УДК 517. 946

М. М. Притула, Ю. М. Сидоренко (Львів ун-т),
В. Штрамп (Кассель. ун-т, Німеччина)

НЕЛІНІЙНІ ІНТЕГРОВНІ СИСТЕМИ, ПОВ'ЯЗАНІ З ЕЛІПТИЧНОЮ АЛГЕБРОЮ ЛІ – БАКСТЕРА

The hierarchy of Poisson Hamiltonian structures connected with the "elliptic" spectral problem is built. The generating operators are found connected with the asymmetrie chiral $O(3)$-field equation.

Побудовано ієрархію пуассонових структур Гамільтона, пов'язаних з „еліптичною" спектральною задачею. Знайдено породжуючий оператор рівняння асиметричного кірального $O(3)$-поля.

1. Спеціальна еліптична алгебра Лі – Бакстера. Зображення нульової кривини зі спектральним параметром на торі виникло вперше в роботах [1, 2]. Є. К. Склянін і А. Е. Боровик незалежно показали, що рівняння Ландау – Ліфшіца (Л–Л)

$$\vec{S}_t = [\vec{S}, \vec{S}_{xx}] + [\vec{S}, \hat{I}\vec{S}], \tag{1}$$

де $\vec{S} = \vec{S}(x, t)$ — тривимірний вектор одиничної довжини, $\vec{S}^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 1$, а $\hat{I} = \mathrm{diag}(I_1, I_2, I_3)$ — діагональна матриця, можна подати як умову сумісності системи лінійних рівнянь

$$\left(i\frac{\partial}{\partial x} - \sum_{\alpha=1}^{3} S_\alpha \omega_\alpha(\lambda)\sigma_\alpha\right)\varphi(x, t; \lambda) = 0, \tag{2}$$

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{\alpha=1}^{3}\left(\left[\vec{S}, \vec{S}_x\right]_a \omega_\alpha(\lambda)\sigma_\alpha + 2S_\alpha\omega_1\omega_2\omega_3\omega_\alpha^{-1}(\lambda)\sigma_\alpha\right)\right)\varphi(x, t, \lambda) = 0. \tag{2'}$$

Тут σ_i, $i = 1, 2, 3$ — стандартні матриці Паулі:

$$\sigma_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{Vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{Vmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \tag{3}$$

а $\omega_i(\lambda)$, $i = 1, 2, 3$, задовольняють систему квадрик

$$\omega_i^2 - \omega_j^2 = \frac{1}{4}(I_j - I_i), \tag{4}$$

які задають в $\mathbb{CP}^3$ еліптичну криву (тор). Коефіцієнти $\omega_i(\lambda)$, $i = 1, 2, 3$ можуть бути параметризовані еліптичними функціями [2]

$$\begin{aligned} \omega_1(\lambda) &= \rho / \mathrm{sn}(\lambda, k), \\ \omega_2(\lambda) &= \rho / \mathrm{sn}(\lambda, k)\,\mathrm{dn}^{-1}(\lambda, k), \\ \omega_3(\lambda) &= \rho / \mathrm{sn}(\lambda, k)\,\mathrm{cn}^{-1}(\lambda, k), \end{aligned} \tag{5}$$

де

$$\rho = \frac{1}{2}\sqrt{I_3 - I_1}, k = \sqrt{(I_1 - I_2)/(I_1 - I_3)}, \quad I_1 \le I_2 \le I_3,$$

проте надалі явна параметризація співвідношень (4) нам не буде потрібна.

Рівняння Ландау – Ліфшіца (1) описує динаміку вектора намагніченості в магнетиках і є основою сучасної феноменологічної теорії магнетизму. Дана робота присвячена побудові в явному вигляді породжуючих операторів для інтегровних систем, аналогічних рівнянню Л–Л (1) (тобто таких, які допускають „еліптичне" входження спектрального параметра в зображення типу Лакса).

Вихідним об'єктом для наших наступних досліджень є нескінченновимірна алгебра Лі G спеціальних мероморфних функцій на торі (4) зі значеннями в алгебрі Лі $\mathrm{su}(2)$ [3]. Алгебра G визначається заданням твірних

$$\begin{gathered}\sigma_i^j,\ i=1,2,3;\ j\in\mathbb{Z},\\ \sigma_j^{2l+1} = -i\,2^{2l}\omega^{2l}\omega_j\sigma_j,\\ \sigma_j^{2l+1} = -i\,2^{2l+1}\omega^{2l}\omega_1\omega_2\omega_3\omega_j^{-1}\sigma_j,\\ i^2=-1,\ \omega^2=\omega_k^2+\frac{1}{4}I_k,\quad k=1,2,3,\end{gathered} \tag{6}$$

і співвідношень комутації між ними

$$\begin{gathered}\left[\sigma_i^{2l},\sigma_j^{2m}\right] = \varepsilon_{ijk}\left(\sigma_k^{2(l+m)}-I_k\sigma_k^{2(l+m-1)}\right),\\ \left[\sigma_i^{2l},\sigma_j^{2m+1}\right] = \varepsilon_{ijk}\left(\sigma_k^{2(l+m)+1}-I_j\sigma_k^{2(l+m)-1}\right),\\ \left[\sigma_i^{2l+1},\sigma_j^{2m+1}\right] = \varepsilon_{ijk}\sigma_k^{2(l+m+1)},\end{gathered} \tag{7}$$

ε_{ijk}— символ Леві – Чевіти (парність перестановки чисел i,j,k). Елементами алгебри Лі G є, за визначенням, формальні ряди $\mu\in G$:

$$\mu = \sum_{-\infty\le j}^{N(\mu)}\sum_{i=1}^{3}\mu_{i,j}\sigma_i^j,\ N(\mu)<\infty. \tag{8}$$

Скінченність верхньої границі сумування $N(\mu)$ дозволяє коректно ввести відразу на всій алгебрі G систему білінійних симетричних форм, інваріантних відносно приєднаного зображення $\mathrm{ad}\,G$:

$$\langle\mu,\nu\rangle_{1-2p} = \langle\mu,\omega^{2p}\nu\rangle_1,\quad p\in\mathbb{Z}, \tag{9}$$

$$\langle\mu,\nu\rangle_1 = -\frac{1}{2}\,\omega^2(\omega_1\omega_2\omega_3)^{-1}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\mathrm{tr}\,(\mu_l\nu_{-l+1}) = \sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{i=i}^{3}\mu_{i,l}\nu_{i,-l+1},$$

де

$$\mu = \sum_{-\infty\le l}^{N(\mu)}\mu_l = \sum_{-\infty\le l}^{N(\mu)}\sum_{i=1}^{3}\mu_{i,j}\sigma_i^l \in G,$$

$$\nu = \sum_{-\infty\le l}^{N(\nu)}\nu_l = \sum_{-\infty\le l}^{N(\nu)}\sum_{i=1}^{3}\nu_{i,l}\sigma_i^l \in G.$$

Враховуючи, що скалярні добутки в (9) невироджені, можна за допомогою форм із (9) ототожнити простір лінійних функціоналів на алгебрі G з самою алгеброю Лі G.

Визначимо зростаючу фільтрацію на G сім'єю підпросторів G^l:

$$\ldots < G^{m-1} < G^m < G^{m+1} < \ldots, \tag{10}$$

де G^l — лінійні підпростори, натягнуті на генератори σ_i^j, $i=1,2,3;\ -\infty\le j\le$ $\le l<\infty$.

***Зауваження* 1.** а. Підпростори $G_- = G^0$ і $G_+ = (G \dot{-} G^0)$ з комутатором (7) є підалгебрами Лі алгебри G, ізотропними відносно скалярного добутку $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$.

б. Підпростори $G_\pm$ дуальні відносно форми $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$: $(G_\pm)^* = G_\mp$.

Можливість розкладу алгебри G в пряму суму лінійних підпросторів $G_\pm$, $G = G_+ + G_-$, які також є алгебрами Лі, — основа теоретико-групової конструкції Адлера – Константа. Вперше реалізував цю схему для алгебри Лі G П. І. Голод [3, 4] у зв'язку з вивченням скінченновимірних гамільтонових систем типу Ейлера – Арнольда. Узагальнення на більш загальні еліптичні алгебри проведено в роботі [5]. Застосування алгебраїчних методів Лі для вивчення гамільтонових структур рівнянь нульової кривини із спектральним параметром на торі здійснено в [6].

***Зауваження* 2.** Алгебра Лі G з фільтрацією (10) не є градуйованою, внаслідок чого в системі скалярних добутків (9) відсутні форми з парними індексами. Ця обставина обумовлює виникнення принципових труднощів при введенні дужок Лі – Пуассона на деяких пуассонових підпросторах.

Позначимо через $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(G)$ алгебру Лі гладких періодичних функцій змінної $x \in \mathbb{R}^1$ з періодом $T \in \mathbb{R}^1$, які набувають своїх значень в G. Елементами $\mu \in \mathfrak{G}$ є матричні ряди на кривій (4) із коефіцієнтами, періодичними по $x \in \mathbb{R}^1$:

$$\mu(x) = \sum_{-\infty \le j}^{N(\mu)} \sum_{i=1}^{3} \mu_{i,j}(x)\sigma_i^j. \tag{11}$$

Генератори $\sigma_i^j(x)$ алгебри Лі $\mathfrak{G}$ задовольняють такі комутаційні співвідношення:

$$\begin{aligned} \left[\sigma_i^{2l}(x),\sigma_j^{2m}(y)\right] &= \varepsilon_{ijk}\left(\sigma_k^{2(l+m)}(x) - I_k\sigma_k^{2(l+m-1)}\right)\sigma(x-y), \\ \left[\sigma_i^{2l}(x),\sigma_j^{2m+1}(y)\right] &= \varepsilon_{ijk}\left(\sigma_k^{2(l+m)+1}(x) - I_j\sigma_k^{2(l+m)-1}\right)\sigma(x-y), \\ \left[\sigma_i^{2l+1}(x),\sigma_j^{2m+1}(y)\right] &= \varepsilon_{ijk}\sigma_k^{2(l+m+1)}\sigma(x-y). \end{aligned} \tag{12}$$

Змінні $x, y \in \mathbb{R}^1$ у співвідношеннях (12) відіграють роль неперервних індексів.

Задамо центральне розширення $\hat{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G} \oplus \mathbb{C}^1$ алгебри Лі новим комутатором Лі:

$$[(\mu(x), z_1), (\nu(x), z_2)]_q = ([\mu(x), \nu(x)]; \omega^q(\mu(x), \nu(x))), \tag{13}$$

де

$$\omega^q(\mu(x), \nu(x)) = \int\left\langle \mu(x), \frac{d}{dx}\nu(x)\right\rangle_q dx, \tag{14}$$

а інтегрування ведеться по періоду.

Кососиметричність і тотожність Якобі для комутатора (13) випливають безпосередньо з визначення 2-коциклу (14). Введемо на $\hat{\mathfrak{G}}_q$ систему білінійних форм $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\bar{q}}$:

$$\langle(\mu(x), z_1), (\nu(x), z_2)\rangle_{\bar{q}} = \int \langle\mu(x), \nu(x)\rangle_{\bar{q}}\, dx + z_1 z_2 \tag{15}$$

і ототожнимо з їх допомогою дуальний простір ${}^{\bar{q}}\hat{\mathfrak{G}}_q^*$ алгебри $\hat{\mathfrak{G}}_q$ із $\mathfrak{G} \oplus \mathbb{C}^1$. (Нагадаємо, що індекси типу q і $\bar{q}$ у виразах (13) – (15) і всюди нижче можуть набувати тільки непарних значень — див. зауваження 2.)

Лема 1. *Коприєднана дія алгебри* $\hat{\mathfrak{G}}_q$ *в* ${}^{\bar q}\hat{\mathfrak{G}}_q^*$ *має вигляд*

$$\hat{\mathrm{ad}}_{\bar q}^{q}(\mu(x), z_1)(U(x); e) = \left(-e\omega^{\bar q - q}\frac{d\mu(x)}{dx} + [U(x), \mu(x)]; 0\right). \tag{16}$$

Дійсно,

$$\left\langle \hat{\mathrm{ad}}_q^*(\mu(x); z_1)(U(x); e), (\nu(x); z_2)\right\rangle_{\bar q} \overset{df}{=}$$

$$\overset{df}{=} \left\langle (U(x); e), \hat{\mathrm{ad}}_q(\mu(x); z_1)(\nu(x); z_2)\right\rangle_{\bar q} =$$

$$= \int \langle U(x), [\mu(x), \nu(x)]\rangle_{\bar q} dx - e\omega^q(\mu(x), \nu(x)) =$$

$$= \int \langle [U(x), \mu(x)], \nu(x)\rangle_{\bar q} dx - e\omega^q(\nu(x), \mu(x)) =$$

$$= \int \langle [U(x), \mu(x)], \nu(x)\rangle_{\bar q} dx - e\omega^{\bar q}\left(\nu(x), \omega^{\bar q - q}\mu(x)\right) =$$

$$= \int \left\langle \left([U(x), \mu(x)] - e\omega^{\bar q - q}\frac{d\mu(x)}{dx}; 0\right), (\nu(x); z_2)\right\rangle_{\bar q}.$$

Вище ми використали інваріантність форм (9). Поряд із операцією Лі (13) в лінійному просторі $\hat{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G} \oplus \mathbb{C}$ можна ввести нову структуру алгебри Лі, пов'язану з розкладом на лінійну суму підпросторів $\mathfrak{G}_+ = \mathfrak{G}(G_+)$, $\mathfrak{G}_- = \mathfrak{G}(G_-)$:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_+ + \mathfrak{G}_-. \tag{17}$$

Для цього розглянемо на $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(G)$ лінійний оператор $\mathbb{R} = P_+ - P_-$, де $P_\pm$ — оператори проектування:

$$P_\pm \mathfrak{G}_\pm = \mathfrak{G}_\pm, \; P_\pm \mathfrak{G}_\mp = 0. \tag{18}$$

Прямою перевіркою неважко встановити таку рівність:

$$[R\mu(x), R\nu(x)] - R([R\mu(x), \nu(x)] + [\mu(x), R\nu(x)]) +$$
$$+ [\mu(x), \nu(x)] = 0 \quad \forall\, \mu(x), \nu(x) \in \mathfrak{G}. \tag{19}$$

Співвідношення (19) є класичним аналогом рівняння Янга – Бакстера – Фаддєєва, а його розв'язки — оператори R — класичними r-матрицями. Наслідком (19) є справедливість тотожності Якобі для кососиметричної операції $[\cdot,\cdot]_{R,q}$: $\mathfrak{G} * \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}$

$$[(\mu(x), z_1), (\nu(x), z_2)]_{R,q} \overset{df}{=} ([\mu(x), \nu(x)]_R, \omega_R^q(\mu(x), \nu(x))), \tag{20}$$

де

$$[\mu(x), \nu(x)]_R = \frac{1}{2}([R\mu(x), \nu(x)] + [\mu(x), R\nu(x)]),$$

$$\omega_R^q(\mu(x), \nu(x)) = \frac{1}{2}(\omega^q(R\mu(x), \nu(x)) + \omega^q(\mu(x), R\nu(x))).$$

Означення. *Лінійний простір* $\hat{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G} \oplus \mathbb{C}$ *з двома комутаторами Лі* $[\cdot,\cdot]_q$ (13) *і* $[\cdot,\cdot]_{R,q}$ (20) *називається спеціальною алгеброю Лі – Бакстера (біалгеброю, подвійною алгеброю Лі).*

Надалі розгляд фіксації комутатора здійснюється з допомогою відповідної індексації.

На завершення цього пункту наведемо явно комутаційні співвідношення для генераторів $\hat{\sigma}^j(x)$ алгебри Лі – Бакстера $\hat{\mathfrak{G}}_{R,q}$:

$$\left[\hat{\sigma}_i^l(x),\hat{\sigma}_j^{2m}(y)\right]_q = \varepsilon_{ijk}\delta(x-y)\left(\hat{\sigma}_k^{2(l+m)}(x)-I_k\hat{\sigma}_k^{2(l+m-1)}(x)\right)$$

$$\left[\hat{\sigma}_i^l(x),\hat{\sigma}_j^{2m+1}(y)\right]_q = \varepsilon_{ijk}\delta(x-y)\left(\hat{\sigma}_k^{2(l+m)+1}(x)-I_j\hat{\sigma}_k^{2(l+m)-1}(x)\right) + \delta_i^j\delta_i^{2(l+m+1)}\delta'(x-y)I,$$

$$\left[\hat{\sigma}_i^{l+1}(x),\hat{\sigma}_j^{2m+1}(y)\right]_q = \varepsilon_{ijk}\delta(x-y)\hat{\sigma}_k^{2(l+m+1)}(x), \tag{21}$$

$$\left[\hat{\sigma}_i^{\alpha}(x),\hat{\sigma}_j^{\beta}(y)\right]_{R,q} = \begin{cases}\left[\hat{\sigma}_i^{\alpha}(x),\hat{\sigma}_j^{\beta}(y)\right]_q, & \alpha,\beta\geq 1;\\ -\left[\hat{\sigma}_i^{\alpha}(x),\hat{\sigma}_j^{\beta}(y)\right]_q, & \alpha,\beta<1;\\ 0, & \alpha\geq 1,\beta<1;\alpha<1,\beta\geq 1.\end{cases}$$

У співвідношеннях (21) I — генератор центра

$$\left[\hat{\sigma}_i^j(x),I\right]_q = \left[\hat{\sigma}_i^j(y),I\right]_{R,q} = 0.$$

2. Інваріантні підпростори. Узгоджені сім'ї дужок Лі – Пуассона. Позначимо через $\hat{U} = (U(x); e)$ елемент простору ${}^{\bar{q}}\hat{\mathfrak{G}}^{\bullet} \cong \hat{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}\oplus\mathbb{C}$, дуального лінійному простору $\hat{\mathfrak{G}}$, відносно скалярного добутку (15):

$$\hat{U} = \left(\sum_{-\infty\leq\alpha}^{N(u)}\sum_{i=1}^{3}u_{i,\alpha}(x)\sigma_i^{\alpha}:e\right) = eI + \sum_{-\infty\leq\alpha}^{N(u)}\sum_{i=1}^{3}u_{i,\alpha}(x)\hat{\sigma}_i^{\alpha}. \tag{22}$$

Нехай $D\left({}^{\bar{q}}\mathfrak{G}^{\bullet}\right)$ — простір гладких функцій на ${}^{\bar{q}}\mathfrak{G}^{\bullet}$. Визначимо диференціали $\nabla_{\bar{q}}f\in\hat{\mathfrak{G}}$ з функцією $f\in D\left({}^{\bar{q}}\mathfrak{G}^{\bullet}\right)$ формулою

$$\nabla_{\bar{q}}f(\hat{U}) = \sum_{-\infty\leq\alpha}^{N(u)}\sum_{i=1}^{3}\frac{\delta f(\hat{U})}{\delta U_{i,\alpha}(x)}\hat{\sigma}_i^{-\alpha+\bar{q}}. \tag{23}$$

Очевидні такі співвідношення:

$$\frac{d}{dt}\varphi\left(\hat{U}+t\hat{V}\right)\Big|_{t=0} = \left\langle\nabla_{\bar{q}}\varphi(\hat{U}),\hat{V}\right\rangle_{\bar{q}} \tag{24}$$

для будь-яких $\hat{U},\hat{V}\in{}^{\bar{q}}\hat{\mathfrak{G}}^{\bullet}$, $\varphi\in D\left({}^{\bar{q}}\hat{\mathfrak{G}}^{\bullet}\right)$ і

$$\nabla_{q_1}\varphi = \omega^{q_1-q_2}\nabla_{q_2}\varphi. \tag{25}$$

Структура подвійної алгебри Лі (21) в $\hat{\mathfrak{G}}$ дозволяє ввести в $D\left({}^{\bar{q}}\mathfrak{G}^{\bullet}\right)$ дужки Лі – Пуассона

$${}^{\bar{q}}\{\varphi,\psi\}_q(\hat{U}) = \left\langle\hat{U},\left[\nabla_{\bar{q}}\varphi(\hat{U}),\nabla_{\bar{q}}\psi(\hat{U})\right]_q\right\rangle_{\bar{q}}, \tag{26}$$

$${}^{\bar{q}}\{\varphi,\psi\}_{R,q}(\hat{U}) = \left\langle\hat{U},\left[\nabla_{\bar{q}}\varphi(\hat{U}),\nabla_{\bar{q}}\psi(\hat{U})\right]_{R,q}\right\rangle_{\bar{q}}. \tag{27}$$

Аналогом гамільтонового потоку з гамільтоніаном $\psi(\hat{U})$ по дужці (26) є еволюційне рівняння (див. лему 1):

$$\frac{\partial}{\partial t}U(x) = e\omega^{\bar{q}-q}\frac{\partial}{\partial x}V_{\bar{q}} - \left[U(x), V_{\bar{q}}\right], \tag{28}$$

де

$$V_{\bar{q}} = \sum_{-\infty\le\alpha}^{N(u)}\sum_{i=1}^{3}\frac{\delta\psi(\hat{U})}{\delta U_{i,\alpha}(x)}\sigma_i^{-\alpha-\bar{q}}.$$

Якщо функція φ належить центру дужки (26), то гамільтонів потік по дужці (27) з функцією φ як гамільтоніан має вигляд

$$\frac{d}{dt}U(x) = e\omega^{\bar{q}-q}\frac{\partial}{\partial x}\bar{V}_{\bar{q}} - \left[U(x), \bar{V}_{\bar{q}}\right], \tag{29}$$

де

$$\bar{V}_{\bar{q}} = \frac{1}{2}RV_{\bar{q}}.$$

Зауваження 3. Зафіксувавши константу $e=1$ і параметри $q=\bar{q}$, одержуємо зображення гамільтонового потоку (29) у формі рівняння нульової кривини.

Дужки Лі – Пуассона (27) мають важливу властивість узгодженості — їх довільна лінійна комбінація також є дужкою Лі – Пуассона. Не обмежуючи загальності, доведемо цю властивість при $q=\bar{q}$, $e=1$ (див. зауваження 3).

Твердження 1. *Білінійна кососиметрична операція*

$$\{\{\cdot,\cdot\}\} : D(\mathfrak{G}\oplus\mathbb{C})\times D(\mathfrak{G}\oplus\mathbb{C}) \to D(\mathfrak{G}\oplus\mathbb{C})$$

вигляду

$$\{\{\cdot,\cdot\}\} \overset{df}{=} \sum_{i=1}^{n}\{\cdot,\cdot\}_{R,q_i} \tag{30}$$

задовольняє тотожність Якобі.

Перетворимо вираз (30) таким чином:

$$\sum_{i=1}^{n}\{\cdot,\cdot\}_{R,q_i}(\hat{U}) = \sum_{i=1}^{n}\left\langle \hat{U}\left(\left[\nabla_{q_i}\cdot,\nabla_{q_i}\cdot\right]_R;\ W_R^{q_i}\left(\nabla_{q_i}\cdot,\nabla_{q_i}\cdot\right)\right)\right\rangle_{q_i} =$$

$$= \int\sum_{i=1}^{n}\left\langle U(x)\left[\nabla_{q_i}\cdot,\nabla_{q_i}\cdot\right]_R\right\rangle_{q_i}dx +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}W_R^{q}\left(\nabla_{q_i}\cdot,\nabla_{q_i}\cdot\right) + \int\sum_{i=1}^{n}\left\langle U(x),\omega^{q_i-q_1}\left[\nabla_{q_i}\cdot,\nabla_{q_i}\cdot\right]_{R\omega^{q_i-q_1}}\right\rangle_{q_i}dx +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}W_R^{q_i}\left(\nabla_{q_i}\cdot,\nabla_{q_i}\cdot\right) =$$

$$= \int\sum_{i=1}^{n}\left\langle U(x),\left[\nabla_{q_1}\cdot,\nabla_{q_1}\cdot\right]_{R\omega^{q_i-q_1}}\right\rangle_{q_1}dx + \sum_{i=1}^{n}W^{q_1}_{R\cdot\omega^{q_i-q_1}}\left(\nabla_{q_1}\cdot,\nabla_{q_1}\cdot\right) =$$

$$= \left\langle \hat{U},\left(\left[\nabla_{q_1}\cdot,\nabla_{q_1}\cdot\right]_{R_1};\ W_{R_1}^{q_1}\left(\nabla_{q_1}\cdot,\nabla_{q_1}\cdot\right)\right)\right\rangle_{q_1} = \{\cdot,\cdot\}_{R_1,q_1}, \tag{31}$$

де

$$R_1 = R\sum_{i=1}^{n} \omega^{q_i - q_1} \overset{df}{=} Rp(\omega^2).$$

У ланцюгу перетворень (31) ми використали означення (27), (15), (9) і формулу (25). Оператор R_1 коректно визначений на $\mathfrak{G}(G)$, оскільки різниця $q_i - q_1$ — парне число для всіх $i = \overline{1,n}$ (див. зауваження 2).

Лема 2. *Білінійна кососиметрична операція*

$$[\cdot,\cdot]_{R_1} = \frac{1}{2}([R_1\cdot,\cdot] + [\cdot, R_1\cdot]) : \mathfrak{G}\times\mathfrak{G}\to\mathfrak{G} \tag{32}$$

задовольняє тотожність Якобі.

Доведення. Використовуючи означення, маємо

$$\begin{aligned}
&4[A,[B,C]_{R_1}]_{R_1} + 4[B,[C,A]_{R_1}]_{R_1} + 4[C,[A,B]_{R_1}]_{R_1} = \\
&= [R_1A, ([R_1B, C] + [B, R_1C])] + [R_1B, ([R_1C, A] + [C, R_1A])] + \\
&+ [R_1C, ([R_1A, B] + [A, R_1B])] + [A, R_1([R_1B, C] + [B, R_1C])] + \\
&+ [B, R_1([R_1C, A] + [C, R_1A])] + [C, R_1([R_1A, B] + [A, R_1B])] = \\
&= [A, (R([Rp(\omega^2)B, p(\omega^2)C] + [p(\omega^2)B, Rp(\omega^2)C]) - \\
&- [Rp(\omega^2)B, Rp(\omega^2)C])] + \text{цикл} = [A, [p(\omega^2)B, Rp(\omega^2)C]] + \text{цикл} = \\
&= p^1(\omega^2)([A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]]) = 0.
\end{aligned} \tag{33}$$

Наслідок. *Кососиметрична форма* $W_{R_1}^{q_1}(\cdot,\cdot) : \mathfrak{G}\times\mathfrak{G}\to\mathbb{C}$:

$$W_{R_1}^{q_1}(\cdot,\cdot) \overset{df}{=} \frac{1}{2}\left(W^{q_1}(R_1\cdot,\cdot) + W^{q_1}(\cdot, R_1\cdot)\right)$$

визначає на $\mathfrak{G}$ *нетривіальний 2-коцикл*

$$W_{R_1}^{q_1}([A,B]_{R_1}, C) + W_{R_1}^{q_1}([C,A]_{R_1}, B) + W_{R_1}^{q_1}([B,C]_{R_1}, A) = 0. \tag{34}$$

Справедливість твердження 1 випливає з леми 2 і наслідку.

Зауваження 4. Всюди далі будуть розглядатися тільки дужки (27) при $\overline{q} = q$, $e = 1$, тому з міркувань зручності домовимося записувати їх у вигляді $\{\cdot,\cdot\}_q$.

Гамільтонове рівняння нульової кривини

$$\frac{\partial}{\partial t}U(x) - \frac{\partial}{\partial x}\overline{V}_q(x) + \left[U(x), \overline{V}_q(x)\right] = 0 \tag{35}$$

еквівалентне нескінченній системі еволюційних рівнянь на коефіцієнти $u_{i,\alpha}(x)$ еліптичного пучка $U(x)$ (22). Змістовні приклади нелінійних рівнянь можна одержати тільки у випадку скінченного числа змінних поля. Тому зафіксуємо

цілі числа $N_+ \geq 0 \geq N_-$ і розглянемо підмноговиди $\mathfrak{G}_{N_-}^{N_+} \subset {}^q\hat{\mathfrak{G}}^{\bullet}$ вигляду

$$\mathfrak{G}_{N_-}^{N_+} = \left\{\hat{U} = (U(x), 1)\,\middle|\, U(x) = \sum_{\alpha=2N_-+1}^{\alpha=N_+}\sum_{i=1}^{3} u_{i,\alpha}(x)\sigma_i^{\alpha}\right\}. \tag{36}$$

Очевидно, $\mathfrak{G}_{N_-}^{N_+}$ залишаються інваріантними відносно коприєднаної дії алгебри

$\hat{\mathfrak{G}}_q$ (по R-дужці), внаслідок чого рівняння (35) природно обмежується на ці підмноговиди. Пуассонова дія алгебри $\hat{\mathfrak{G}}_q$ на $\mathfrak{G}_{N_-}^{N_+}$ редукується до дії алгебри $\hat{\mathfrak{G}}_q(N_+, N_-)$ з генераторами $\hat{\sigma}_i^\gamma : q - N_+ \le \gamma \le q - 1 - 2N_-$ і комутаційними співвідношеннями

$$\left[\hat{\sigma}_i^\alpha(x), \hat{\sigma}_j^\beta(y)\right]_q = P_{\hat{\mathfrak{G}}_q(N_+,N_-)}\left[\hat{\sigma}_i^\alpha(x), \hat{\sigma}_j^\beta(y)\right]_{R,q}, \tag{37}$$

де комутатор $[\cdot,\cdot]_{R,q}$ визначений формулою (21), а оператор $P_{\hat{\mathfrak{G}}_q(N_+,N_-)}$ проектує на лінійний підпростір, натягнутий на генератори $\hat{\sigma}_i^\gamma(x)$:

$$P_{\hat{\mathfrak{G}}_q(N_+,N_-)}\hat{\mathfrak{G}}_q(N_+,N_-) = \hat{\mathfrak{G}}_q(N_+,N_-),$$

$$P_{\hat{\mathfrak{G}}_q(N_+,N_-)}\left(\hat{\mathfrak{G}}_q \dot{-} \hat{\mathfrak{G}}_q(N_+,N_-)\right) = 0.$$

Випишемо більш явно формули для дужок $\{\cdot,\cdot\}_q$ в термінах змінних поля $u_{i,\alpha}(x)$ — коефіцієнтів пучка $U(x)$ (36):

$$u_{i,\alpha}(x) = 0 \text{ при } \alpha < 2N_- + 1, \alpha > N_+:$$

$$\{u_{i,2l}(x), u_{j,2m}(y)\}_q = \eta_1 \varepsilon_{ijk} u_{k,2(l+m)-q}(x)\delta(x-y),$$

$$\{u_{i,2l}(x), u_{j,2m-1}(y)\}_q = \eta_2 \delta_i^j \delta_0^{-2(l+m)+q+1}\delta'(x-y) +$$

$$+ \eta_2 \varepsilon_{ijk}\left(u_{k,2(l+m)-q-1}(x) - I_1 u_{k,2(l+m)-q+1}(x)\right)\delta(x-y),$$

$$\{u_{i,2l-1}(x), u_{j,2m-1}(y)\}_q = \eta_3 \varepsilon_{ijk}\left(u_{k,2(l+m-1)-q}(x) - \right.$$

$$\left. - I_k u_{k,2(l+m)-q}(x)\right)\delta(x-y), \tag{38}$$

де

$$\eta_1 = \begin{cases} 1, & 2l, 2m < q; \\ -1, & 2l, 2m > q, \end{cases} \quad \eta_2 = \begin{cases} 1, & 2l, 2m-1 < q; \\ -1, & 2l, 2m-1 \ge q, \end{cases}$$

$$\eta_3 = \begin{cases} 1, & 2l, 2m < q+1; \\ -1, & 2l, 2m \ge q+1, \end{cases}$$

і $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 0$ — в решті випадках.

Зауваження 5. Неважко підрахувати, що на підмноговидах $\mathfrak{G}_{N_-}^{N_+}$ (36) існує $[N_+/2] - N_- + 1$ лінійна дужка Лі – Пуассона (38), яка відповідає непарним значенням q на відрізку $[2N_- + 1, N_+ + 1]$. В силу твердження 1 ці дужки утворюють узгоджену сім'ю.

Відзначимо також, що при $q = 1$ дужки (38) ультралокальні для довільних N_+, N_-.

3. Підмноговиди $\mathfrak{G}_0^2$ і $\mathfrak{G}_{-1}^0$. Дужки Пуассона – Дірака. Введемо на $\mathfrak{G}_0^2$ (36) координати $S_i(x), M_j(x), i\, j = 1, 2, 3$, покладаючи $S_i(x) = u_{i,1}(x)$, $M_j(x) = u_{j,2}(x)$. З результатів попереднього пункту випливає, що на $\mathfrak{G}_0^2$ існують дві узгоджені дужки Лі – Пуассона, $q = 1, q = 3$:

$$\{S_i(x), S_j(y)\}_1 = -\varepsilon_{ijk} S_k(x)\delta(x-y),$$

$$\{S_i(x), M_j(y)\}_1 = -\varepsilon_{ijk} M_k(x)\delta(x-y), \tag{39}$$

$$\{M_i(x), M_j(y)\}_1 = 0,$$

$$\{\mathcal{S}_i(x), \mathcal{S}_j(y)\}_3 = -\varepsilon_{ijk} I_k \mathcal{S}_k(x)\delta(x-y),$$
$$\{\mathcal{S}_i(x), M_j(y)\}_3 = \delta_i^j \delta'(x-y) - \varepsilon_{ijk} I_j M_k(x)\delta(x-y), \tag{40}$$
$$\{M_i(x), M_j(y)\}_3 = \varepsilon_{ijk}\mathcal{S}_k(x)\delta(x-y).$$

Для ефективного опису класу нелінійних еволюційних рівнянь — гамільтонових векторних полів на $\mathfrak{G}_{N_-}^{N_+}$, зображених у формі (35), корисно ввести гамільтонові оператори $\mathcal{L}_q$ коприєднаної дії алгебри $\mathfrak{G}_q(N_+, N_-)$ (37) таким чином:

$$\hat{U} \in \mathfrak{G}_{N_-}^{N_+}, \ \varphi, \psi \in D\left(\mathfrak{G}_{N_-}^{N_+}\right),$$
$$\{\varphi, \psi\}_q(\hat{U}) \overset{(27)}{=} \left\langle \hat{U}, \left[\nabla_q \varphi(\hat{U}), \nabla_q \psi(\hat{U})\right]\right\rangle_q = \tag{41}$$
$$= \int \operatorname{grad}\varphi(\hat{U})\mathcal{L}_q \operatorname{grad}^T \psi(\hat{U})\, dx,$$

де

$$\operatorname{grad} = \left(\frac{\delta}{\delta u_{1,2N_-+1}(x)}, \frac{\delta}{\delta u_{2,2N_-+1}(x)}, \dots, \frac{\delta}{\delta u_{3,N_+}(x)}\right) \tag{42}$$

— вектор-функція (рядок) довжиною $3 \times (N_+ - 2N_-)$, a grad^T — транспонований вектор (стовпчик).

Гамільтонів оператор дужки (39) — матриця 6×6:

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} = \begin{Vmatrix} -[\vec{\mathcal{S}}, \cdot\,] & -[\vec{M}, \cdot\,] \\ -[\vec{M}, \cdot\,] & 0 \end{Vmatrix}, \tag{43}$$

де $\vec{\mathcal{S}} = (\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3)$, $\vec{M} = (M_1, M_2, M_3)$, $\left[\vec{U}_\alpha, \cdot\,\right]$ — оператор векторного множення:

$$\left[\vec{U}_\alpha, \cdot\,\right] = \begin{Vmatrix} 0 & -u_{3,\alpha} & u_{2,\alpha} \\ u_{3,\alpha} & 0 & -u_{1,\alpha} \\ -u_{2,\alpha} & u_{1,\alpha} & 0 \end{Vmatrix}. \tag{44}$$

Тут і нижче для спрощення часто буде пропускатися незалежна змінна.

Гамільтонів оператор $\mathcal{M} = \mathcal{L}_3$, який відповідає дужці (40), має вигляд

$$\mathcal{M} = \begin{Vmatrix} -[\hat{I}\vec{\mathcal{S}}, \cdot\,] & \partial_x - [\vec{M}, \hat{I}\,\cdot\,] \\ \partial_x - \hat{I}[\vec{M}, \cdot\,] & [\vec{\mathcal{S}}, \cdot\,] \end{Vmatrix}, \tag{45}$$

де $\hat{I} = \operatorname{diag}(I_1, I_2, I_3)$, $\partial_x = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)$.

Аналогічно попередньому введемо на $\mathfrak{G}_{-1}^{0}$ координати $l_i(x) = u_{i,0}(x)$ і $m_i(x) = u_{i,-1}(x)$:

$$\{m_i(x), m_j(y)\}_1 = -\varepsilon_{ijk} I_k m_k(x)\delta(x-y),$$
$$\{m_i(x), l_j(y)\}_1 = -\varepsilon_{ijk} I_j l_k(x)\delta(x-y), \tag{46}$$
$$\{l_i(x), l_j(y)\}_1 = \varepsilon_{ijk} m_k \delta(x-y),$$

$$\mathcal{L} = \begin{Vmatrix} -[\hat{I}\vec{m}, \cdot\,] & -[\vec{l}, \hat{I}\,\cdot\,] \\ -\hat{I}[\vec{l}, \cdot\,] & [m, \cdot\,] \end{Vmatrix}, \tag{46'}$$

$$\{m_i(x), m_j(y)\}_{-1} = -\varepsilon_{ijk} m_k(x)\delta(x-y),$$

$$\{m_i(x), l_j(y)\}_{-1} = -\delta_i^j \delta'(x-y) - \varepsilon_{ijk} l_k(x)\delta(x-y), \tag{47}$$

$$\{l_i(x), l_j(y)\}_{-1} = 0,$$

$$\mathcal{M} = -\begin{Vmatrix} [\vec{m}, \cdot] & \partial_x + [\vec{l}, \cdot] \\ \partial_x + [\vec{l}, \cdot] & 0 \end{Vmatrix}. \tag{48}$$

Дужки Лі – Пуассона (39) при кожному значенні неперервного індексу відтворюють комутаційні співвідношення алгебри $e(3) \cong \mathfrak{G}_1(2, 0)$ — алгебри Лі групи $E(3) = SO(3) \otimes \mathbb{R}^3$ — групи руху евклідового простору $\mathbb{R}^3$. Просторова однорідність накладає вимоги, щоб функції Казіміра цієї алгебри в кожній точці x збігалися:

$$\vec{M}^2(y) = \vec{M}^2(x), \quad \vec{S}\vec{M}(y) = \vec{S}\vec{M}(x).$$

Таким чином, підмноговид $\mathfrak{G}_0^2$ розшаровується на орбіти, які задаються фіксацією функцій Казіміра:

$$\vec{M}^2(x) = c_1, \quad \vec{S}\vec{M}(x) = c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{49}$$

Дужки (39) на орбітах (49) невироджені, а гамільтонів оператор на просторі, дотичному до орбіти, оборотний (див нижче).

Орбіти (49) дужки Лі – Пуассона (39) не є пуассоновими підмноговидами для дужки (40) — обмеження (49) не зберігаються при коприєднаній дії алгебри Лі $\hat{\mathfrak{G}}_3(2, 0)$. Проте на орбітах (49) можна визначити так звану дужку Дірака [7 – 9], розглядаючи співвідношення (49) як зв'язки на фазовому просторі:

$$\{\varphi, \psi\}_3^r = \{\varphi, \psi\}_3 - \int\int \{\varphi, h_i(z_1)\}_3 K^{-1}(z_1, z_2)^{ij} \{h_j(z_2), \varphi\}_3 \, dz_1 dz_2, \tag{50}$$

де

$$h_1(x) = \vec{M}^2(x) - c_1, \quad h_2(x) = \vec{S}\vec{M}(x) - c_2,$$

а $K^{-1}(x, y)$ — ядро матричного (2×2) інтегрального оператора K^{-1}, оберненого до оператора K з ядром

$$K(x, y) = \| \{h_i(x), h_j(y)\}_3 \|, \quad i, j = 1, 2, \tag{51}$$

$$\begin{Vmatrix} \{h_1(x), h_1(y)\}_3 & \{h_1(x), h_2(y)\}_3 \\ \{h_2(x), h_1(y)\}_3 & \{h_2(x), h_2(y)\}_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 2c_1\delta'(x-y) \\ 2c_1\delta'(x-y) & 2c_2\delta'(x-y) \end{Vmatrix}.$$

Після виконання всіх операцій в правій частині рівності (50) треба розглянути звуження на поверхню рівня зв'язків $h_i = 0, i = 1, 2$.

Зауваження 6. Дужка Дірака (50) задовольняє тотожність Якобі за означенням, якщо тотожність Якобі задовольняє вихідна дужка Лі – Пуассона (передбачається існування оператора K^{-1}).

Лема 3. *Дужки* $\{\cdot, \cdot\}_1$ *і* $\{\cdot, \cdot\}^r$ *узгоджені.*

Доведення випливає із співвідношення

$$(\alpha_1\{\cdot, \cdot\}_1 + \alpha_2\{\cdot, \cdot\}_3)^r = \alpha_1\{\cdot, \cdot\}_1 + \alpha_2\{\cdot, \cdot\}_3^r, \tag{52}$$

яке легко перевірити, і зауваження 6.

Редуковану дужку $\{\cdot,\cdot\}_3^r$, як і вихідну, зручно задавати з допомогою відповідного гамільтонова оператора, який визначається аналогічно (41):

$$\{\varphi, \psi\}_3^r = \int \operatorname{grad}\varphi\, \mathcal{M}^r \operatorname{grad}^T\psi\, dx. \tag{53}$$

Безпосередні обчислення в правій частині співвідношень (50) приводять до такого вигляду $\mathcal{M}^r$:

$$\mathcal{M}^r = \mathcal{M} - \begin{Vmatrix} \mathcal{M}_{11} & \mathcal{M}_{12} \\ \mathcal{M}_{21} & \mathcal{M}_{22} \end{Vmatrix},$$

де оператор $\mathcal{M}$ має вигляд (45), а

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{11} &= -2c_2c_1^{-2}\left(\partial_x\vec{M} - \left[\vec{M}, \hat{I}\vec{M}\right]\right)\partial_x^{-1}\left(\vec{M}\partial_x + \left[\vec{M}, \hat{I}\vec{M}\right]\right) + \\ &+ c_1^{-1}\left(\partial_x\vec{M} - \left[\vec{M}, \hat{I}\vec{M}\right]\right)\partial_x^{-1}\vec{S}\partial_x + c_1^{-1}\partial_x\vec{S}\partial_x + c_1^{-1}\partial_x\vec{S}\partial_x^{-1}\left(\vec{M}\partial_x - \left[\vec{M}, \hat{I}\vec{M}\right]\right), \\ \mathcal{M}_{12} &= -2c_2c_1^{-2}\left(\partial_x\vec{M} - \left[\vec{M}, \hat{I}\vec{M}\right]\right)\partial_x^{-1}\left[\vec{M}, \vec{S}\right] + c_1^{-1}\partial_x\vec{S}\partial_x^{-1}\left[\vec{M}, \vec{S}\right] + \\ &+ c_1^{-1}\left(\partial_x\vec{M} - \left[\vec{M}, \hat{I}\vec{M}\right]\right)\partial_x^{-1}\vec{M}\partial_x, \\ \mathcal{M}_{21} &= -2c_2c_1^{-2}\left[\vec{S}, \vec{M}\right]\partial_x^{-1}\left(\vec{M}\partial_x - \left[\vec{M}, \hat{I}\vec{M}\right]\right) + c_1^{-1}\left[\vec{S}, \vec{M}\right]\partial_x^{-1}\vec{S}\partial_x + \\ &+ c_1^{-1}\partial_x\vec{M}\partial_x^{-1}\left(\vec{M}\partial_x - \left[\vec{M}, \hat{I}\vec{M}\right]\right), \\ \mathcal{M}_{22} &= -2c_2c_1^{-2}\left[\vec{S}, \vec{M}\right]\partial_x^{-1}\left[\vec{M}, \vec{S}\right] + c_1^{-1}\left[\vec{S}, \vec{M}\right]\partial_x^{-1}\vec{M}\partial_x + \\ &+ c_1^{-1}\partial_x\vec{M}\partial_x^{-1}\left[\vec{M}, \vec{S}\right]. \end{aligned} \tag{54}$$

Тут

$$\partial_x^{-1} = \frac{1}{2}\left(\int_{x_0}^{x}\cdot - \int_{x_0}^{x_0+T}\cdot\right)dx$$

— кососиметричний оператор „оберненого" диференціювання.

Необхідно відмітити, що редукована дужка (53) коректно визначена не на всьому просторі $D\left(\hat{\mathfrak{B}}_0^2\right)$, а на підмноговиді $D_0 \subset D\left(\hat{\mathfrak{B}}_0^2\right)$, визначеному умовою

$$D_0 \xrightarrow{\mathcal{M}^r} D\left(\hat{\mathfrak{B}}_0^2\right). \tag{55}$$

Обмеження (55) нетривіальне, тому що оператор $\mathcal{M}^r$ (54) нелокальний.

Гамільтонові рівняння нульової кривини (35) записуються в еквівалентній формі:

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{U}(x) = \left\{\vec{U}(x), \varphi\right\}_q = \mathcal{L}_q \operatorname{grad}^T\psi,$$

$$\vec{U}(x) \doteq (u_{1,2N_-+1}(x), u_{2,2N_-+1}(x), u_{3,N_+}(x)), \tag{56}$$

$$\operatorname{grad}\psi = \frac{\delta\psi}{\delta\vec{U}(x)}.$$

Пуассонові структури $\{\cdot,\cdot\}_q$ на многовиді $\mathfrak{B}_{N_-}^{N_+}$ мають, взагалі кажучи, нетривіальний центр. Проте вони стають невиродженими при обмеженні на орбіти коприєднаного зображення відповідних алгебр Лі $\hat{\mathfrak{G}}_q(N_+, N_-)$. Орбіти цих алгебр можна задати фіксацією функцій Казіміра, а умова просторової однорідності (по неперервному індексу x) зводить цю задачу до скінченновимірної.

Дотичний простір до орбіти (49) в $\mathfrak{G}_0^2$ складається з шестикомпонентних вектор-функцій $\left(\vec{A}(x), \vec{B}(x)\right)$ таких, що виконується співвідношення

$$\vec{M}\vec{A} + \vec{\mathcal{S}}\vec{B} = 0, \ \vec{M}\vec{B} = 0,$$
$$\left(\vec{A} = (A_1, A_2, A_3), \ \vec{B} = (B_1, B_2, B_3)\right). \tag{57}$$

Як відзначалося вище, оператор $\mathcal{L}$ (43) на просторі (57) можна обертати:

$$\mathcal{L}\mathcal{L}^{-1}\left(\vec{A}, \vec{B}\right)^T = \left(\vec{A}, \vec{B}\right)^T,$$
$$\mathcal{L}^{-1} = c_1^{-1}\begin{Vmatrix} 0 & [\vec{M}, \cdot\,] \\ [\vec{M}, \cdot\,] & -[\vec{\mathcal{S}}, \cdot\,] \end{Vmatrix}. \tag{58}$$

У випадку многовиду $\mathfrak{G}_0^2$, який ми розглядали вище, існування двох узгоджених дужок Пуассона (39) і (53) на орбіті (49) дозволяє ввести породжуючий оператор Λ як відношення двох гамільтонових:

$$\Lambda = \mathcal{L}^{-1}\mathcal{M}. \tag{59}$$

Редукція (53) забезпечує належність образу оператора $\mathcal{M}^r$ — $\mathcal{M}^r(D_0)$ простору, дотичному до орбіти (49), на якому визначений оператор $\mathcal{L}^{-1}$.

Оператор Λ породжує ієрархію комутуючих гамільтоніанів $\psi_k \in D_0\left(\mathfrak{G}_0^2\right)$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$\psi_k = \operatorname{grad}^{-1}\Lambda^{k-1}\operatorname{grad}^T\psi_1, \tag{60}$$

де ψ_1 — довільний („початковий") гамільтоніан рівняння нульової кривини (35). Ця і багато інших алгебраїчних властивостей породжуючого оператора Λ [8 – 11] є прямим наслідком леми 3 про узгодженість дужок Лі – Пуассона.

Співвідношення (60) і (56), зокрема, дозволяють уникнути дуже громіздких викладок технічного характеру при знаходженні вищих інтегралів руху і відповідних їм гамільтонових потоків.

Для ілюстрації розглянемо випадок $\mathfrak{G}_0^2$. Найпростіші нелінійні еволюційні рівняння на $\mathfrak{G}_0^2$ мають вигляд

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\mathcal{S}}, \vec{M}\right)^T(x) = \mathcal{M}\operatorname{grad}^T\psi_0, \tag{61}$$

де

$$\psi_0 = \int dx\left(\alpha\vec{M}^2(x) + \beta\vec{M}\vec{\mathcal{S}}(x)\right),$$

α, β — довільні константи,

$$\vec{\mathcal{S}}_t = \alpha\vec{\mathcal{S}}_x + \beta\left(\vec{M}_x + \left[\vec{M}, \hat{I}\vec{M}\right]\right); \ \vec{M}_t = \alpha\vec{M}_x + \beta\left[\vec{\mathcal{S}}, \vec{M}\right]. \tag{62}$$

Система (62) є умовою сумісності лінійних задач (U - V — пара типу Лакса), еквівалентних зображенню нульової кривини (35):

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \sum_{i=1}^{3}\left(S_i(x)\sigma_i^1 + M_i(x)\sigma_i^2\right)\right)\Phi(x,t) = 0, \tag{63}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \sum_{i=1}^{3}\left((\alpha S_i(x) + \beta M_i(x))\sigma_i^1 + M_i(x)\sigma_i^2\right)\right)\Phi(x,t) = 0. \tag{63$'$}$$

Серед „вищих" потоків, пов'язаних з лінійною задачею (63), ми не знайшли фізично цікавих, тому через складну оглядовість не наводимо їх. Цікавіший випадок простору $\mathfrak{G}^{\,0}_{-1}$. Найпростіша з ієрархії інтегровних систем на $\mathfrak{G}^{\,0}_{-1}$ еквівалентна рівнянням асиметричного кірального 0(3)-поля [12], а одне з „вищих" нелінійних рівнянь можна трактувати як узагальнення системи Ландау – Ліфшіца на випадок антиферомагнетика. Ці питання ми розглянемо в наступному пункті.

4. Гамільтонові структури, пов'язані з рівняннями кірального 0(3)–поля. На многовиді $\mathfrak{G}^{\,0}_{-1}$ можна ввести систему координат таким чином [4]:

$$\begin{aligned} u_i(x) &= -\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{I_i}}{\sqrt{I_1 I_2 I_3}}u_{i,-1}(x) + \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{I_1}}u_{i,0}(x)\right), \\ v_i(x) &= -\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{I_i}}{\sqrt{I_1 I_2 I_3}}u_{i,-1}(x) - \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{I_1}}u_{i,0}(x)\right). \end{aligned} \tag{64}$$

Очевидно, лінійна заміна координат оборотна (при $I_j \neq 0$):

$$\begin{aligned} u_{i,-1}(x) &= -\frac{\sqrt{I_1 I_2 I_3}}{\sqrt{I_i}}\left(u_i(x) + v_i(x)\right), \\ u_{i,0}(x) &= \sqrt{-I_i}\left(u_i(x) - v_i(x)\right). \end{aligned} \tag{65}$$

Дужки Лі – Пуассона (46) і відповідний гамільтонів оператор $\mathcal{L}$ в координатах (64) набувають вигляду

$$\begin{aligned} \{u_i(x), u_j(y)\}_1 &= \varepsilon_{ijk}u_k(x)\delta(x-y), \\ \{u_i(x), v_j(y)\}_1 &= 0, \\ \{v_i(x), v_j(x)\}_1 &= \varepsilon_{ijk}v_k(x)\delta(x-y) \end{aligned} \tag{66}$$

і

$$\mathcal{L} = \begin{Vmatrix} [\vec{U},\cdot\,] & 0 \\ 0 & [\vec{V},\cdot\,] \end{Vmatrix}$$

У кожній точці $x \in \mathbb{R}$ дужки (66) відтворюють комутаційні співвідношення алгебри Лі $SO(4)$, реалізованої у вигляді

$$SO(4) = SO(3) \oplus SO(3).$$

Друга пуассонова структура (47) і її гамільтонів оператор $\mathcal{M}$ (48) у нових координатах мають вигляд

$$\{u_i(x), u_j(y)\}_{-1} = \frac{\sqrt{-1}}{2\sqrt{I_1 I_2 I_3}}\,\delta_i^j\delta'(x-y) -$$

$$-\frac{1}{4}\varepsilon_{ijk}\left[\left(\frac{1}{I_1}+\frac{1}{I_2}+\frac{1}{I_3}\right)u_k(x) - \left(\frac{1}{I_1}+\frac{1}{I_2}+\frac{1}{I_3}\right)v_k(x)\right]\delta(x-y),$$

$$\{u_i(x), v_j(y)\}_{-1} = -\frac{1}{4}\varepsilon_{ijk}\left[\left(\frac{1}{I_1}+\frac{1}{I_2}+\frac{1}{I_3}-\frac{2}{I_j}\right)u_k(x) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{I_1}+\frac{1}{I_2}+\frac{1}{I_3}-\frac{2}{I_i}\right)v_k(x)\right]\delta(x-y),$$
$$\{v_i(x), v_j(y)\}_{-1} = \frac{\sqrt{-1}}{2\sqrt{I_1 I_2 I_3}}\delta_i^j\delta'(x-y) + \tag{67}$$
$$+\frac{1}{4}\varepsilon_{ijk}\left[\left(\frac{1}{I_1}+\frac{1}{I_2}+\frac{1}{I_3}-\frac{2}{I_k}\right)u_k(x) - \left(\frac{1}{I_1}+\frac{1}{I_2}+\frac{1}{I_3}\right)v_k(x)\right]\delta(x-y).$$

Для скорочення подальших викладок покладемо

$$\alpha = \frac{\sqrt{-1}}{2\sqrt{I_1 I_2 I_3}},\ \beta = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{I_1}+\frac{1}{I_2}+\frac{1}{I_3}\right),\ \hat{A} = \operatorname{diag}(A_1, A_2, A_3),$$
$$A_i = \beta - \frac{1}{2}I_i^{-1}. \tag{68}$$

У цих позначеннях маємо

$$\mathcal{M} = \left\|\begin{matrix} \alpha\partial_x + [\hat{A}\vec{V},\cdot\,] - \beta[\vec{U},\cdot\,] & -[\vec{U},\hat{A}\cdot\,] - \hat{A}[\vec{V},\cdot\,] \\ -\hat{A}[\vec{U},\cdot\,] - [\vec{V},\hat{A}\cdot\,] & -\alpha\partial_x + [\hat{A}\vec{U},\cdot\,] + \beta[\vec{V},\cdot\,] \end{matrix}\right\|. \tag{69}$$

Зафіксуємо значення функцій Казіміра $\vec{u}^2(x) = k,\ \vec{v}^2(x) = \kappa$ коприєднаної дії алгебри $\hat{\mathfrak{G}}_2(0,-1)$ на многовиді $\hat{\mathfrak{G}}^0_{-1}$. На просторах, дотичних до орбіт, оператор $\mathcal{L}$ оборотний:

$$\mathcal{L}^{-1} = -\left\|\begin{matrix} k^{-1}[\vec{U},\cdot\,] & 0 \\ 0 & \kappa^{-1}[\vec{V},\cdot\,] \end{matrix}\right\|. \tag{70}$$

Редукція дужки Пуассона (67) до дужки Дірака на орбіті задається гамільтоновим оператором $\mathcal{M}^r$:

$$\mathcal{M}^r = \mathcal{M} - \left\|\begin{matrix} \alpha k^{-1}\partial_x\vec{U}\partial_x^{-1}U\partial_x + k^{-1}\partial_x U\partial_x^{-1}[\vec{U},\hat{A}\vec{V}\,] + k^{-1}[A\vec{V},\vec{U}\,]\partial_x^{-1}\vec{U}\partial_x \\ \kappa^{-1}\partial_x\vec{V}\partial_x^{-1}[\vec{U},A\vec{V}\,] + k^{-1}[A\vec{U},\vec{V}\,]\partial_x^{-1}U\partial_x \end{matrix}\right.$$
$$\left.\begin{matrix} k^{-1}\partial_x\vec{U}\partial_x^{-1}[\vec{V},\hat{A}\vec{U}\,] + \kappa^{-1}[A\vec{V},\vec{U}\,]\partial^{-1}\vec{V}\partial_x \\ \alpha\kappa^{-1}\partial_x\vec{V}\partial_x^{-1}\vec{V}\partial_x + \kappa^{-1}\partial_x\vec{V}\partial_x^{-1}[\vec{V},A\vec{U}\,] + \kappa^{-1}[A\vec{U},\vec{V}\,]\partial_x^{-1}\vec{V}\partial_x \end{matrix}\right\|. \tag{71}$$

Узгодженість гамільтонової пари $\mathcal{L}$ і $\mathcal{M}$ на $\mathfrak{G}^0_{-1}$ є частковим наслідком твердження 1, а операторів $\mathcal{L}$ і $\mathcal{M}^r$ на орбіті випливає з леми 3.

Найпростіша еволюційна система на $\hat{\mathfrak{G}}^0_{-1}$ записується у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{u}, \vec{v})^T(x) = \left\{(\vec{u}, \vec{v})^T, \psi_0\right\}_{-1} = \mathcal{M}\operatorname{grad}^T\psi_0, \tag{72}$$

де

$$\psi_0 = \int dx\left(c_1\vec{u}^2(x) + c_2\vec{v}^2(x)\right),$$

а c_1, c_2 — довільні сталі.

Зокрема, при $c_1 = c_2 = 1/2$ маємо

$$\vec{u}_t = \alpha \vec{u}_x - 2\left[\vec{u}, \hat{A}\vec{v}\right], \ \vec{v}_t = -\alpha \vec{v}_x - 2\left[\vec{u}, \hat{A}\vec{u}\right]. \tag{73}$$

Система (73) співпадає з рівняннями асиметричного кірального 0(3)-поля [4, 12] в координатах світлового конуса і є гамільтоновим потоком із гамільтоніаном $h(\vec{u}, \vec{v})$:

$$h(\vec{u}, \vec{v}) = \int dx \left(\alpha \frac{u_1 u_{2x} - u_2 u_{1x}}{1 + u_3} - \alpha \frac{v_1 v_{2x} - v_2 v_{1x}}{1 + v_3} - 2\vec{u}\hat{A}\vec{v} \right) \tag{74}$$

і канонічною дужкою Пуассона (66).

Найбільш загальний локальний інтеграл із комутуючої сім'ї гамільтоніанів на орбітах $\vec{u}^2(x) = k, \vec{v}^2(x) = \kappa$ з $\mathfrak{G}_{-1}^{\,0}$ з похідними в густині не вище першого порядку має, очевидно, вигляд

$$\hat{h}(\vec{u}, \vec{v}) = \int dx \left(\alpha (c_1 + c_2) \frac{u_1 u_{2x} - u_2 u_{1x}}{1 + u_3} + \right.$$

$$\left. + \alpha (c_2 - c_1) \frac{v_1 v_{2x} - v_2 v_{1x}}{1 + v_3} - 2 c_1 \vec{u}\hat{A}\vec{v} \right). \tag{75}$$

Виходячи з інтеграла $\hat{h}(\vec{u}, \vec{v})$ можна побудувати рекурентним чином ієрархію вищих нелінійних систем на орбітах, які проходять через точку $\vec{u} = (u(x), 1) \in \mathfrak{G}_{-1}^{\,0}$:

$$\vec{u} \sim \partial_x - u(x) = \partial_x - \sum_{i=3}^{3} \left(\sqrt{-I_i}\,(u_i(x) - v_i(x))\sigma_i^0 - \right.$$

$$\left. - \frac{\sqrt{I_1 I_2 I_3}}{\sqrt{I_i}}((u_i(x) + v_i(x))\sigma_i^{-1} \right). \tag{76}$$

Для цього, як і в попередньому пункті, введемо породжуючий оператор $\Lambda = \mathcal{L}^{-1} \mathcal{M}^r$, який діє на послідовності градієнтів зсувом:

$$\operatorname{grad} h_n(\vec{u}, \vec{v}) = \Lambda^{n-1} \operatorname{grad} \hat{h}(\vec{u}, \vec{v}), \quad n \in \mathbb{N}, h_1 = \hat{h}. \tag{77}$$

Еволюційні потоки, які відповідають гамільтоніанам h_n, записуються у формі

$$(\vec{u}, \vec{v})_t^T = \mathcal{L}\Lambda^{n-1} \operatorname{grad}^T \hat{h}(\vec{u}, \vec{v}). \tag{78}$$

При $n = 2, c_1 = 1, c_2 = 0$ і $k = x = 1$ безпосередні обчислення за формулою (77) приводять до гамільтоніана

$$h_2(\vec{u}, \vec{v}) = \int dx \left\{ \alpha^2 \vec{u}_x^2 + \alpha^2 \vec{v}_x^2 + \alpha \hat{A}\vec{u}\,[\,\vec{v}, \vec{v}_x\,] + \alpha \hat{A}\vec{v}\,[\,\vec{u}, \vec{u}_x\,] - \right.$$

$$\left. - \hat{A}\vec{u} \cdot \hat{A}\vec{u} - \hat{A}\vec{v} \cdot \hat{A}\vec{v} + 2 A_1 A_2 A_3 \vec{u} \hat{A}^{-1} \vec{v} - (\vec{u}\hat{A}\vec{v})^2 \right\}. \tag{79}$$

Гамільтонова система з канонічною дужкою (66) і інтегралом енергії (79)

$$\vec{u}_t = \left[\vec{u}, \frac{\delta h_2}{\delta \vec{u}} \right], \ \vec{v}_t = \left[\vec{v}, \frac{\delta h_2}{\delta \vec{v}} \right] \tag{80}$$

є узагальненням рівняння Ландау – Ліфшіца (1) на випадок двограткових структур. Як відмітив А. Е. Боровик, гамільтоніани типу (79) зустрічаються в теорії надтекучого H_e^3, а також при описі динаміки спінових хвиль в антиферомагнетиках зі спеціальними магнітними надструктурами [13].

Оператор Лакса нелінійної системи Ландау – Ліфшіца у прийнятих вище позначеннях є точкою $\vec{U}$ многовиду σ_0^1:

$$\vec{U} \doteq (U(x), 1) \sim \partial_x - \sum_{i=1}^{3} u_i(x)\sigma_i^1. \tag{81}$$

Оператор (81) є, у деякому розумінні, „випадаючим" із загальної конструкції п. 2. А саме, на многовиді $\mathfrak{G}_0^1$ вдається визначити лише одну теоретико-групову дужку Лі – Пуассона (див. зауваження 5), яка відповідає індексу $q = 1$ (38):

$$\{ u_i(x), u_j(y) \}_1 = -\varepsilon_{ijk} u_k(x)\delta(x-y). \tag{82}$$

Явне знаходження другої гамільтонової структури системи (1) (існування якої доведено в [6, 15] вимагає проведення подвійної редукції дужки Лі – Пуассона на многовиді $\mathfrak{G}_{-1}^0$ до дужки Пуассона – Дірака.

Ці питання будуть висвітлені в іншій роботі.

1. *Боровик А. Е.* N-солитонные решения нелинейного уравнения Ландау – Лифшица // Письма в ЖЭТФ. – 1978. – **28**, № 10. – С. 629–632.
2. *Sklyanin E. K.* On complete integrability of the Landau – Lifshitz equation. – Leningrad, 1979. — Preprint LOMI E-3-79.
3. *Голод П. И.* Гамильтоновы системы, связанные с анизотропными алгебрами Ли, и высшие уравнения Ландау – Лифшица // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1984. – № 5. – С. 5–8.
4. *Барьяхтар В. Г., Белоколос Е. Д., Голод П. И.* Одномерные магнитные структуры и высшие уравнения Ландау – Лифшица. – Киев, 1984. – 128 р. – (Препринт / АН УССР. Ин-т теор. физики; 84).
5. *Рейман А. Г., Семенов-Тян-Шанский М. А.* Алгебры Ли и лаксовы уравнения со спектральным параметром на эллиптической кривой // Зап. научн. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **150**. – С. 104–118.
6. *Сидоренко Ю. Н.* Эллиптический пучок и порождающие операторы // Там же. – 1987. – **161**. – С. 76–87.
7. *Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.* Гамильтонов подход в теории солитонов. – М.: Наука, 1986. – 600 с.
8. *Oevel W.* Dirac constraints in field theory: lifts of Hamiltonian systems to the cotangent bundle // J. Math. Phys. – 1988. – **29**, № 1. – P. 210–219.
9. *Прикарпатский А. К., Микитюк И. В.* Алгебраические аспекты интегрируемости нелинейных динамических систем на многообразиях. – Киев: Наук. думка, 1991. – 270 с.
10. *Кулиш П. П.* Порождающие операторы интегрируемых нелинейных эволюционных уравнений // Зап. научн. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1980. – **96**. – С. 105–112.
11. *Митропольский Ю. А., Боголюбов Н. Н.(мл.), Прикарпатский А. К., Самойленко В. Г.* Интегрируемые динамические системы: спектральные и дифференциально-геометрические аспекты. – Киев: Наук. думка, 1987. – 286 с.
12. *Чередник И. В.* Об интегрируемости двумерного асиметричного кирального $O(3)$ поля и его квантового аналога // Ядерн. физика. – 1981. – **33**, № 1. – С. 278–281.
13. *Дзялошинский И. Е.* Теория геликоидальных структур в антиферромагнетиках. I. Неметаллы // Журн. эксперим. и теор. физики. – 1964. – **46**, № 4. – С. 1420–1437.
14. *Gerjikov V. S., Yanovski A. B.* Gauge-covariant formulation of the generating operator. I. The Zakharov – Shabat system // Phys. Lett. – 1984. – **103**A, № 5. – P. 232–236.
15. *Barouch E., Fokas A. S., Parageordiou V. G.* The bi-Hamiltonian formulation of the Landau – Lifschitz equation // J. Math. Phys. – 1988. – **29**, № 12. – P. 2628–2633.

Одержано 14.09.94