УДК 517.946+511.2

В. С. Ільків (Львів. наук.-досл. радіотехн. ін-т),
Б. Й. Пташник (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

ЗОБРАЖЕННЯ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛОКАЛЬНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ*

A time nonlocal boundary-value problem for a system of partial differential equations with constant coefficients is studied. On the basis of the metric approach, we prove correctness of the problem in a scale of Sobolev spaces of functions, which are periodic in spatial variables. An explicit representation of a solution is constructed by using the matrix calculus.

Досліджується нелокальна за часовою змінною крайова задача для системи диференціальних рівнянь з частинними похідними і сталими коефіцієнтами. На базі метричного підходу доведена коректність задачі в шкалі просторів Соболєва періодичних за просторовими змінними функцій, а також побудоване явне зображення розв'язку з використанням матричного числення.

Крайові задачі з нелокальними за виділеною змінною умовами, що узагальнюють умови періодичності, для систем диференціальних рівнянь з частинними похідними вивчались багатьма авторами (див., наприклад, [1–8]). В роботах [1–5] розглядаються регулярні задачі, не пов'язані з проблемою малих знаменників. Загальні випадки задач, що допускають появу малих знаменників, досліджувались у роботах [6–8]. На основі метричного підходу отримано оцінки знизу малих знаменників та доведено коректність розглядуваних задач в шкалах просторів Соболєва.

Дана робота є продовженням та розвитком роботи [7].

1. Простори функцій і операторів. Розглядаємо функції змінних $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ і змінних x і t. Вважаємо, що x належить m-вимірному тору Ω_m, тобто функції 2π-періодичні за просторовими змінними x; змінна t належить деякому відрізку $[0, T]$.

Нехай H_q, $q \in \mathbb{R}$, позначає простір періодичних функцій

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \psi(k) e^{ikx},$$

одержаний поповненням за нормою

$$\|\varphi\|_q^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \tilde{k}^{2q} |\psi(k)|^2$$

множини тригонометричних відносно x поліномів, де $\mathbb{Z}^m$ складається з m-вимірних цілочислових векторів $k = (k_1, \ldots, k_m)$, $kx = k_1x_1 + \ldots + k_mx_m$, $\tilde{k}^2 = 1 + k_1^2 + \ldots + k_m^2$, $\psi(k)$ — коефіцієнти Фур'є функції $\varphi(x)$.

Через $C^n([0, T]; H_q)$ позначимо простір функцій $u(t, x)$ таких, що $(\partial/\partial t)^j u$, $j = 0, 1, \ldots, n$, для кожного $t \in [0, T]$ належить простору H_{q-j} і неперервна за t в нормі цього простору. Норма в просторі $C^n([0, T]; H_q)$ задається формулою

$$\|u\|_{u,q}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{j=0}^{n} \|(\partial/\partial t)^2 u\|_{q-j}^2 \, dt.$$

---

* Виконана при фінансовій підтримці Фонду фундаментальних досліджень при Державному комітеті України з питань науки і технологій.

Якщо $\varphi(x)$ — вектор-функція, компоненти якої належать простору H_q, то будемо говорити, що $\varphi(x)$ належить простору $\overline{H}_q$. Норма в цьому просторі задається тією ж формулою, що і в просторі H_q; при цьому $|\psi(k)|^2$ позначає суму квадратів модулів компонент вектора $\psi(k)$.

Аналогічно визначаємо простір $\overline{C}^n([0,T]; H_q)$ для вектор-функції $u(t,x)$.

Розглянемо довільну послідовність комплексних чисел $F(k)$, $k \in \mathbb{Z}^m$. Вона породжує псевдодиференціальний оператор (п.д.о.) $F(D)$, $D = (D_1, \ldots, D_m)$, $D_j = \partial/(i\partial x_j)$, $j = 1, \ldots, m$, що діє на функцію $\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \psi(k) e^{ikx}$ за формулою $F(D)\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} F(k)\psi(k) e^{ikx}$. Коефіцієнти Фур'є $\psi(k)$ функції $\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \psi(k) e^{ikx}$ породжують оператор $\psi(D)$; таким чином, кожній функції з H_q відповідає п.д.о. $\psi(D)$ і $\varphi(x) = \psi(D)\delta(x)$, де $\delta(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} e^{ikx}$ — дельта-функція Дірака [9].

Аналогічно послідовність функцій $F(t,k)$, $t \in [0,T]$, породжує оператор $F(t,D)$, функція $v(t,x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} V(t,k) e^{ikx} \in \overline{C}^n([0,T]; H_q)$, $q \in \mathbb{R}$, — оператор-функцію $V(t,D)$, $v(t,x) = V(t,D)\delta(x)$.

Очевидно, що $\delta(x) \in H_q$ при $q < -m/2$.

Нехай $y = (y_1, \ldots, y_m)$ — допоміжні дійсні змінні, $\partial/\partial y = (\partial/\partial y_1, \ldots, \partial/\partial y_m)$ — оператор диференціювання за цими змінними. Тоді справедлива наступна лема.

Лема 1. *Для довільної функції $F(y)$, аналітичної в точках $y = k \in \mathbb{Z}^m$, і функції $\varphi(x) \in H_q$, $q \in \mathbb{R}$, виконується рівність*

$$F(D)\varphi(x) = \varphi(x - i\partial/\partial y) F(y)|_{y=0}.$$

Доведення. Оскільки $e^{k\partial/\partial y} F(y) = F(y+k)$, де $k\partial/\partial y = k_1\partial/\partial y_1 + \ldots + k_m\partial/\partial y_m$, то

$$F(D)\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \psi(k) e^{ikx} F(k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \psi(k) e^{ikx} e^{k\partial/\partial y} F(y)\Big|_{y=0} =$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \psi(k) e^{ik(x - i\partial/\partial y)} F(y)\Big|_{y=0} = \varphi(x - i\partial/\partial y) F(y)|_{y=0}.$$

Лема доведена.

Очевидно, що $\varphi(x) = \delta(x - i\partial/\partial y)\psi(y)|_{y=0}$.

З леми випливає, що $V(t,D)\varphi(x) = \varphi(x - i\partial/\partial y) V(t,y)|_{y=0}$, де $V(t,y)$ — залежна від параметра t і аналітична в точках $y = k \in \mathbb{Z}^m$ функція, $\varphi(x) \in H_q$, $q \in \mathbb{R}$.

2. Постановка задачі. Розглянемо систему диференціальних рівнянь з частинними похідними і сталими комплексними коефіцієнтами:

$$L(\partial/\partial t, D) u(t,x) = \sum_{|s| \le n} A_s (\partial/\partial t)^{s_0} D_1^{s_1} \ldots D_m^{s_m} u = 0, \tag{1}$$

де A_s — квадратні розміру p матриці з комплексними елементами, $A_{n,0,\ldots,0} = I_p$ — одинична матриця, $u = u(t,x) = \operatorname{col}(u_1(t,x), \ldots, u_p(t,x))$ — вектор розміру p; $s = (s_0, s_1, \ldots, s_m)$, $|s| = s_0 + s_1 + \ldots + s_m$; $n \geq 1$, $p \geq 1$, $m \geq 1$.

Необхідно знайти розв'язок $u(t, x)$ системи (1) з простору $\overline{C}^n([0, T]; H_q)$, що задовольняє нелокальні умови

$$\nu(\partial/\partial t)^j u|_{t=0} - \mu(\partial/\partial t)^j u|_{t=T} = \varphi_j(x), \quad j = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{2}$$

де ν, μ — комплексні числа $(|\nu| + |\mu| \neq 0)$, $\varphi_j(x)$ — відомі вектор-функції з шкали просторів $\overline{H}_q$.

3. Зображення та умови єдиності розв'язку задачі. Задача (1), (2) еквівалентна задачі з нелокальними умовами для системи диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку за часовою змінною

$$(\partial/\partial t) v(t, x) = L(D) v(t, x), \tag{3}$$

$$\nu v(0, x) - \mu v(T, x) = \varphi(x), \tag{4}$$

де

$$v(t, x) = \operatorname{col}\,(u(t, x), (\partial/\partial t) u(t, x), \ldots, (\partial/\partial t)^{n-1} u(t, x)) =$$
$$= \operatorname{col}\,(v_0(t, x), v_1(t, x), \ldots, v_{n-1}(t, x)),$$

$$L(D) = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & & I_{(n-1)p} & \\ \hline -L_n(D) & -L_{n-1}(D) & \ldots & -L_1(D) \end{array}\right),$$

$$L_j(D) = \sum_{s_1 + \ldots + s_m \leq j} A_{n-j, s_1, \ldots, s_m} D_1^{s_1} \ldots D_m^{s_m},$$

$$\varphi(x) = \operatorname{col}\,(\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x)).$$

Оскільки

$$v(t, x) \equiv V(t, D)\,\delta(x) \equiv$$
$$\equiv \operatorname{col}\,(V_0(t, D), V_1(t, D), \ldots, V_{n-1}(t, D))\,\delta(x), \tag{5}$$

$$\varphi(x) \equiv \psi(D)\,\delta(x) \equiv$$
$$\equiv \operatorname{col}\,(\psi_0(D), \psi_1(D), \ldots, \psi_{n-1}(D))\,\delta(x), \tag{6}$$

то задача (3), (4) еквівалентна множині нелокальних крайових задач на проміжку $[0, T]$ для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку із сталими коефіцієнтами вигляду

$$(d/dt) V(t, k) = L(k) V(t, k), \tag{7}$$

$$\nu V(0, k) - \mu V(T, k) = \psi(k), \quad k \in \mathbb{Z}^m. \tag{8}$$

Для формулювання умов існування та єдиності розв'язку задачі (7), (8) введемо позначення, що пов'язують матрицю $L(k)$, вектор $\psi(k)$ і константи ν, μ. Нехай $\lambda_j(k)$, $j = \overline{1, \gamma(k)}$, — корені характеристичного рівняння $\det(\lambda I_{np} - L(k)) = 0$ відповідних кратностей $\alpha_j(k)$, $\sum_{j=1}^{\gamma(k)} \alpha_j(k) = np$; корені $\lambda_j(k)$, $j = \overline{1, \beta(k)}$, $\beta(k) \geq 0$, крім того, задовольняють рівняння $\nu = \mu e^{\lambda_j(k) T}$ і $\nu \neq \mu e^{\lambda_j(k) T}$ при $j > \beta(k)$; очевидно, для деяких $q_j(k) \in \mathbb{Z}$ $\lambda_j(k) = (\ln(\nu/\mu) + i 2\pi q_j(k))/T$, $j = \overline{1, \beta(k)}$; вважаємо також, що $q_1(k) > q_2(k) > \ldots > q_{\beta(k)}(k)$. Нехай $\gamma_j(k)$ — кількість жорданових кліток

$J_{js}(k) = \begin{bmatrix} \lambda_j(k) & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_j(k) \end{bmatrix}$, що відповідають кореню $\lambda_j(k)$, $j = \overline{1, \gamma(k)}$ (з теорії елементарних дільників випливає [10], що $\gamma_j(k) \le p$); вважаємо, що ці клітки впорядковані за індексом s так, що їх розмір $\alpha_{js}(k)$ не зростає, тобто $\alpha_{j1}(k) \ge \alpha_{j2}(k) \ge \ldots \ge \alpha_{j,\gamma_j(k)}(k)$; $\sum_{s=1}^{\gamma_j(k)} \alpha_{js}(k) = \alpha_j(k)$.

Нехай матриця $E_{js}(k)$ розміру $np \times \alpha_{js}(k)$ побудована з власного $E_{js}(1, k)$ і приєднаних $E_{js}(2, k), \ldots, E_{js}(\alpha_{js}(k), k)$ векторів, що відповідають жордановій клітці $J_{js}(k)$; $L(k)E_{js}(k) = E_{js}(k)J_{js}(k)$; нехай $E_j(k) = (E_{j1}(k), \ldots, E_{j,\gamma_j(k)}(k))$ — матриця розміру $np \times \alpha_j(k)$, $J_j(k) = \operatorname{diag}(J_{j1}(k), \ldots, J_{j,\gamma_j(k)}(k))$ — квадратна матриця розміру $\alpha_j(k)$, $E(k) = (E_1(k), \ldots, E_{\gamma(k)}(k))$, $J(k) = \operatorname{diag}(J_1(k), \ldots$ $\ldots, J_{\gamma(k)}(k))$.

У наведених позначеннях матриця $L(k)$ має таку форму Жордана:

$$L(k) = E(k)J(k)E^{-1}(k) = E(k)J(k)T^*(k), \tag{9}$$

де $T(k) = (E^{-1}(k))^*$, $*$ позначає операцію ермітового спряження.

Розіб'ємо матрицю $T(k)$ на блоки відповідно до розбиття матриці $E(k)$, а саме, $T(k) = (T_1(k), \ldots, T_{\gamma(k)}(k))$, $T_j(k) = (T_{j1}(k), \ldots, T_{j,\gamma_j(k)}(k))$, $T_{js}(k) =$ $= (T_{js}(1, k), \ldots, T_{js}(\alpha_{js}(k), k))$.

Якщо матриця $L(k)$ має форму Жордана (9), то функція $f(L(k))$ визначається формулою [10]

$$f(L(k)) = E(k)f(J(k))T^*(k), \tag{10}$$

де $f(J(k)) = \operatorname{diag}(f(J_1(k)), \ldots, f(J_{\gamma(k)}(k)))$, $f(J_j(k)) = \operatorname{diag}(f(J_{j1}(k)),$ $f(J_{j2}(k)), \ldots, f(J_{j,\gamma_j(k)}(k)))$, $f(J_{js}(k))$ — матриця розміру $\alpha_{js}(k)$ з елементами $f_{ab}(J_{js}(k)) = f^{(b-a)}(\lambda_j(k))/(b-a)!$ при $1 \le a \le b \le \alpha_{js}(k)$, $f_{ab}(J_{js}(k)) = 0$ при $1 \le b < a \le \alpha_{js}(k)$. Тобто матриця $f(L(k))$ визначається за допомогою значень функції $f(\lambda)$ та її похідних до порядку $\alpha_{j1}(k) - 1$ в точках $\lambda =$ $= \lambda_j(k)$, $j = \overline{1, \gamma(k)}$.

Введемо функції $f(t, \lambda)$ і $\tilde{f}(t, \lambda)$ за такими формулами: $f(t, \lambda) = (\nu -$ $- \mu e^{\lambda T})^{-1} e^{\lambda t}$, $\tilde{f}(t, \lambda) = 0$ в околі точки $\lambda_j(k)$ $(\gamma(k) \ge j > \beta(k))$ і при $\beta(k) >$ > 0 $f(t, \lambda) = 0$, $\tilde{f}(t, \lambda) = e^{\lambda_j(k)t}(\lambda - \lambda_j(k))^{\alpha_{j1}(k)-1}$ в околі точки $\lambda_j(k)$, $1 \le$ $\le j \le \beta(k)$.

Справедлива наступна теорема.

Теорема 1. *Для існування розв'язку задачі* (7), (8) *необхідно і достатньо, щоб*

$$T_{js}^*(\alpha_{js}(k), k)\,\psi(k) = 0, \quad j = \overline{1, \beta(k)}, \quad s = \overline{1, \gamma_j(k)}. \tag{11}$$

Цей розв'язок зображається формулою

$$V(t, k) = f(t, L(k))\,\psi(k) -$$
$$- \sum_{j=1}^{\beta(k)} \sum_{s=1}^{\gamma_j(k)} E_{js}(k)\, e^{J_{js}(k)(t-T)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \Phi^{-1}(\alpha_{js}(k) - 1) & 0 \end{pmatrix} T_{js}^*(k)\psi(k)/\mu, \tag{12}$$

ядро задачі (7), (8) *має розмірність* $\sum_{j=1}^{\beta(k)} \gamma_j(k)$,

$$\tilde{V}(t,k) = \sum_{j=1}^{\beta(k)} e^{\lambda_j(k)t} \sum_{s=1}^{\gamma_j(k)} E_{js}(1,k)\, C_{js}(1,k) \tag{13}$$

— його елементи, де $C_{js}(1,k)$ *— довільні сталі,* $\Phi(\alpha)$ *— квадратна матриця розміру* α *з елементами* $\Phi_{ab}(\alpha) = 0$ *при* $1 \le b < a \le \alpha$, $\Phi_{ab}(\alpha) = T^{b-a+1}/(b-a+1)!$ *при* $1 \le a \le b \le \alpha$.

Доведення. Загальний розв'язок рівняння (7)

$$V(t,k) = e^{L(k)t}C(k) = E(k)\,e^{J(k)t}\,T^*(k)\,C(k),$$

де $C(k)$ — довільний вектор констант, підставимо в умови (8). Одержимо систему для визначення вектора $C(k)$:

$$E(k)(\nu - \mu\, e^{J(k)T})\,T^*(k)\,C(k) = \psi(k),$$

або

$$(\nu - \mu\, e^{J(k)T})\,T^*(k)\,C(k) = T^*(k)\,\psi(k).$$

Враховуючи блочну будову матриць $J(k)$, $T(k)$, маємо

$$(\nu - \mu\, e^{J_{js}(k)T})\,T^*_{js}(k)\,C(k) = T^*_{js}(k)\,\psi(k), \quad j > \beta(k), \quad s = \overline{1, \gamma_j(k)},$$

і при $\beta(k) > 0$ і $\alpha_{js}(k) > 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\mu\, e^{\lambda_j(k)T}\,\Phi(\alpha_{js}(k)-1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^*_{js}(k)\,C(k) = T^*_{js}(k)\,\psi(k),$$

$$j \le \beta(k), \quad s = \overline{1, \gamma_j(k)}.$$

При $j \le \beta(k)$, $\alpha_{js}(k) = 1$ маємо $0 \times T^*_{js}(k)\,C(k) = T^*_{js}(k)\,\psi(k)$. Звідси одержуємо

$$T^*_{js}(k)\,C(k) = (\nu - \mu\, e^{J_{js}(k)T})^{-1}\,T^*_{js}(k)\,\psi(k), \quad j > \beta(k),$$

$$\begin{pmatrix} T^*_{js}(2,k) \\ \vdots \\ T^*_{js}(\alpha_{js}(k),k) \end{pmatrix} C(k) =$$

$$= -e^{-\lambda_j(k)T}\,\Phi^{-1}(\alpha_{js}(k)-1) \begin{pmatrix} T^*_{js}(1,k) \\ \vdots \\ T^*_{js}(\alpha_{js}(k)-1,k) \end{pmatrix} \psi(k)/\mu,$$

$$j \le \beta(k), \quad \alpha_{js}(k) > 1,$$

$$T^*_{js}(1,k)\,C(k) = C_{js}(1,k), \quad j \le \beta(k), \quad s = \overline{1, \gamma_j(k)},$$

$$T^*_{js}(\alpha_{js}(k),k)\,\psi(k) = 0, \quad j \le \beta(k), \quad s = \overline{1, \gamma_j(k)}.$$

Підставивши знайдені $T^*_{js}(k)\,C(k)$ у формулу загального розв'язку $V(t,k) = \sum_{j=1}^{\gamma(k)} \sum_{s=1}^{\gamma_j(k)} E_{js}(k)\,e^{J_{js}(k)t}\,T^*_{js}(k)\,C(k)$, одержуємо формули (11)–(13), що і треба довести.

Наслідок 1. *Щоб записати умови* (11) *у вигляді функції від матриці* $L(k)$, *необхідно і достатньо, щоб*

$$T_j^*(k)\psi(k) = 0, \quad j = \overline{1, \beta(k)}.$$

У цьому випадку умови (11) *мають вигляд*

$$\tilde{\tilde{f}}(L(k))\psi(k) \equiv \tilde{f}(0, L(k))\psi(k) = 0. \tag{14}$$

Наслідок 2. *Щоб записати ядро* (13) *задачі* (7), (8) *у вигляді функції від матриці* $L(k)$, *необхідно і достатньо, щоб*

$$\alpha_{j1}(k) = \alpha_{j,\gamma_j(k)}(k), \quad j = \overline{1, \beta(k)}.$$

Тоді елементи ядра зображаються формулою

$$\tilde{V}(t,k) = \tilde{f}(t, L(k))C(k), \tag{15}$$

де $C(k)$ *— довільний вектор.*

Наслідок 3. *Щоб записати частинний розв'язок* (12) *задачі* (7), (8) *у вигляді функції від матриці* $L(k)$, *необхідно і достатньо, щоб*

$$\alpha_{j1}(k) = 1, \quad j = \overline{1, \beta(k)}.$$

Цей розв'язок $V(t,k)$ *зображається формулою*

$$V(t,k) = f(t, L(k))\psi(k); \tag{16}$$

формули (11) *і* (13), *згідно з наслідками* 1 *і* 2, *мають відповідно вигляд* (14) *і* (15).

Наслідок 4. *Розв'язок задачі* (7), (8) *існує, єдиний і визначений для всіх правих частин* $\psi(k)$ *умов* (8) *тоді і тільки тоді, коли алгебраїчне рівняння*

$$\det\left((\ln(\nu/\mu) + i2\pi q)I_{np}/T - L(k)\right) = 0 \tag{17}$$

не має q*-коренів на множині цілих чисел, тобто коли* $\beta(k) = 0$; *він зображається формулою* (16), *де* $f(t,\lambda) \equiv e^{\lambda t}(\nu - \mu e^{\lambda T})^{-1}$.

Доведення наслідків 1–4 аналогічне доведенню теореми 1.

Користуючись означенням (10) функції від матриці, перепишемо вирази (14)–(16) таким чином:

$$E(k)\tilde{\tilde{f}}(J(k))T^*(k)\psi(k) \equiv E(k)\tilde{f}(0, J(k))T^*(k)\psi(k) = 0,$$

$$\tilde{V}(t,k) = E(k)\tilde{f}(t, J(k))T^*(k)C(k),$$

$$V(t,k) = E(k)f(t, J(k))T^*(k)\psi(k).$$

Покажемо, що добуток довільної функції $f(L(k))$ від матриці $L(k)$ на деякий вектор $C(k)$ можна записати за допомогою тільки власних чисел $\lambda_j(k)$ матриці $L(k)$, не звертаючись до її власних і приєднаних векторів. Нехай $N(k)$ — степінь мінімального многочлена $g(\lambda,k) = (\lambda - \sigma_1(k))^{N_1(k)} \ldots (\lambda - \sigma_{\kappa(k)}(k))^{N_{\kappa(k)}(k)}$ вектора $C(k)$ щодо матриці $L(k)$ [10]. Очевидно, що множина коренів $\{\sigma_j(k)\}$ є підмножиною множини коренів $\{\lambda_j(k)\}$.

Позначимо

$$(R(k))_{C(k)} = (C(k), L(k)C(k), \ldots, L^{N(k)-1}(k)C(k)), \tag{18}$$

$$(W(k))_{C(k)} = ((W_1(k))_{C(k)}, \ldots, (W_{\kappa(k)}(k))_{C(k)}), \tag{19}$$

$$(W_j(k))_{C(k)} = ((W_{j1}(k))_{C(k)}, \ldots, (W_{j,N_j(k)}(k))_{C(k)}), \quad j = \overline{1, \kappa(k)}, \tag{20}$$

$$(W_{js}(k))_{C(k)} = (d/d\sigma)^{s-1}\operatorname{col}(1, \sigma, \dots, \sigma^{N(k)-1})|_{\sigma=\sigma_j(k)}/(s-1)!, \tag{21}$$

$$s = \overline{1, N_j(k)},$$

$$(f(\lambda))_{C(k)} = \operatorname{col}((f(\sigma_1(k)))_{C(k)}, \dots, (f(\sigma_{\kappa(k)}(k)))_{C(k)}), \tag{22}$$

$$(f(\sigma_j(k)))_{C(k)} = \operatorname{col}\left(f(\sigma_j(k)), f'(\sigma_j(k)), \dots, \frac{f^{(N_j(k)-1)}}{(N_j(k)-1)!}(\sigma_j(k))\right). \tag{23}$$

Матриця $(W(k))_{C(k)}$ — це матриця Вандермонда, що побудована за коренями полінома $g(\lambda, k)$, вектор $(f(\lambda))_{C(k)}$ — вектор значень функції $f(\lambda)$ на коренях полінома $g(\lambda, k)$ [11].

Теорема 2. *Для добутку функції від оператора $L(k)$ і вектора $C(k)$ справедлива формула*

$$f(L(k))\,C(k) = (R(k))_{C(k)}(W(k))^{-T}_{C(k)}(f(\lambda))_{C(k)}, \tag{24}$$

де $(W(k))^{-T}_{C(k)} = \left((W(k))^{-1}_{C(k)}\right)^T = \left((W(k))^{T}_{C(k)}\right)^{-1}$.

Доведення. Нехай $e_{1,N(k)}, e_{2,N(k)}, \dots, e_{N(k),N(k)}$ — стовпці одиничної матриці розміру $N(k)$. Тоді за формулою (18)

$$(R(k))_{C(k)}(W(k))^{-T}_{C(k)}(f(\lambda))_{C(k)}C(k) =$$

$$= \sum_{j=1}^{N(k)} e^T_{j,N(k)}(W(k))^{-T}_{C(k)}(f(\lambda))_{C(k)}L^{j-1}(k)\,C(k).$$

Враховуючи (9), перетворимо праву частину останньої формули до вигляду

$$E(k)\left(\sum_{j=1}^{N(k)} e^T_{j,N(k)}(W(k))^{-T}_{C(k)}(f(\lambda))_{C(k)}J^{j-1}(k)\right)T^*(k)\,C(k).$$

Використовуючи позначення (19)–(23), можна показати, що цей вираз дорівнює

$$E(k)f(J(k))\,T^*(k)C(k) = f(L(k))\,C(k).$$

Теорема доведена.

Наслідок 5. *Формула* (24) *справедлива, якщо в позначеннях* (18)–(23) *як многочлен $g(\lambda, k)$ використовувати довільний анулюючий многочлен вектора $C(k)$ щодо матриці $L(k)$, зокрема мінімальний чи характеристичний многочлен матриці $L(k)$* [10, 12].

Наслідок 6. *Нехай* $g(\lambda, k) = (\lambda - \lambda_1(k))^{\alpha_{11}(k)} \dots (\lambda - \lambda_{\gamma(k)}(k))^{\alpha_{\gamma(k),1}(k)}$ *— мінімальний многочлен матриці $L(k)$, $N(k) = \alpha_{11}(k) + \dots + \alpha_{\gamma(k),1}(k)$ — його степінь,*

$$W(k) = (W_1(k), \dots, W_{\gamma(k)}(k)),$$

$$W_j(k) = (W_{j1}(k), \dots, W_{j,\alpha_{j1}(k)}(k)), \quad j = \overline{1, \gamma(k)},$$

$$W_{js}(k) = (\partial/\partial\lambda)^{s-1}\operatorname{col}(1, \lambda, \dots, \lambda^{N(k)-1})|_{\lambda=\lambda_j(k)}/(s-1)!,$$

$$s = \overline{1, \alpha_{j1}(k)},$$

$$f(\lambda(k)) = \operatorname{col}(f_1(\lambda(k)), \dots, f_{\gamma(k)}(\lambda(k))),$$

$$f_j(\lambda(k)) = \operatorname{col}\left(f(\lambda_j(k)), f'(\lambda_j(k)), \ldots, f^{(\alpha_{j1}(k)-1)}(\lambda_j(k))\right)/(\alpha_{j1}(k)-1)!.$$

Тоді функція від матриці $f(L(k))$ зображається формулою

$$f(L(k)) = \sum_{j=1}^{N(k)} e_{j,N(k)}^T W^{-T}(k) f(\lambda(k)) L^{j-1}(k). \tag{25}$$

При умовах наслідку 4 розв'язок задачі (7), (8) зображається формулою

$$V(t,k) = (R(k))_{\psi(k)} (W(k))_{\psi(k)}^{-T} (f(t,\lambda))_{\psi(k)}. \tag{26}$$

Якщо $\beta(k) = 0$ для всіх $k \in \mathbb{Z}^m$, тобто якщо рівняння (17) не має розв'язку $(q,k) \in \mathbb{Z}^{m+1}$, то існує єдиний формальний розв'язок задачі (3), (4), який згідно з (26) зображається формулою

$$v(t,x) = (R(D))_{\psi(D)} (W(D))_{\psi(D)}^{-T} (f(t,\lambda))_{\psi(D)} \delta(x) =$$
$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} (R(k))_{\psi(k)} (W(k))_{\psi(k)}^{-T} (f(t,\lambda))_{\psi(k)} e^{ikx}. \tag{27}$$

Прийнявши в формулі (25) $f(\lambda) = f(t,\lambda) = (\nu e^{-\lambda t} - \mu e^{\lambda(T-t)})^{-1}$, одержимо для розв'язку задачі (3), (4) ще одне зображення

$$v(t,x) = f(t, L(D))\varphi(x) =$$
$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} (\nu e^{-L(k)t} - \mu e^{L(k)(T-t)})^{-1} \psi(k) e^{ikx} =$$
$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \sum_{j=1}^{N(k)} e_{j,N(k)}^T W^{-T}(k) f(t,\lambda(k)) L^{j-1}(k) \psi(k) e^{ikx} =$$
$$= \sum_{s=1}^{np} \hat{\varphi}_s(x - i\partial/\partial y) \sum_{j=1}^{N(y)} e_{j,N(y)}^T W^{-T}(y) f(t,\lambda(y)) L^{j-1}(y) e_{s,np} \Big|_{y=0}. \tag{28}$$

Останній рядок формули (28) одержаний за допомогою отриманої в лемі 1 формули; $\varphi(x) = \operatorname{col}(\hat{\varphi}_1(x), \ldots, \hat{\varphi}_{np}(x))$.

4. Умови існування розв'язку задачі (1), (2) в просторі $\overline{C}^n([0,T]; H_n)$. Згідно з прийнятими позначеннями формальний розв'язок $u(t,x)$ задачі (1), (2) складають p перших компонент розв'язку $v(t,x)$ задачі (3), (4), який при виконанні умов єдиності зображається формулою (28).

Встановимо умови на коефіцієнти задачі (1), (2), при яких розв'язок $u(t,x)$ задачі (1), (2) належить простору $\overline{C}^n([0,T]; H_n)$, тобто справджується нерівність $\|u\|_{n,n} < \infty$.

Оскільки $(\partial/\partial t)^n u = -L_n(D)u - L_{n-1}(D)\partial u/\partial t - \ldots - L_1(D)(\partial/\partial t)^{n-1}u$, то

$$\|(\partial/\partial t)^n u\|_0^2 \le C_1 \left(\|u\|_n^2 + \|\partial u/\partial t\|_{n-1}^2 + \ldots + \|(\partial/\partial t)^{n-1}u\|_1^2\right),$$

де C_1 — деяка константа. Отже,

$$\|u\|_{n,n}^2 \le \frac{C_1+1}{T} \int_0^T \sum_{j=0}^{n-1} \|(\partial/\partial t)^j u\|_{n-j}^2 dt = \frac{C_1+1}{T} \int_0^T \sum_{j=0}^{n-1} \|v_j\|_{n-j}^2 dt =$$
$$= \frac{C_1+1}{T} \int_0^T \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} |\tilde{k}^{n-j} V_j(t,k)|^2 dt =$$

$$= \frac{C_1+1}{T} \int\limits_0^T \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} |ZV(t,k)|^2 dt, \tag{29}$$

де $Z = \operatorname{diag}(\tilde{k}^n I_p, \ldots, \tilde{k}^2 I_p, \tilde{k} I_p)$.

Нехай для довільного вектора $\hat{\xi} = (\xi, \xi_{m+1}) = (\xi_1, \ldots, \xi_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1}$

$$L_j(\hat{\xi}) = \sum_{s_1 + \ldots + s_m \le j} A_{n-j, s_1, \ldots, s_m} \xi_1^{s_1} \ldots \xi_m^{s_m} \xi_{m+1}^{j-s_1-\ldots-s_m}$$

— однорідний степеня j многочлен змінних $\xi_1, \ldots, \xi_{m+1}$,

$$L(\hat{\xi}) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_{(n-1)p} \\ \hline -L_n(\hat{\xi}) & -L_{n-1}(\hat{\xi}) \quad \ldots \quad -L_1(\hat{\xi}) \end{array} \right),$$

тоді $ZL(k) = L(k/\tilde{k}, 1/\tilde{k}) Z\tilde{k}$.

Якщо $\lambda_j(\hat{\xi})$ — корінь рівняння $\det(\lambda I_{np} - L(\hat{\xi})) = 0$, то $\lambda_j(k/\tilde{k}, 1/\tilde{k}) = \lambda_j(k)/\tilde{k}$ і розміри та кількість жорданових кліток матриць $L(k)$ та $L(k/\tilde{k}, 1/\tilde{k})$ співпадають, тобто $\alpha_{js}(k) = \alpha_{js}(k/\tilde{k}, 1/\tilde{k})$, $\gamma(k) = \gamma(k/\tilde{k}, 1/\tilde{k})$, $\gamma_j(k) = \gamma_j(k/\tilde{k}, 1/\tilde{k})$.

Позначимо $Z_\alpha(\tilde{k}) = \operatorname{diag}(1, \tilde{k}, \tilde{k}^2, \ldots, \tilde{k}^{\alpha-1})$, $\rho(t,k) = \operatorname{col}(\rho_1(t,k), \ldots \ldots, \rho_{\gamma(k)}(t,k))$, $\rho_j(t,k) = Z_{\alpha_{j1}(k)}(\tilde{k}) f_j(t, \lambda(k))$, $\rho(t,\hat{\xi}) = \operatorname{col}(\rho_1(t,\hat{\xi}), \ldots \ldots, \rho_{\gamma(\hat{\xi})}(t,\hat{\xi}))$, $\rho_j(t,\hat{\xi}) = Z_{\alpha_{j1}(\hat{\xi})}(\xi_{m+1}^{-1}) f_j(t, \xi_{m+1}^{-1}\lambda(\hat{\xi}))$, матриця Вандермонда $W(\hat{\xi})$ будується аналогічно матриці $W(k)$, в якій вектор k замінено вектором $\hat{\xi}$. Очевидно, $\rho(t, k/\tilde{k}, 1/\tilde{k}) = \rho(t,k)$.

Для матриці

$$Q(t,\hat{\xi}) = \sum_{j=1}^{N(\hat{\xi})} e_{j,N(\hat{\xi})}^T W^{-T}(\hat{\xi}) \rho(t,\hat{\xi}) L^{j-1}(\hat{\xi}) \Big/ \|\rho(t,\hat{\xi})\|,$$

де $\|\rho(t,\hat{\xi})\|^2$ — сума квадратів модулів компонент вектора $\rho(t,\hat{\xi})$, справедлива рівність

$$ZV(t,k) = Q(t, k/\tilde{k}, 1/\tilde{k}) \|\rho(t, k/\tilde{k}, 1/\tilde{k})\| Z\psi(k).$$

Оскільки функція $\|Q(t,\hat{\xi})\|^2$, де $\|Q\|$ — норма матриці Q, задана і неперервна на компакті $K = \{(t,\hat{\xi})\colon t \in [0,T],\ |\hat{\xi}| = 1,\ \xi_{m+1} \ge 0\}$, то за теоремою Вейєрштрасса $\max\limits_K \|Q(t,\hat{\xi})\|^2 \le C_2$, де $C_2 = C_2(A_s, \mu, \nu, T)$ — неперервна функція своїх аргументів; отже, для всіх $k \in \mathbb{Z}^m$ $\|Q(t, k/\tilde{k}, 1/\tilde{k})\|^2 \le C_2$, а отже,

$$|ZV(t,k)|^2 \le C_2 \|\rho(t,k)\|^2 |Z\psi(k)|^2 =$$

$$= C_2 \|\rho(t,k)\|^2 \sum_{j=0}^{n-1} |\tilde{k}^{n-j} \psi_j(k)|^2,$$

і нерівність (29) набуде вигляду

$$\|u\|_{n,n}^2 \le \frac{(C_1+1)C_2}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \left(\int\limits_0^T \|\rho(t,k)\|^2 dt \right) \sum_{j=0}^{n-1} |\tilde{k}^{n-j} \psi_j(k)|^2. \tag{30}$$

З означення вектора $\rho_r(t,k) = \operatorname{col}(\rho_{r,0}(t,k), \rho_{r,1}(t,k), \ldots, \rho_{r,\alpha_{r1}(k)-1}(t,k))$ випливають рекурентні співвідношення

$$\rho_{r,0}(t,k) = e^{\lambda_r(k)t}(\nu - \mu e^{\lambda_r(k)T})^{-1},$$

$$\rho_{r,s}(t,k) = (\tilde{k}t)^s \rho_{r,0}(t,k)/s! + \mu \rho_{r,0}(T,k) \sum_{\alpha=1}^{s} (\tilde{k}T)^\alpha \rho_{r,s-\alpha}(t,k)/\alpha!.$$

Нехай $\theta = \theta(k) \geq 1$ оцінює зверху числа $\rho_{r,0}(t,k)$, $r = \overline{1,\gamma(k)}$, $t \in [0,T]$, тобто $\sup\limits_{r,t} |\rho_{r,0}(t,k)| \leq \theta$. Методом математичної індукції можна одержати оцінку зверху для решти компонент вектора $\rho_r(t,k)$, а саме, $|\rho_{r,s}(t,k)| \leq$ $\leq (2\chi\tilde{k})^s \theta^{s+1}$, де $\chi = (1+|\mu|)\sum_{j=0}^{np} T^j/j!$.

Якщо $\tilde{s}$ — максимальна кратність кореня мінімального многочлена $g(\lambda,k)$ матриці $L(k)$, яка досягається для безмежної кількості векторів k, то $\|\rho(t,k)\| \leq C_3 \tilde{k}^{\tilde{s}-1}\theta^{\tilde{s}}$, де C_3 — константа, що не залежить від t і k. З нерівності (30) маємо

$$\|u\|_{n,n}^2 \leq (C_1+1) C_2 C_3 \sum_{j=0}^{n-1} |\theta^{\tilde{s}}(k)\, \tilde{k}^{n-j+\tilde{s}-1} \psi_j(k)|^2. \tag{31}$$

Для знаходження величини $\theta(k)$ використаємо метричний підхід [6, 8].

Розглянемо пару комплексних чисел ν, μ в кулі B^4 одиничного (що не зменшує загальності) радіуса простору $\mathbb{R}^4$.

Лема 2. *Для довільного $\varepsilon > 0$ існує множина $M \subset B^4$ така, що $\operatorname{mes} M \leq$ $\leq \varepsilon$ і для всіх векторів $(\nu,\mu) \in B^4 \setminus M$ та $k \in \mathbb{Z}^m$ виконується оцінка*

$$|\nu - \mu e^{\lambda_r(k)T}| \geq \left(\frac{\varepsilon}{4npC_4(\varepsilon_1)}\right)^{1/2} \max(1, e^{\operatorname{Re}\lambda_r(k)T})\, \tilde{k}^{-(m+\varepsilon_1)/2} \tag{32}$$

для довільного $\varepsilon_1 > 0$ і $r = \overline{1,\gamma(k)}$, де $C_4(\varepsilon_1) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} \tilde{k}^{-m-\varepsilon_1}$.

Доведення. Нехай $M_r(k)$ позначає множину тих векторів $(\nu,\mu) \in B^4$, для яких при даному $k \in \mathbb{Z}^m$ і r, $1 \leq r \leq \gamma(k)$, виконується обернена до (32) нерівність $|\nu - \mu e^{\lambda_r(k)T}| < d$; тут d позначає праву частину нерівності (32).

Оскільки $\nu - \mu e^{\lambda_r(k)T} \equiv (Y_1 + iY_2)\eta$, де $\eta = \operatorname{col}(\operatorname{Re}\nu, \operatorname{Im}\nu, \operatorname{Re}\mu, \operatorname{Im}\mu)$, $Y_1 = (1, 0, -\operatorname{Re}(e^{\lambda_r(k)T}), \operatorname{Im}(e^{\lambda_r(k)T}))$, $Y_2 = (0, 1, -\operatorname{Im}(e^{\lambda_r(k)T}), -\operatorname{Re}(e^{\lambda_r(k)T}))$, то $M_r(k) \subset M_r'(k)$, де $M_r'(k)$ — множина векторів $(\nu,\mu) \in \in B^4$, для яких $|Y_j\eta| \leq d$, $j = 1, 2$.

Легко бачити, що множина $M_r'(k)$ — це множина точок $(\nu,\mu) \in B^4$, які містяться між гіперплощинами $Y_j\eta = \pm d$, $j = 1, 2$. Оскільки $Y_2 Y_1^T = 0$, $Y_1 Y_1^T = Y_2 Y_2^T = 1 + e^{2\operatorname{Re}\lambda_r(k)T}$, то ці пари гіперплощин перпендикулярні і міру множини $M_r'(k)$ можна оцінити таким чином: $\operatorname{mes} M_r'(k) \leq 4d^2/(1 +$ $+ e^{2\operatorname{Re}\lambda_r(k)T}) \leq \varepsilon \tilde{k}^{-m-\varepsilon_1}/(npC_4(\varepsilon_1))$. Просумувавши за r і k, одержимо $\operatorname{mes} B \leq \varepsilon$. Лема доведена.

З нерівності (32) випливає

$$\theta(k) = 2\left(\frac{npC_4(\varepsilon_1)}{\varepsilon}\right)^{1/2} \tilde{k}^{(m+\varepsilon_1)/2}.$$

Отже, згідно з оцінкою (31),

$$\|u\|^2_{n,n} \le 2\,(C_1+1)\,C_2C_3\left(\frac{npC_4(\varepsilon_1)}{\varepsilon}\right)^{1/2} \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{k}^{\,n-j+\tilde{s}-1+m\tilde{s}/2+\varepsilon_1\tilde{s}/2}\,|\psi_j(k)|^2 =$$

$$= 2\,(C_1+1)\,C_2C_3\left(\frac{npC_4(\varepsilon_1)}{\varepsilon}\right)^{1/2} \sum_{j=0}^{n-1} \|\varphi_j(x)\|^2_{n-j+\tilde{s}-1+m\tilde{s}/2+\varepsilon_1\tilde{s}/2}.$$

Таким чином, доведена наступна теорема.

Теорема 3. *Нехай* $\varphi_j(x)\in \overline{H}_{l(j)}$, $l(j) > n-j+\tilde{s}-1+m\tilde{s}/2$. *Тоді для всіх векторів* $(\nu,\mu)\in B^4\setminus M$, *де* $\operatorname{mes} M \le \varepsilon$, *існує єдиний розв'язок* $u(t,x)$ *задачі* (1), (2) *з простору* $\overline{C}^n([0,T]; H_n)$, *що неперервно залежить від правої частини* $\varphi(x)$ *і зображається формулою* (28). *Справедлива оцінка* $\|u\|^2_{n,n} \le \le C_5\varepsilon^{-1/2}\sum_{j=0}^{n-1}\|\varphi_j(x)\|^2_{l(j)}$, *де* C_5 — *деяка константа.*

На закінчення зауважимо, що на ідею та на доцільність доведення теорем, аналогічних теоремі 3, при дослідженні умовно коректних задач вказав професор В. І. Бернік у приватній бесіді з одним із авторів.

1. *Дезин А. А.* Общие вопросы теории граничных задач. – М.: Наука, 1980. – 208 с.
2. *Романко В. К.* Разрешимость граничных задач для дифференциально-операторных уравнений высокого порядка // Дифференц. уравнения. – 1978. – **14**, № 6. – С. 1081–1092.
3. *Савченко Г. Б.* О корректности одной краевой задачи для систем линейных дифференциальных уравнений // Там же. – 1978. – **14**, № 11. – С. 2082–2085.
4. *Борок В. М., Антыпко И. И.* Критерий безусловной корректности краевой задачи в слое // Теория функций, функцион. анализ и их прил. – 1976. – Вып. 26. – С. 3–9.
5. *Макаров А. А.* Существование корректной двухточечной краевой задачи в слое для систем псевдодифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1994. – **30**, № 1. – С. 144–150.
6. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
7. *Илькив В. С., Пташник Б. И.* Задача с нелокальными краевыми условиями для систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 1984. – **20**, № 6. – С. 1012–1023.
8. *Илькив В. С.* Нелокальная задача для дифференциально-операторных уравнений. I, II. – Львов, 1982. – С. 8–12; с. 13–18. – Деп. в ВИНИТИ, № 3942–82.
9. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.
10. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
11. *Казимірський П. С.* Розклад матричних многочленів на множники. – Київ: Наук. думка, 1981. – 224 с.
12. *Ланкастер П.* Теория матриц. – М.: Наука, 1978. – 280 с.

Одержано 12.09.94