $\eta_m \in H_h^2[T_\alpha]$ при $D = D_{\sigma,c_1}$. Пусть B — произведение Бляшке для $\mathbb{C}_+$, B_m — его частичное произведение, а r_m — соответствующий остаток. В [13, с. 152] показано, что

$$\left\| \frac{B(z) - B_m(z)}{1+z} \right\|_{H^2(\mathbb{C}_+)} \to 0, \quad m \to \infty.$$

Отсюда следует, что

$$\left\| \frac{r_m(z) - 1}{1+z} \right\|_{H^2(\mathbb{C}_+)} \to 0, \quad m \to \infty.$$

Как известно [6, 7], в $H^2(\mathbb{C}_+)$ кроме стандартной нормы можно ввести эквивалентную ей

$$\|f\|^*_{H^2(\mathbb{C}_+)} = \sup_{|\varphi| < \pi/2} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^2 \, dr \right\}^{1/2}$$

Поэтому

$$\left\| \frac{r_m(z) - 1}{1+z} \right\|^*_{H^2(\mathbb{C}_+)} \to 0, \quad m \to \infty.$$

Следовательно, при любом $a \in \mathbb{R}_+$

$$\sup_{|\varphi| < \pi/2} \int_0^a |r_m(\rho e^{i\varphi}) - 1|^2 \, d\rho \to 0, \quad m \to \infty. \tag{35}$$

Покажем, что $\eta_m \to 1$ в $H_h^2[T_\alpha]$, если $D = D_{\sigma, c_1}$, где $c_1 > 0$ — то же, что и в (34). Для любого $a > 0$ из (34) получаем

$$\|\eta_m - 1\|^2_{H_h^2[T_\alpha]} \le \sup_{|\varphi| < \pi/2} \left(c_2 \int_0^a |\eta_m(\rho e^{i\varphi}) - 1|^2 \, d\rho + c_2 \int_a^{+\infty} \frac{dr}{(1+r)^2} \right). \tag{36}$$

Функцию η_m можно представить в виде $\eta_m = r_m g_m$, где r_m — остаток произведения Бляшке для $\mathbb{C}_+$, а g_m — остаток некоторого произведения, равномерно сходящегося в каждом полукруге $K_a = \{z : |z| \le a, \operatorname{Re} z \ge 0\}$, $a > 0$, последовательность нулей которого имеет единственную предельную точку (в случае ее существования) на ∞. Поэтому $q_m \to 1$ при $m \to \infty$ равномерно в каждом K_a, $a > 0$. Далее, замечая, что $\eta_m - 1 = (r_m - 1) g_m + g_m - 1$, получаем

$$\int_0^a |\eta_m(\rho e^{i\varphi}) - 1|^2 \, d\rho \le$$

$$\le 2 \int_0^a \left(|r_m(\rho e^{i\varphi}) - 1|^2 \, |g_m(\rho e^{i\varphi})|^2 + |g_m(\rho e^{i\varphi}) - 1|^2 \right) d\rho.$$

Последнее неравенство вместе с (36) дает возможность заключить, что действительно $\eta_m \to 1$ в $H_h^2[T_\alpha; D_{\sigma, c_1}]$ и тем более в $H_h^2[T_\alpha; D + \tau]$ для любого $\tau \ge c_1$ (вместо $H_h^2[T_\alpha]$ используем обозначение $H_h^2[T_\alpha; D]$). Поэтому если положить

$$\kappa_m(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \eta_m(w) \exp(-zw) \, dw,$$

то по лемме 16 имеем $\kappa_m(z)\sqrt{2\pi} \to 1/z$ в $E_*^2[D + \tau]$, $\tau > c_1$. Далее, если последовательность (9) сходится в $E^2[D]$ к F, то последовательность $P_{n,\tau}(w) = P_n(w-\tau)$ сходится в $E^2[D+\tau]$ к $F(w-\tau)$. Значит, учитывая леммы 16 и 13, при $j \ge 2$ и $\tau \ge c_1$ имеем

$$\langle \kappa_j, F(w-\tau)\rangle = \left\langle \kappa_j, \lim_{n\to\infty} P_{n,\tau}\right\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \kappa_j, P_{n,\tau}\rangle =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{\partial(D+\tau)} \kappa_j(w)\, P_{n,\tau}(w)\, dw =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m_n} d_{k,n} e^{-\lambda_k \tau} \int_{\partial(D+\tau)} \kappa_j(w)\, e^{w\lambda_k}\, dw =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m_n} d_{k,n} \exp(-\lambda_k \tau)\, \eta_j(\lambda_k)\, i\sqrt{2\pi}\,.$$

Но $\eta_j(\lambda_k) = 0$ при $k > j$. Следовательно,

$$\langle \kappa_j, F(w-\tau)\rangle = i\sqrt{2\pi} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{q_j} d_{k,n}\, \eta_j(\lambda_k) \exp(-\tau\lambda_k) =$$

$$= i\sqrt{2\pi} \sum_{k=1}^{q_j} d_k \exp(-\tau\lambda_k)\, \eta_j(\lambda_k), \tag{37}$$

где $q_j \le j$. Далее, согласно лемме 13

$$\langle \kappa_j, F(w-\tau)\rangle = \int_{\partial(D+\tau)} \kappa_j(w)\, F(w-\tau)\, dw\,.$$

Поскольку $\kappa_j(w)\sqrt{2\pi} \to 1/w$ в $E_*^2[D-\tau]$, то, учитывая леммы 13 и 5, имеем

$$\lim_{j\to\infty} \langle \kappa_j, F(w-\tau)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\partial(D+\tau)} \frac{F(w-\tau)}{w}\, dw = F(-\tau)\, i\sqrt{2\pi}\,.$$

Следовательно, из (37) находим

$$F(-\tau) = \lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{q_j} d_k\, \eta_j(\lambda_k) \exp(-\tau\lambda_k),$$

откуда следует, что если $d_k = 0$, то $F \equiv 0$, и поэтому теорема 3 в случае $\beta = +\infty$ доказана. Если $1 < \beta < +\infty$, то доказательство проводится аналогично. Отметим лишь, что теперь нужно положить

$$\eta_m(z) = J_m^*(z) \prod_{\substack{|\lambda_k|\le 1,\\ k>m}} \frac{z^\alpha - \lambda_k^\alpha}{z^\alpha + \overline{\lambda}_k^\alpha} \prod_{\substack{|\lambda_k|>1,\\ k>m}} \frac{1-(z/\lambda_k)^\alpha}{1+(z/\overline{\lambda}_k)^\alpha}\,.$$

8. Обозначим $B_\sigma = \{z : |\operatorname{Im} z| < \sigma\}$, $0 < \sigma < +\infty$, и отметим одно следствие теорем 2 и 3.

Теорема 4. *Пусть* $\operatorname{Re}\lambda_n > 0$ *при всех* $n \in \mathbb{N}$, *система* (3) *не полна в* $E^2[D_{\sigma,0}]$ *и некоторая последовательность вида* (9) *сходится в* $E^2[D_{\sigma,\tau}]$ *при любом* $\tau \in \mathbb{R}$ *к* F. *Тогда если* F *ограничена в* B_σ, *то* $F \equiv 0$.

Действительно, для каждого $x \in \mathbb{R}$ последовательность $Q_{n,x}(w) = P_n(w + x)$ должна сходиться в $E^2[D_{\sigma,0}]$ к $F(w+x)$. Поэтому из (33) имеем

$$d_\nu e^{\lambda_\nu x} = \frac{1}{i f_\nu(\lambda_\nu)\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\partial D_{\sigma,0}} F(w+x)\,\gamma_\nu(w)\,dw, \quad \eta_\nu \in E_*^2[D_{\sigma,0}]. \tag{38}$$

Если же $|F(w)| \le c_2$ при $w \in B_\sigma$, то отсюда для $x > 0$ получаем

$$|d_\nu| e^{\lambda_\nu x} \le \alpha_\nu \left(\int\limits_{\partial D_{\sigma,0}} |F(w+x)|^2 |dw| \right)^{1/2} =$$

$$= \alpha_\nu \left(\int\limits_{-\infty}^{0} |F(t+i\sigma+x)|^2\,dt + \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} |F(it+x)|^2\,dt + \int\limits_{-\infty}^{0} |F(t-i\sigma+x)|^2\,dt \right)^{1/2} \le$$

$$\le \alpha_\nu \left(c_3 + \int\limits_{0}^{x} |F(-i\sigma+t)|^2\,dt + \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} |F(it+x)|^2\,dt + \int\limits_{0}^{x} |F(i\sigma+t)|^2\,dt \right)^{1/2} \le$$

$$\le \alpha_\nu (c_4 + 2c_2^2 x)^{1/2}, \quad \alpha_\nu = \frac{\|\gamma_\nu\|}{|f_\nu(\lambda_\nu)\sqrt{2\pi}|}.$$

Поэтому $|d_\nu| \le \alpha_\nu (c_5 + c_5 x)^{1/2} \exp(-\operatorname{Re}\lambda_\nu x)$ и, устремляя x к $+\infty$, получаем, что все $d_\nu = 0$. Следовательно, по теореме 3 $F \equiv 0$.

Заметим, что для других пространств аналитических функций теоремы, близкие к теоремам 2 и 3, известны [14].

Отметим также, что если $\sigma = 0$ и $\operatorname{Im}\lambda_n = 0$, то [1] условие (6) эквивалентно следующему условию:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < +\infty. \tag{39}$$

Поэтому теорему 4 можно рассматривать как обобщение следующего предложения Л. Шварца [15]: если $\lambda_n > 0$ и выполняется (39), то сходящийся в $\mathbb{C}$ ряд Дирихле $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \exp(\lambda_n z)$ может быть ограниченным на действительной оси только в случае $F \equiv 0$.

1. *Винницкий Б. В.* О нулях функций, аналитических в полуплоскости, и полноте систем экспонент // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 5. – С. 484–500.
2. *Джрбашян М. М., Мартиросян В. М.* Теоремы типа Винера–Пэли и Мюнца–Саса // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1977. – **44**, № 1. – С. 868–894.
3. *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей. – М.: Гостехтеоретиздат, 1952. – 479 с.
4. *Говоров Н. В.* Краевая задача Римана с бесконечным индексом. – М.: Наука, 1986. – 240 с.
5. *Винницкий Б. В., Шаповаловский А. В.* О полноте систем экспонент с весом // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 12. – С. 1695–1700.
6. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. – М.: Наука, 1966. – 671 с.
7. *Седлецкий А. М.* Эквивалентное определение пространств H^p в полуплоскости и некоторые предложения // Мат. сб. – 1975. – **96**, № 1. – С. 75–82.
8. *Леонтьев А. Ф.* Целые функции. Ряды экспонент. – М.: Наука, 1983. – 176 с.
9. *Левин Б. Я., Любарский Ю. И.* Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1975. – **39**, № 3. – С. 657–702.
10. *Гарнет Дж.* Ограниченные аналитические функции. – М.: Мир, 1984. – 469 с.
11. *Винер Н., Пэли Р.* Преобразование Фурье в комплексной области. – М.: Наука, 1964. – 267 с.
12. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. – М.: Гостехтеоретиздат, 1956. – 560 с.
13. *Гофман К.* Банаховы пространства аналитических функций. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – 311 с.
14. *Леонтьев А. Ф.* Последовательности полиномов из экспонент. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
15. *Schwartz L.* Etude des sommes d'exponentiellees réeles. – Paris: Herman, 1943. – 151 p.

Получено 08.07.94