УДК 517.5

А. И. Степанец,
Р. А. Ласурия (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

СИЛЬНАЯ СУММИРУЕМОСТЬ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ. I

Questions of strong summability of Fourier series in orthonormal systems of functions of polynomial type are considered. A local characteristics of points at which such series for summable functions are strongly summable is found. It is shown that the set of these points is of complete measure in the segment of uniform boundedness of the considered systems.

Розглядаються питання сильної сумовності рядів Фур'є за ортонормованими системами поліноміального вигляду. Знайдено локальну характеристику точок сильної сумовності таких рядів для сумовних функцій. Показано, що множина цих точок має повну міру на відрізку рівномірної обмеженості систем, що розглядаються.

1. Постановка задачи. Пусть $f(x)$ — функция, суммируема на отрезке $[a, b]$ с весом $\omega(x)$ $(f \in L_\omega(a, b))$, $\{\varphi_k(x)\}_\omega$, $k = 0, 1, \ldots$ — ортонормированная с весом $\omega(x)$ система функций и

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x) \tag{1}$$

— ряд Фурье функции $f(\cdot)$ по системе $\{\varphi_k(\cdot)\}_\omega$;

$$c_k = c_k(f) = \int_a^b f(t)\varphi_k(x)\omega(x)dt, \quad k = 0, 1, \ldots . \tag{2}$$

Всюду далее $\omega(x)$ суммируема на $[a, b]$ и почти всюду $\omega(x) > 0$. Если $\omega(x) \equiv 1$, то вместо $L_\omega(a, b)$ будем писать $L(a, b)$.

Обозначим через $S_n(f; x)$ частную сумму ряда (1) и при некотором $q \in$ $\in (0, \infty)$ рассмотрим величину

$$H_{n,q}(f; x) = H_{n,q}(f; \varphi; x) = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left| f(x) - S_k(f; x) \right|^q \right)^{1/q}. \tag{3}$$

Если в некоторой точке $x \in [a, b]$

$$\lim_{n \to \infty} H_{n,q}(f; \varphi; x) = 0, \tag{4}$$

то говорят, что ряд (1) сильно суммируем с показателем q, или (H, q)-суммируем в данной точке x.

Тематика, связанная с сильным суммированием ортогональных разложений, берет свое начало в известных работах Харди и Литтлвуда [1, 2], которые рассмотрели вопросы сильного суммирования рядов Фурье по тригонометрической системе.

Пусть $f(x)$ — 2π-периодическая, суммируемая функция и

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \tag{1'}$$

— ее ряд Фурье. Харди и Литтлвуд рассмотрели вопрос: будет ли для всякой функции $f \in L \overset{\text{def}}{=} L(0, 2\pi)$ почти всюду выполняться соотношение

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left| f(x) - S_k(f; x) \right|^q = 0, \tag{5}$$

где $S_k(f; x)$ — частная сумма ряда (1′) и q — некоторое положительное число? Они показали, что если

$$f \in L^p = \left\{ f \in L : \|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^p \, dt \right)^{1/p} < \infty, \quad p \in [1, \infty) \right\},$$

то для $p > 1$ (5) выполняется при любом $q > 0$ в каждой p-точке Лебега функции $f(\cdot)$, т. е. в точке x, в которой справедливо равенство

$$\lim_{h \to \infty} \frac{1}{h} \sum_{x-h}^{x+h} |f(t) - f(x)|^p \, dt = 0. \tag{6}$$

Известно, что данное множество точек для функции $f \in L^p$, $p \geq 1$, имеет полную меру. Отметим, что случай $q = p = 2$ этого утверждения был рассмотрен Карлеманом [3].

Позже Харди и Литтлвудом [4] было показано, что при $p = 1$ это утверждение теряет силу, точнее они установили, что существует функция $f \in L \setminus L^p$, $p > 1$, для которой соотношение (5) может не выполняться в ее точках Лебега ни при каком $q > 0$. Тем не менее Марцинкевичем [5] и Зигмундом [6] было доказано, что соотношение (5) имеет место почти всюду для любых $f \in L$ и $q > 0$.

Таким образом, множество $e_q(f)$ точек, в которых выполняется (5), и множество точек Лебега данной функции $f(\cdot)$ в общем случае не совпадают, хотя их меры и одинаковы.

Поэтому естественно возникает задача о характеризации точек множества $e_q(f)$.

По-видимому, первый результат в этом направлении был получен Тандори [7]. Он указал достаточное условие принадлежности точки x к множеству $e_q(f)$. Однако множество точек, удовлетворяющих его условию, не имеет полной меры (см. [8]).

Существенные результаты в этом направлении получил О. Д. Габисония [9]. Он впервые охарактеризовал множество полной меры точек, входящих в $e_q(f)$, и ввел в рассмотрение величину

$$\Gamma_{n,s}(f; x) = \left(\sum_{k=1}^{[2\pi n]} \left(\frac{n}{k} \int_{(k-1)n^{-1}}^{kn^{-1}} h_x(t) dt \right)^s \right)^{1/s}, \quad s > 1, \tag{7}$$

где $h_x(t) = |f(x+t) - f(x)| + |f(x-t) - f(x)|$, и показал, во-первых, что для каждого $f \subset L$ при любых $s > 1$ почти всюду

$$\lim_{n \to \infty} \Gamma_{n,s}(f; x) = 0 \tag{8}$$

и, во-вторых, равенство (5) выполняется в тех точках x, в которых справедливо (8), когда $s = 2$.

Из известного неравенства (см., например, [10, с. 41])

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i^{q_1} \right)^{1/q_1} \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i^{q} \right)^{1/q}, \quad a_i \geq 0, \quad q_1 \in (0, q], \tag{9}$$

следует, что (H, q)-суммируемость влечет (H, q_1)-суммируемость, и поэтому соотношение (5) дает тем более сильный результат, чем больше q. В частности, О. Д. Габисония доказал, что равенство (5) справедливо для всех $q \in (0, 2]$ при $s = 2$. Позже И. Я. Новиков и В. А. Родин [11] показали, что соотношение

(5) выполняется и для $q > 2$ во всех точках x, в которых справедливо (8) при $s = q' = q/(q-1)$.

Аналог результата Харди и Литтлвуда для $f \in L^p$, $p > 1$, в случае ортогональных систем, отличных от тригонометрической, а именно, для систем функций $\{\varphi_k(\cdot)\}_\omega$ так называемого полиномиального вида, по-видимому, впервые был получен Тандори [12] (см. также [13, с. 289]) для функций $L_\omega(a, b)$, суммируемых в p-й степени с весом $\omega(x)$:

$$L^p_\omega(a, b) = \left\{ f \in L_\omega : \|f\|_{p, \omega(a,b)} = \left(\int\limits_a^b |f(t)|^p \omega(t)\, dt \right)^{1/p} \right\} < \infty, \quad p \in [1, \infty).$$

Определение 1 [13, с. 182]. *Ортонормированная на $[a, b]$ с весом $\omega(x)$ система функций $\{\varphi_k(x)\}_\omega$ называется системой полиномиального вида, если ее ядро порядка n*

$$\Phi_n(t, x) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(t)\varphi_k(x) \tag{10}$$

представимо в виде

$$\Phi_n(t, x) = \sum_{k=1}^{r} F_k(t, x) \sum_{i,j=-m}^{m} \gamma^{(n)}_{i,j,k}\, \varphi_{n+i}(t)\varphi_{n+j}(x), \tag{11}$$

где r и m — независящие от n натуральные числа, $\gamma^{(n)}_{i,j,k}$ — величины, равномерно ограниченные по n, а $F_k(t, x)$ — измеримые функции, удовлетворяющие при всех $x \in [a, b]$ условию

$$|F_k(t, x)| \le K|t - x|^{-1}, \tag{12}$$

где K — величина, равномерно ограниченная по t и x. При этом функции $\varphi_{n+j}(x)$ в (11) с отрицательными индексами считаются тождественно равными нулю.

Системами полиномиального вида, в частности, являются тригонометрическая система, система ортогональных полиномов (см. например, [13, с. 183]), системы Хаара и Уолша [14] и др.

Упомянутый результат Тандори содержится в следующем **утверждении.** *Пусть $\{\varphi_k(x)\}_\omega$ — ортонормированная на $[a, b]$ с весом $\omega(x)$ система функций полиномиального вида, равномерно ограниченная на отрезке $[c, d] \subseteq [a, b]$:*

$$\sup_{\substack{x \in [c,d] \\ k \in N}} |\varphi_k(x)| \le K = \text{const}, \tag{13}$$

и

$$\varphi_0(x) \equiv 1 / \int_a^b \omega(t)\, dt.$$

Тогда если $f \in L^p_\omega(a, b)$ и квадрат ее суммируем на $[a, b] \setminus [c, d]$ с весом $\omega(\cdot)$, то в каждой p-точке Лебега $x \in (c, d)$, т. е. в точке, в которой выполняется равенство

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int\limits_{x-h}^{x+h} |f(t) - f(x)|^p \omega(t)\, dt = 0, \tag{6'}$$

при всех $q > 0$ справедливо соотношение (4).

В [12] показано, что равенство (6′) выполняется почти всюду на (a, b) для любого $f \in L_\omega(a, b)$. В случае $f \in L_\omega(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} L^1_\omega(a, b)$ вопросы, связанные с выполнением соотношения (4) на множествах полной меры для разложений по общим системам полиномиального вида, по-видимому, до сих пор не рассматривались даже в случае полиномиальных систем. Именно рассмотрение этих вопросов и является основной целью настоящей работы.

Как показывает пример тригонометрической системы, в общем случае нельзя надеяться на то, что соотношение (4) для таких систем будет выполняться в каждой точке Лебега функции $f(\cdot)$. Заметим также, что в отличие от периодического случая для общих систем полиномиального вида до сих пор нам не был известен аналог утверждений Марцинкевича и Зигмунда о выполнении равенства (5) почти всюду.

В настоящей работе вводится величина $h^{(\omega)}_{n,s}(f; x)$, характеризующая локальные метрические свойства функции $f(\cdot)$ в точке x, которая эквивалентна величине $\Gamma_{n,s}(f; x)$ в том смысле, что соотношения (8) и

$$\lim_{n \to \infty} h^{(\omega)}_{n,s}(f; x) = 0 \quad \text{при} \quad \omega(\cdot) \equiv 1 \tag{14}$$

могут выполняться только одновременно.

Показывается, что для любого $f \in L_\omega(a, b)$ множество тех точек x, в которых выполняется (14), имеет полную меру на $[a, b]$.

Доказано, что при определенных условиях, налагаемых на системы $\{\varphi_n(x)\}_\omega$, в точках, в которых выполняется равенство (14), справедливо и (4).

2. Вспомогательные предложения. $h_{p,\omega}$-точки суммируемых с весом функций. Определение 2. *Пусть $f(\cdot)$ — суммируемая с весом $\omega(\cdot)$ на интервале (a, b) функция, $x \in (a, b)$ и $u_\delta(x)$ — окрестность точки x, целиком лежащая на (a, b). При каждом натуральном n разобьем $u_\delta(x)$ на $2n$ равных частей $\Delta^{(n)}_k = \Delta^{(n)}_k(\delta)$, $k = -n, \ldots, -1, 1, \ldots, n$, точками $x_k = x + \delta k/n$, $|k| = 0, 1, \ldots, n$, и при некотором $p > 1$ рассмотрим величину*

$$h^{(\omega)}_{n,p}(f; x; \delta) = \sum_{1 \le |k| \le n} \left(\frac{n}{|k|} \int_{\Delta^{(n)}_k} |f(t) - f(x)|\omega(t)\,dt \right)^p. \tag{15}$$

Тогда точку x назовем $h_{p,\omega}$-точкой функции $f(\cdot)$, если

$$\lim_{n \to \infty} h^{(\omega)}_{n,p}(f; x; \delta) = 0. \tag{16}$$

Множество всех $h_{p,\omega}$-точек функции $f(\cdot)$ на промежутке (a, b) обозначим через $H^{(\omega)}_p$, $H^{(\omega)}_p = \{ x \in (a, b) : \lim_{h \to \infty} h^{(\omega)}_{n,p}(f; x; \delta) = 0 \}$. Множество отрезков $\Delta^{(n)}_k$, $|k| = 1, 2, \ldots, n$, входящих в это определение, будем обозначать через $D_n(\delta)$.

Определение $h_{p,\omega}$-точки данной функции $f(\cdot)$ не зависит от радиуса окрестности δ, т. е. справедливо следующее утверждение.

Предложение 1. *Пусть $x \in (a, b)$, $0 < \delta < \delta_1$, и окрестности $u_\delta(x)$ и $u_{\delta_1}(x)$ лежат на (a, b). Тогда для любой функции $f \in L_\omega(a, b)$ соотношения*

$$\lim_{h \to \infty} h^{(\omega)}_{n,p}(f; x; \delta_1) = 0 \tag{17}$$

и

$$\lim_{h\to\infty} h_{m,p}^{(\omega)}(f; x; \delta) = 0 \tag{18}$$

могут выполняться только одновременно.

Для доказательства этого предложения понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Пусть E — измеримое по Лебегу ограниченное множество и при каждом натуральном n $e_k^{(n)}$, $k = 1, 2, \dots, m_n$, — совокупность непересекающихся измеримых подмножеств E, для которых*

$$\lim_{n\to\infty} \max_{k\le m_n} \operatorname{mes} e_k^{(n)} = 0. \tag{19}$$

Тогда для любой суммируемой с весом $\omega(\cdot)$ функции $f(\cdot)$ и любого $p > 1$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m_n} \left(\int_{e_k^{(n)}} |f(t)|\omega(t)\,dt \right)^p = 0.$$

Доказательство. Пусть

$$\int_{e_k^{(n)}} |f(t)|\omega(t)\,dt = i_k^{(n)}, \quad i_{k_n} = \max_{k\le m_n} i_k^{(n)}.$$

Тогда при каждом фиксированном n имеем

$$\sum_{k=1}^{m_n} (i_k^{(n)})^p = \sum_{k=1}^{m_k} (i_k^{(n)})^{p-1} i_k^{(n)} \le (i_{k_n})^{p-1} \sum_{k=1}^{m_n} i_k^{(n)} \le$$

$$\le (i_{k_n})^{p-1} \int_E |f(t)|\omega(t)\,dt.$$

Остается заметить, что в силу абсолютной непрерывности интеграла и условия (19)

$$\lim_{n\to\infty} i_{k_n} = 0.$$

***Доказательство предложения* 1.** Пусть при достаточно больших n и m $\Delta_k^{(n)}(\delta_1)$ и $\Delta_k^{(n)}(\delta)$ — отрезки, входящие в определение величин соответственно $h_{n,p}^{(\omega)}(f; x; \delta_1)$ и $h_{m,p}^{(\omega)}(f; x; \delta)$. Обозначим через m_n номер отрезка $\Delta_k^{(n)}(\delta_1)$, который содержит точку $x + \delta$ (если таких отрезков окажется два, пусть m_n обозначает номер отрезка, для которого точка $x + \delta$ совпадает с его левым концом). Разобьем окрестность $u_\delta(x)$ на $2m_n$ равных частей $\tilde{\Delta}_k^{(m_n)} = \tilde{\Delta}_k^{(m_n)}(\delta)$, $|k| = 1, 2, \dots, m_n$, рассмотрим величину $h_{m_n,p}^{(\omega)}(f; x; \delta)$ и прежде всего убедимся, что соотношение (18) и равенство

$$\lim_{n\to\infty} h_{m_n,p}^{(\omega)}(f; x; \delta) = 0 \tag{20}$$

могут выполняться только одновременно.

В рассматриваемом случае

$$\frac{\delta_1}{n}(m_n - 1) \le \delta < \frac{\delta_1 m_n}{n},$$

или

$$\frac{\delta}{\delta_1} n < m_n \le \frac{\delta}{\delta_1} n + 1, \tag{21}$$

откуда следует, что при достаточно больших n

$$m_{n+1} - m_n < \frac{\delta}{\delta_1} + 1 < 2,$$

т. е. при увеличении значения n на единицу значение m_n может увеличиваться только на единицу; в то же время ясно, что последовательность $\{m_n\}$ не убывает и $\lim\limits_{n\to\infty} m_n = \infty$. Отсюда заключаем, что последовательность $\{m_n\}$, монотонно не убывая, начиная с некоторого номера n_0 пробегает все значения натурального ряда, возможно принимая некоторые из них подряд конечное число раз. Остается заметить, что при $m = m_n$ величины $h_{m,p}^{(\omega)}(f; x; \delta)$ и $h_{m_n,p}^{(\omega)}(f; x; \delta)$ совпадают. Таким образом, равенства (18) и (20) могут выполняться одновременно. Покажем теперь, что соотношения (17) и (20) могут выполняться только одновременно, откуда и будет следовать предложение 1.

Имеем

$$h_{n,p}^{(\omega)}(f; x; \delta_1) = \sum_{1 \le |k| \le m_n} \left(\frac{n}{|k|} \int\limits_{\Delta_k^{(n)}} |f(t) - f(x)| \omega(t)\, dt \right)^p +$$

$$+ \sum_{m_n < |k| \le n} \left(\frac{n}{|k|} \int\limits_{\Delta_k^{(n)}} |f(t) - f(x)| \omega(t)\, dt \right)^p \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{h}_{m_n,p}^{(\omega)}(f; x; \delta_1) + \tilde{r}_{m_n,p}^{(\omega)}(f; x; \delta_1), \tag{22}$$

причем в силу (21) при достаточно больших n найдется постоянная M такая, что при $m_n \le |k| \le n$ будет $n/|k| \le M$ и тогда

$$\tilde{r}_{m_n,p}^{(\omega)}(f; x; \delta_1) \le M^p \sum_{m_n \le |k| \le n} \left(\frac{n}{|k|} \int\limits_{\Delta_k^{(n)}} |f(t) - f(x)| \omega(t)\, dt \right)^p.$$

Так как значение $f(x)$ конечно, то функция $\overline{\varphi}_x(t) = f(t) - f(x)$ суммируема с весом $\omega(t)$ на (a, b); $\operatorname{mes} \Delta_k^{(n)} = \delta_1 / n$, т. е. выполнены все условия леммы 1, применяя которую, заключаем, что в рассматриваемом случае

$$\lim_{n\to\infty} r_{m_n,p}^{(\omega)}(f; x; \delta_1) = 0 \tag{23}$$

и остается показать, что равенства (20) и

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{h}_{m_n,p}^{(\omega)}(f; x; \delta_1) = 0 \tag{24}$$

могут выполняться только одновременно.

Промежутки $\tilde{\Delta}_k^{(m_n)}$ короче промежутков $\Delta_k^{(n)}$, поэтому

$$\int\limits_{\tilde{\Delta}_1^{(m_n)}} |\overline{\varphi}_x(t)| \omega(t)\, dt \le \int\limits_{\Delta_1^{(n)}} |\overline{\varphi}_x(t)| \omega(t)\, dt$$

и при $k > 1$

$$\left(\frac{n}{|k|} \int\limits_{\tilde{\Delta}_k^{(m_n)}} |\overline{\varphi}_x(t)| \omega(t)\, dt \right)^p \le \left(\frac{n}{|k|} \int\limits_{\Delta_{k-1}^{(n)}} |\overline{\varphi}_x(t)| \omega(t)\, dt + \right.$$

$$\left. + \frac{n}{|k|} \int\limits_{\Delta_k^{(n)}} |\overline{\varphi}_x(t)| \omega(t)\, dt \right)^p \le$$

$$\leq 2^p \left(\left(\frac{n}{|k-1|} \int_{\Delta_{k-1}^{(n)}} |\overline{\varphi}_x(t)| \omega(t) dt \right)^p + \left(\frac{n}{|k|} \int_{\Delta_k^{(n)}} |\overline{\varphi}_x(t)| \omega(t) dt \right)^p \right).$$

Ясно, что аналогичная оценка справедлива и при $k < -1$. Поэтому, обозначая через K_p величину, которая может зависеть только от p, и учитывая, что согласно (21)

$$\frac{\delta}{\delta_1} < \frac{m_n}{n} \leq \frac{\delta}{\delta_1} + \frac{1}{n},$$

получаем

$$h_{m_n,p}^{(\omega)}(f; x; \delta) \leq K_p \tilde{h}_{m_n,p}^{(\omega)}(f; x; \delta_1). \tag{25}$$

Отсюда заключаем, что из равенства (24) следует (20).

Чтобы показать, что из (20) вытекает (24), заметим, что при $k \geq 1$

$$\tilde{\Delta}_k^{(m_n)} = \left[x + \frac{\delta}{m_n}(k-1),\ x + \frac{\delta}{m_n} k \right], \quad \tilde{\Delta}_k^{(n)} = \left[x + \frac{\delta_1}{n}(k-1),\ x + \frac{\delta_1}{n} k \right],$$

откуда с учетом (21) легко заключаем, что

$$\Delta_1^{(n)} \subset \tilde{\Delta}_1^{(m_n)} \cup \tilde{\Delta}_2^{(m_n)}, \quad \Delta_k^{(n)} \subset \tilde{\Delta}_{k-1}^{(m_n)} \cup \tilde{\Delta}_k^{(m_n)} \cup \tilde{\Delta}_{k+1}^{(m_n)}, \quad k = 2, 3, \ldots, m_n - 1. \tag{26}$$

Поэтому с учетом (21)

$$\left(m_n \int_{\Delta_1^{(n)}} |\overline{\varphi}_x(t)| \omega(t) dt \right)^p \leq \left(n \int_{\tilde{\Delta}_1^{(m_n)}} |\overline{\varphi}_x(t)| \omega(t) dt + \right.$$

$$\left. + n \int_{\tilde{\Delta}_2^{(m_n)}} |\overline{\varphi}_x(t)| \omega(t) dt \right)^p \leq$$

$$\leq K_p \left(\left(n \int_{\tilde{\Delta}_1^{(m_n)}} |\overline{\varphi}_x(t)| \omega(t) dt \right)^p + \left(\frac{n}{2} \int_{\tilde{\Delta}_2^{(m_n)}} |\overline{\varphi}_x(t)| \omega(t) dt \right)^p \right). \tag{27}$$

Аналогично, в силу (26) и (21) при $k = 2, 3, \ldots, m_n - 1$,

$$\left(\frac{m_n}{k} \int_{\Delta_k^{(n)}} |\overline{\varphi}_x(t)| \omega(t) dt \right)^p \leq K_p \left(\left(\frac{n}{k-1} \int_{\tilde{\Delta}_{k-1}^{(m_n)}} |\overline{\varphi}_x(t)| \omega(t) dt \right)^p + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{n}{k} \int_{\tilde{\Delta}_k^{(m_n)}} |\overline{\varphi}_x(t)| \omega(t) dt \right)^p + \left(\frac{n}{k+1} \int_{\tilde{\Delta}_k^{(m_n)}} |\overline{\varphi}_x(t)| \omega(t) dt \right)^p \right). \tag{28}$$

Ясно, что оценки, аналогичные неравенствам (27), (28), справедливы и при $k = -1, -2, \ldots, -m_n$. Поэтому

$$\tilde{h}_{m_n,p}^{(\omega)}(f; x; \delta_1) \leq K_p \left(h_{m_n,p}^{(\omega)}(f; x; \delta) + \left(\int_{\Delta_{m_n}^{(n)}} |\overline{\varphi}_x(t)| \omega(t) dt \right)^p \right). \tag{29}$$

Отсюда с учетом леммы 1 вытекает, что если выполняется равенство (20), то выполняется и (24), что и завершает доказательство предложения 1.

Замечание. В принятых обозначениях положим

$$h_{n,p}^{(\omega)_+}(f;\, x;\, \delta) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n}{|k|} \int_{\Delta_k^{(n)}} |\overline{\varphi}_x(t)|\omega(t)\,dt \right)^p,$$

$$h_{n,p}^{(\omega)_-}(f;\, x;\, \delta) = \sum_{k=-n}^{-1} \left(\frac{n}{|k|} \int_{\Delta_k^{(n)}} |\overline{\varphi}_x(t)|\omega(t)\,dt \right)^p$$

и заметим, что равенство (16) возможно тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty} h_{n,p}^{(\omega)_+}(f;\, x;\, \delta) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} h_{n,p}^{(\omega)_-}(f;\, x;\, \delta) = 0. \tag{30}$$

При доказательстве предложения 1 фактически установлено, что соотношения

$$\lim_{n\to\infty} h_{n,p}^{(\omega)_+}(f;\, x;\, \delta_1) = 0 \tag{31}$$

и

$$\lim_{m\to\infty} h_{m,p}^{(\omega)_+}(f;\, x;\, \delta) = 0, \tag{31$'$}$$

а также соотношения

$$\lim_{n\to\infty} h_{n,p}^{(\omega)_-}(f;\, x;\, \delta_1) = 0 \tag{32}$$

и

$$\lim_{m\to\infty} h_{m,p}^{(\omega)_-}(f;\, x;\, \delta) = 0 \tag{32$'$}$$

могут выполняться только одновременно.

Значит, если x есть $h_{p,\omega}$-точка функции $f(\cdot)$, то необходимо выполняются все равенства (30) – (32′). С другой стороны, справедливость одной из пар равенств (31) и (32), (31) и (32′), (31′) и (32), а также (31′) и (32′) влечет справедливость остальных пар, а следовательно, и тот факт, что $x \in H_p^{(\omega)}$. Отсюда с учетом предложения 1 заключаем, что в определении $h_{p,\omega}$-точки окрестность $u_\delta(x)$ можно заменить любым интервалом, содержащим точку x и лежащим на (a, b). Таким образом, приходим к следующему эквивалентному определению $h_{p,\omega}$-точки функции $f(\cdot)$.

Определение 3. *Пусть $f \in L_\omega(a, b)$, $x \in (a, b)$ и (c, d) — любой интервал такой, что $x \in (c, d)$ и $a \le c < d \le b$. При каждых натуральных n и m разобьем промежутки $[c, d]$ и $[x, d]$ соответственно на n и m равных частей $\Delta_k^{(n)}$, $k = -n, \ldots, -1$, и $\Delta_i^{(m)}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, и при некотором $p > 1$ рассмотрим величину*

$$h_{n,m,p}^{(\omega)}(f;\, x) = \sum_{k=-n}^{-1} \left(\frac{n}{|k|} \int_{\Delta_k^{(n)}} |f(t) - f(x)|\omega(t)\,dt \right)^p +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{m}{i} \int_{\Delta_i^{(m)}} |f(t) - f(x)|\omega(t)\,dt \right)^p. \tag{33}$$

Точку x назовем $h_{p,\omega}$-точкой функции $f(\cdot)$, если

$$\lim_{n,m\to\infty} h_{n,m,p}^{(\omega)}(f;\,x) = 0. \tag{34}$$

Лемма 2. *Для любой функции* $f\in L_\omega(a,b)$, *при любых* $p>1$ *и* $\delta>0$ *почти всюду на* $[a,b]$ *справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty} h_{n,p}^{(\omega)}(f;\,x;\,\delta) = 0, \tag{35}$$

где $h_{n,p}^{(\omega)}(f;\,x;\,\delta)$ *— величина, определяемая соотношением* (15).

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда почти всюду на $[a,b]$

$$0<\alpha\le\omega(x)\le K<\infty. \tag{36}$$

В этом случае условие $f\in L_\omega(a,b)$ равносильно условию $f\in L(a,b)$ и при каждом $n\in N$

$$\sum_{1\le|k|\le n}\left(\frac{n}{|k|}\int_{\Delta_k^{(n)}}|f(t)-f(x)|\omega(t)\,dt\right)^p\le$$

$$\le K^p\sum_{1\le|k|\le n}\left(\frac{n}{|k|}\int_{\Delta_k^{(n)}}|f(t)-f(x)|\,dt\right)^p.$$

Поэтому достаточно показать, что для любой функции $f\in L(a,b)$ при любых $p>1$ и $\delta>0$ почти всюду на $[a,b]$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{1\le|k|\le n}\left(\frac{n}{|k|}\int_{\Delta_k^{(n)}}|f(t)-f(x)|\,dt\right)^p = 0. \tag{37}$$

Этот факт легко следует из упомянутого выше результата О. Д. Габисония и предложения 1.

Действительно, пусть для определенности $a=0$ и $b=2\pi$. Ясно, что общий случай сводится к этому путем линейной замены переменной и, следовательно, такое допущение не умаляет общности.

Пусть $F(x)$ — 2π-периодическое продолжение функции $f(x)$ и x — произвольная точка из (a,b). Тогда величины $h_{n,p}^{(\omega)}(F;\,x;\,\pi)$ при $\omega(x)\equiv 1$ и $\Gamma_{n,p}(F;\,x)$ совпадают. Поэтому если выполняется равенство (8) для функции $F(\cdot)$, то в данной точке

$$\lim_{n\to\infty} h_{n,p}^{(\omega)}(F;\,x;\,\pi) = 0. \tag{38}$$

Но в таком случае в силу предложения 1 для достаточно малых δ будет выполняться и равенство (35). Согласно результатам О. Д. Габисония, множество точек, в которых

$$\lim_{n\to\infty}\Gamma_{n,p}(F;\,x) = 0,$$

имеет полную меру на $(0,2\pi)$. Стало быть, и множество точек, в которых выполняется (35), также имеет полную меру. Итак, если выполнено условие (36), лемма доказана.

Заметим, что из только что проведенных рассуждений вытекает, что условие (8), а значит, и факт (H,q)-суммируемости ряда $(1')$ имеют локальный характер в том смысле, что их выполнение зависит только от поведения функции $f(\cdot)$ в произвольно малой окрестности рассматриваемой точки x.

При доказательстве леммы в общем случае в значительной степени будем придерживаться схемы рассуждений из [9].

Пусть, сначала T — подмножество точек из $[a, b]$, в которых выполняется равенство ($6'$) при $p = 1$, и, кроме того, при достаточно малых δ и $\gamma(x) \equiv 1$ почти всюду

$$\lim_{n \to \infty} h_{n,p}^{(\gamma)}(\omega; x; \delta) = 0. \tag{39}$$

В силу упомянутого результата Тандори и справедливости леммы в случае выполнения условия (36) заключаем, что $T \overset{\text{def}}{=} \operatorname{mes} T = b - a$. Далее, пользуясь теоремой Егорова, из множества T при каждом натуральном k выделим множества T_k, $|T_k| > b - a - 1/k$, на которых равенства ($6'$) и (39) выполняются равномерно по x.

Ясно, что

$$\Big|\bigcup_k T_k\Big| = b - a. \tag{40}$$

Из каждого множества T_k, пользуясь C-свойством Лузина, выделим совершенное множество P_k, $|P_k| > |T_k| - 1/k$, на котором

$$\sup_{x \in P_k} |f(x)| < A_k \tag{41}$$

и

$$\sup_{x \in P_k} |\omega(x)| < B_k, \tag{41$'$}$$

где A_k и B_k — некоторые постоянные.

Наконец, из каждого множества P_k выделим множество E_k, имеющее то свойство, что для каждого $x \in E_k$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)}}{\rho(x; \alpha_j^{(k)}, \beta_j^{(k)})} \right)^p < \infty, \quad p > 1, \tag{42}$$

где $\alpha_j^{(k)}$ и $\beta_j^{(k)}$ — концы смежных интервалов множества P_k, а $\rho(x, \alpha, \beta)$ — расстояние от точки x до интервала (α, β).

В силу известного утверждения Марцинкевича (см., например, [15, с. 213] $|E_k| = |P_k|$. И, значит, с учетом (40) будем иметь

$$\Big|\bigcup_k E_k\Big| = b - a. \tag{43}$$

Поэтому для доказательства леммы достаточно убедиться, что равенство (35) выполняется для каждого $x \in \bigcup_k E_k$ при произвольном достаточно малом $\delta >$ > 0.

Покажем, что для каждого $x \in \bigcup_k E_k$ при любом $\delta > 0$ величина

$$h_{n,p}^{(\omega)+}(f; x; \delta) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{n}{i} \int\limits_{\Delta_i^{(n)}} |f(t) - f(x)| \omega(t)\, dt \right)^p = 0 \tag{44}$$

стремится к нулю при $n \to \infty$.

Пусть k_0 такое, что $x \in E_k$ и $u_\delta(x)$ — окрестность точек x, целиком лежащая на (a, b), $\{\Delta_i^{(n)}\}$, $i = -n, \ldots, -1, 1, \ldots, n$, — равномерное разбиение этой окрестности на $2n$ частей такое, что

$$\Delta_i^{(n)} = \begin{cases} \left[x + \dfrac{i-1}{n}\delta,\ x + \dfrac{i\delta}{n} \right], & i = 1, 2, \ldots, n; \\ \left[x + \dfrac{i\delta}{n},\ x + \dfrac{i+1}{n}\delta \right], & i = -n, \ldots, -1. \end{cases} \tag{45}$$

Пусть, далее,

$$I_1 = \{ i : \Delta_i^{(n)} \cap P_{k_0} \neq \varnothing \}, \quad I_2 = \{ i : \Delta_i^{(n)} \cap P_{k_0} = \varnothing \}. \tag{46}$$

Тогда величина (44) представится в виде

$$h_{n,p}^{(\omega)_+}(f; x; \delta) = \sum\nolimits_1 (f; n; x) + \sum\nolimits_2 (f; n; x), \tag{47}$$

где

$$\sum\nolimits_1 (f; n; x) = \sum_{i \in I_1} \left(\frac{n}{i} \int\limits_{\Delta_i^{(n)}} |f(t) - f(x)| \omega(t)\, dt \right)^p$$

и

$$\sum\nolimits_2 (f; n; x) = \sum_{i \in I_2} \left(\frac{n}{i} \int\limits_{\Delta_i^{(n)}} |f(t) - f(x)| \omega(t)\, dt \right)^p.$$

Рассмотрим сначала величину $\sum_1 (f; n; x)$. Если $i \in I_1$, то согласно (46) на промежутке $\Delta_i^{(n)}$ имеется точка из P_{k_0}, которую обозначим через y. Тогда, полагая $t = u + y$ и $\tau = x + i\delta/n - y$, будем иметь

$$n \int\limits_{\Delta_i^{(n)}} |f(t) - f(x)| \omega(t)\, dt = n \int\limits_{\tau - \delta/n}^{\tau} |f(u+y) - f(x)| \omega(u+y)\, du \le$$

$$\le n \int\limits_{-2\delta/n}^{2\delta/n} |f(t+y) - f(y)| \omega(t+y)\, dt + n \int\limits_{-2\delta/n}^{2\delta/n} |f(y) - f(x)| \omega(t+y)\, dt. \tag{48}$$

По построению имеем $E_k \subseteq P_k \subseteq T_k \subseteq T$.

В силу определений этих множеств, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\gamma > 0$ (возможно, зависящее от k, ε) такое, что при $|h| < \gamma$ будет выполняться неравенство

$$\sup_{x \in T_k} \frac{1}{h} \int\limits_{-h}^{h} |f(x+t) - f(x)| \omega(x+t)\, dt < \varepsilon \tag{49}$$

и найдется натуральное число n_0 (возможно, зависящее от ε, k и δ) такое, что при $n \ge n_0$

$$\sup_{x \in T_k} \sum_{1 \le i \le n} \left(\frac{n}{|i|} \int\limits_{\Delta_i^{(n)}} |\omega(t) - \omega(x)|\, dt \right)^p < \varepsilon. \tag{50}$$

Принимая во внимание, что в рассматриваемом случае $x \in E_{k_0}$, а $y \in P_{k_0}$, на основании (49) и (50), (41) и (41$'$) заключаем, что правая часть (47) не превышает некоторой постоянной C_{k_0}, которая, возможно, зависит от числа k_0. Таким образом,

$$n \int_{\Delta_i^{(n)}} |f(t)-f(x)|\omega(t)\,dt \le C_{k_0} \quad \forall i \in I_1. \tag{51}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно малое число. Обозначим через N_ε натуральное число, для которого

$$\sum_{i \ge N_\varepsilon} \frac{1}{i^p} \le \varepsilon \tag{52}$$

и положим $I_1 = I_1' \cup I_1''$, $I_1' = \{ i \in I_1, i \le N_\varepsilon \}$, $I_1'' = \{ i \in I_1, i > N_\varepsilon \}$.

Тогда в силу (51)

$$\sum\nolimits_1 (f; n; x) = \sum_{i \in I_1'} \left(\frac{n}{i} \int_{\Delta_i^{(n)}} |f(t) - f(x)|\omega(t)\,dt \right)^p + C_{k_0}\varepsilon \le$$

$$\le \sum_{i \in I_1'} \left(n \int_{(i-1)\delta/n}^{i\delta/n} |f(x+t) - f(x)|\omega(x+t)\,dt \right)^p + C_{k_0}\varepsilon \le$$

$$\le \left(n \int_0^{N_\varepsilon \delta/n} |f(x+t) - f(x)|\omega(x+t)\,dt \right)^p + C_{k_0}\varepsilon. \tag{53}$$

Так как $x \in E_{k_0}$, то в силу (49) при достаточно больших значениях n первое слагаемое правой части (53) будет меньше ε. Таким образом, справедлива оценка

$$\sum\nolimits_1 (f; n; x) \le (C_{k_0} + 1)\varepsilon$$

для всех достаточно больших значений n. Отсюда в силу произвольности выбора ε имеем

$$\lim_{n \to \infty} \sum\nolimits_1 (f; n; x) = 0. \tag{54}$$

Покажем теперь, что и

$$\lim_{n \to \infty} \sum\nolimits_2 (f; n; x) = 0. \tag{55}$$

Пусть опять $\varepsilon > 0$ — произвольно малое число и N_ε выбрано из условия (52). Положим

$$I_1 = I_2' \cup I_2'', \quad I_2' = \{ i \in I_2, i \le N_\varepsilon \}, \quad I_2'' = \{ i \in I_2, i > N_\varepsilon \}.$$

Тогда

$$\sum\nolimits_2 (f; n; x) \le \left(\sum_{i \in I_2'} + \sum_{i \in I_2''} \right) \left(\frac{n}{i} \int_{\Delta_i^{(n)}} |f(t) - f(x)|\omega(t)\,dt \right)^p \overset{\text{def}}{=}$$

$$\overset{\text{def}}{=} \sum\nolimits_2^{(1)} (f; n; x) + \sum\nolimits_2^{(2)} (f; n; x). \tag{56}$$

Поступая так же, как и при получении оценки (53), будем иметь

$$\sum\nolimits_2^{(1)} (f; n; x) \le \left(n \int_0^{N_\varepsilon \delta/n} |f(x+t) - f(x)|\omega(x+t)\,dt \right)^p,$$

и так как x является (p, ω)-точкой Лебега функции $f(\cdot)$, то в силу $(6')$

$$\lim_{n\to\infty} \sum\nolimits_2^{(1)}(f; n; x) = 0. \tag{57}$$

Пусть $\delta_j^{(k_0)} = (\alpha_j^{(k_0)}, \beta_j^{(k_0)})$, $j = 1, 2, \ldots$, — смежные интервалы множества P_{k_0}. Тогда, опуская индексы k_0, находим

$$\sum\nolimits_2^{(2)}(f; n; x) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i\in I_2''} \left(\frac{n}{i} \int\limits_{\Delta_i^{(n)}\subset\delta_j} |f(t) - f(x)|\omega(t)\,dt \right)^p \le$$

$$\le 2^p \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i\in I_2''} \left(\frac{n}{i} \int\limits_{\Delta_i^{(n)}\subset\delta_j} \left|f(t) - f(\alpha_j)\right|\omega(t)\,dt \right)^p +$$

$$+ 2^p \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i\in I_2''} \left(\frac{n}{i} \int\limits_{\Delta_i^{(n)}\subset\delta_j} \left|f(\alpha_j) - f(x)\right|\omega(t)\,dt \right)^p \overset{\text{def}}{=}$$

$$\overset{\text{def}}{=} \sum\nolimits_2^{(3)}(f; n; x) + \sum\nolimits_2^{(4)}(f; n; x). \tag{58}$$

Так как $x \in E_{k_0}$ и $\alpha_j = P_{k_0}$, то принимая во внимание (41), находим

$$\sum\nolimits_2^{(4)}(f; n; x) \le C_{P,k_0} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i\in I_2''} \left(\frac{n}{i} \int\limits_{\Delta_i^{(n)}\subset\delta_j} \omega(t)\,dt \right)^p \le$$

$$\le C_{P,k_0} \sum_{i\ge N_\varepsilon} \left(\frac{n}{i} \int\limits_{\Delta_i^{(n)}} \omega(t)\,dt \right)^p \le$$

$$\le C_{P,k_0} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{n}{i} \int\limits_{\Delta_i^{(n)}} |\omega(t) - \omega(x)|\,dt \right)^p + C_{P,k_0} \sum_{i\ge N_\varepsilon} \left(\frac{\omega(x)}{i} \right)^p,$$

где C_{P,k_0} — величины, равномерно ограниченные по n.

Принимая во внимание соотношения (50), $(41')$ и (52), заключаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \sum\nolimits_2^{(4)}(f; n; x) = 0. \tag{59}$$

На основании (42) для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется число N_ε такое, что

$$\sum_{j\ge N_\varepsilon} \left(\frac{\beta_j^{(k_0)} - \alpha_j^{(k_0)}}{\rho(x; \alpha_j^{(k_0)}, \beta_j^{(k_0)})} \right)^p < \varepsilon. \tag{60}$$

Величину $\sum\nolimits_2^{(3)}(f; n; x)$ представим в виде

$$\sum\nolimits_2^{(3)}(f; n; x) = 2^p \left(\sum_{j\le N_\varepsilon} + \sum_{j\ge N_\varepsilon} \right) \sum_{i\in I_2''} \left(\frac{n}{i} \int\limits_{\Delta_i^{(n)}\subset\delta} \left| f(t) - f(\alpha_j) \right| \omega(t)\,dt \right)^p \overset{\text{def}}{=}$$

$$\overset{\text{def}}{=} \sum\nolimits_2^{(5)}(f; n; x) + \sum\nolimits_2^{(6)}(f; n; x). \tag{61}$$

Если $\Delta_i \subset \delta_j$, понятно, что

$$\frac{n}{i} \leq \frac{1}{\alpha_j - x}. \tag{62}$$

Поэтому, применяя тот же прием, что и при доказательстве леммы 1, имеем

$$\sum\nolimits_2^{(5)}(f;\, n;\, x) \leq \sum_{j \leq N_\varepsilon} \sum_{i \in I_2''} (\alpha_j - x)^{-1} \left(\int\limits_{\Delta_i^{(n)} \subset \delta_j} \left| f(t) - f(\alpha_j) \right| \omega(t)\, dt \right)^p \leq$$

$$\leq 2^p \max_{1 \leq j \leq N_\varepsilon} (\alpha_j - x)^p \sup_{1 \leq i < n} \left(\int\limits_{\Delta_i^{(n)}} \left| f(t) - f(\alpha_j) \right| \omega(t)\, dt \right)^{p-1} J_n(f). \tag{63}$$

При этом в силу того, что $\alpha_j \in P_{k_0}$,

$$J_n(f) = \sum_{j \leq N_\varepsilon} \sum_{i \in I_2''} \int\limits_{\Delta_i^{(n)} \subset \delta_j} |f(t) - f(\alpha_j)|\, \omega(t)\, dt =$$

$$= \sum_{j \leq N_\varepsilon} \int\limits_{\delta_j} |f(t) - f(\alpha_j)|\, \omega(t)\, dt \leq C, \tag{64}$$

где C — величина, равномерно ограниченная по n.

В силу абсолютной непрерывности интеграла

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{1 \leq i < n} \left(\int\limits_{\Delta_i^{(n)}} \left| f(t) - f(\alpha_j) \right| \omega(t)\, dt \right)^{p-1} = 0. \tag{65}$$

Объединяя соотношения (63) – (65), заключаем, что

$$\lim_{n \to \infty} \sum\nolimits_2^{(5)}(f;\, n;\, x) = 0. \tag{66}$$

Наконец, рассмотрим величину $\sum\nolimits_2^{(6)}(f;\, n;\, x)$. Учитывая (62), имеем

$$\sum\nolimits_2^{(6)}(f;\, n;\, x) \leq 2^p \sum_{j \geq N_\varepsilon} (\alpha_j - x)^{-p} \left(\sum_{i \in I_2''} \int\limits_{\Delta_i^{(n)} \subset \delta_j} \left| f(t) - f(\alpha_j) \right| \omega(t)\, dt \right)^p \leq$$

$$\leq 2^p \sum_{j \geq N_\varepsilon} (\alpha_j - x)^{-p} \left(\int\limits_{\alpha_j}^{\beta_j} \left| f(t) - f(\alpha_j) \right| \omega(t)\, dt \right)^p \leq$$

$$\leq 2^p \sum_{j \geq N_\varepsilon} \left(\frac{\beta_j^{(k_0)} - \alpha_j^{(k_0)}}{\rho(x;\, \alpha_j^{(k_0)}, \beta_j^{(k_0)})} \right)^p \left(\frac{1}{\beta_j - \alpha_j} \int\limits_{\alpha_j}^{\beta_j} \left| f(t) - f(\alpha_j) \right| \omega(t)\, dt \right)^p. \tag{67}$$

Из (60) следует, что для любого $j \geq N_\varepsilon$

$$\beta_j - \alpha_j \leq \rho\,(x;\, \alpha_j;\, \beta_j)\varepsilon \leq (b - a)\varepsilon;$$

и так как $\alpha_j \in P_{k_0}$, то в силу (49) величина

$$\frac{1}{\beta_j - \alpha_j} \int\limits_{\alpha_j}^{\beta_j} |f(t) - f(\alpha_j)|\, \omega(t)\, dt$$

является равномерно ограниченной по j (и по n). Поэтому, согласно (60) и (67), заключаем, что для произвольного n

$$\sum\nolimits_2^{(6)}(f; n; x) \le C\varepsilon,$$

где C — некоторая постоянная, откуда в силу произвольности ε следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \sum\nolimits_2^{(6)}(f; n; x) = 0. \tag{68}$$

Сопоставляя равенства (58), (59), (61), (66) и (68), находим

$$\lim_{n\to\infty} \sum\nolimits_2^{(2)}(f; n; x) = 0. \tag{69}$$

Из (69), (57) и (56) следует равенство (55); а из (47), (54) и (55) заключаем, что величина $h_{n,p}^{(\omega)+}(f; x; \delta)$ для любого $x \in \bigcup_k E_k$ действительно стремится к нулю при $n \to \infty$.

Понятно, что такое же заключение верно и для величины

$$h_{n,p}^{(\omega)-}(f; x; \delta) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{n}{i} \int\limits_{\Delta_{-i}^{(n)}} |f(t) - f(x)|\omega(t)\,dt \right)^p,$$

а значит, и для величины $h_{n,p}^{(\omega)}(f; x; \delta) = h_{n,p}^{(\omega)+}(f; x; \delta) + h_{n,p}^{(\omega)-}(f; x; \delta)$.

Отсюда с учетом (43) убеждаемся в справедливости равенства (35) для почти всех $x \in [a, b]$, что и завершает доказательство леммы 2.

3. В-свойство ортогональных систем. Определение 4. *Пусть* $\varphi_k(x)$ — *произвольная последовательность функций, ограниченных на сегменте* $[a, b]$. *Будем говорить, что данная последовательность имеет свойство* В *в точке* $x \in (a, b)$, *если существует* $\delta > 0$ *такое, что*:

1) $u_\delta(x) \subset (a, b)$;

2) *для любого обобщенного полинома* $T_n^\alpha(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \varphi_k(t)$ *с коэффициентами, удовлетворяющими условию*

$$\left\{ \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k|^p \right\}^{1/p} \le K\left(\frac{1}{n}\right)^{(p-1)/p}, \tag{70}$$

справедливо неравенство

$$\sum_{1\le|k|\le n} \sup_{t\in\Delta_k^{(n)}} |T_n^\alpha(t)|^{p'} \le K \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right), \tag{71}$$

где $\Delta_k^{(n)} \in D_n(\delta)$, $|k| = 1, 2, \ldots, n$, *а* K — *постоянная, равномерно ограниченная по* n.

Будем говорить, что последовательность $\{\varphi_k(\cdot)\}$ имеет свойство В на множестве $e \subseteq (a, b)$, если она имеет это свойство в каждой точке x множества e.

Заметим, что это определение не зависит от величины δ в том смысле, что если для некоторого $\delta > 0$ выполняется соотношение (71), то оно выполняется также и для всех $\delta_1 < \delta$, в чем можно убедиться посредством простых рассуждений. В этом же смысле свойство В имеет локальный характер: его наличие в точке x зависит от поведения функций $\varphi_k(\cdot)$ только в столь угодно малой окрестности этой точки.

Достаточные условия того, что система имеет свойство B, содержатся в следующих утверждениях.

Лемма 3. *Пусть* $\{\varphi_k(\cdot)\}_\omega$ — *ортонормированная на* $[a, b]$ *с весом* $\omega(\cdot)$ *система функций и* $[c, d]$ — *некоторый отрезок, лежащий на* $[a, b]$, *т. е.* $[c, d] \subseteq [a, b]$, *на котором система* $\{\varphi_k(\cdot)\}_\omega$ *равномерно ограничена:*

$$\sup_{\substack{x \in [c, d] \\ k \in N}} |\varphi_k(x)| \leq K, \tag{72}$$

и в каждой точке $x \in [c, d]$ $\omega(x) \geq \omega_0 > 0$. *Тогда если для любого обобщенного полинома* $T_n(s)$ *порядка* n *по системам* $\{\varphi_k(\cdot)\}_\omega$ *в точке* $x \in (c, d)$ *выполняется неравенство*

$$\left(\frac{\delta}{n} \sum_{1 \leq |k| \leq n} \sup_{s \in \Delta_k^{(n)}} |T_n(s)|^{p'}\right)^{1/p'} \leq K \| T_n \|_{p', (c, d)}, \tag{73}$$

где δ — *некоторое положительное число такое, что* $u_\delta(x) \subset (c, d)$, $\Delta_k^{(n)} \in$ $\in D_n(\delta)$ *и* K — *постоянная, равномерно ограниченная по* n, *то в данной точке* x *последовательность* $\{\varphi_k(t)\}_\omega$ *удовлетворяет условию* B.

Доказательство этой леммы базируется на следующем утверждении, которое является обобщением известной теоремы Ф. Риса (см., например, [15, с. 154]) на случай, когда отрезок ортогональности системы функций не совпадает с отрезком, на котором система равномерно ограничена.

Лемма 4. *Пусть* $\{\varphi_n(x)\}_\omega$ — *ортонормированная на* $[a, b]$ *с весом* $\omega(x)$ *система функций, которая равномерно ограничена на некотором сегменте* $[c, d] \subseteq [a, b]$.

Тогда:

1) *если* $f \in L^p_\omega(c, d)$, $1 < p \leq 2$, *и* $f(x)$ *при* $x \in [a, b] \setminus [c, d]$, *то ее коэффициенты Фурье по данной системе*

$$c_n = \int_a^b f(x) \varphi_n(x) \omega(x) dx, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

удовлетворяют неравенству

$$\| c_n \|_{p'} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^{p'}\right)^{1/p'} \leq K \|f\|_{p, \omega(c, d)} \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right); \tag{74}$$

2) *если числовая последовательность* $\{c_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, *имеет конечную норму* $\| c \|_p$, $1 < p \leq 2$, *то существует функция* $f \in L^2_\omega(a, b)$ *такая, что ее сужение* $f^*(\cdot)$ *на множество* $[c, d]$ *принадлежит к* $L^{p'}_\omega(c, d)$ *и справедливо неравенство*

$$\|f\|_{p, \omega(c, d)} \leq K \| c \|_p \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right). \tag{75}$$

Первая часть этой леммы доказана Тандори [12]. Справедливость второй ее части может быть установлена повторением рассуждений, с помощью которых в [15] доказана вторая часть теоремы Ф. Риса с использованием утверждения первой части леммы.

Перейдем непосредственно к доказательству леммы 3. Пусть точка x и величина δ выбраны из условия леммы и $T_n^\alpha(\cdot)$ — произвольный полином по системе $\{\varphi_k(\cdot)\}$, удовлетворяющий условию (70). Тогда в силу (73) справедливо неравенство

$$\left(\frac{\delta}{n}\sum_{1\le|k|\le n}\sup_{s\in\Delta_k^{(n)}}\left|T_n^\alpha(t)\right|^{p'}\right)^{1/p'} \le K\|T_n^\alpha\|_{p',(c,d)}. \tag{76}$$

Учитывая, что $\omega(x)\ge\omega_0>0$, на основании второй части леммы и условия (70) для любого $p'\ge 2$ получаем

$$\|T_n^\alpha\|_{p',(c,d)} \le \frac{1}{\omega_0^{1/p'}}\left(\int\limits_c^d\left|T_n^\alpha(s)\right|^{p'}\omega(s)ds\right)^{1/p'} \le K\|\alpha_k^{(n)}\|_p \le K\left(\frac{1}{n}\right)^{(p-1)/p}, \tag{77}$$

где K — постоянная, равномерно ограниченная по n, и $1/p+1/p'=1$.

Сопоставляя (76) и (77), выводим оценку

$$\left(\frac{\delta}{n}\sum_{1\le|k|\le n}\sup_{s\in\Delta_k^{(n)}}\left|T_n^\alpha(t)\right|^{p'}\right)^{1/p'} \le K\left(\frac{1}{n}\right)^{(p-1)/p} \quad \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1\right),$$

откуда следует, что в данной точке x выполняется соотношение (71), что и завершает доказательство леммы 3.

В случае, когда в некоторой окрестности $u_\delta(x)$ точки x функции $\varphi_k(\cdot)$ являются дифференцируемыми, используя рассуждения, с помощью которых в [11] была доказана лемма 2, на основании леммы 3 легко выводится следующее утверждение.

Лемма 5. *Пусть система $\{\varphi_k(\cdot)\}_\omega$ удовлетворяет условиям леммы* 3, *кроме того, в некоторой окрестности $u_\delta(x)\subset(c,d)$ точки x функции $\varphi_k(\cdot)$ являются дифференцируемыми и для всякого обобщенного полинома $T_n(\cdot)$ порядка n по данной системе при некотором $p\ge1$ справедлив аналог неравенства Бернштейна*

$$\|T_n'\|_{p,u_\delta(x)} \le Kn\|T_n\|_{p,(c,d)}. \tag{78}$$

Тогда в данной точке выполняется соотношение (73), *а следовательно, система $\{\varphi_k(\cdot)\}_\omega$ имеет свойство* B *в точке x.*

***Следствие* 1.** *Если система $\{\varphi_k(\cdot)\}_\omega$ удовлетворяет условиям леммы* 3, *в каждой точке $x\in(c,d)\subset[a,b]$ функции $\varphi_k(\cdot)$ дифференцируемы и для всякого обобщенного полинома $T_n(\cdot)$ степени n по данной системе при некотором $p\ge1$ выполняется неравенство* (78) *для некоторого $\delta>0$, то в каждой точке $x\in(c,d)$ справедливо соотношение* (73) *и, значит, система $\{\varphi_k(\cdot)\}_\omega$ имеет свойство* B *на всем (c,d).*

Тригонометрическая система $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots$ удовлетворяет всем условиям следствия 1 при $\omega(x)\equiv1$ на любом интервале длины 2π, поскольку для нее соотношение (72) выполняется автоматически, а соотношение (78) гарантируется неравенством Бернштейна для тригонометрических полиномов (см., например, [16, с. 895]).

Поэтому справедливо такое утверждение.

Лемма 6. *Тригонометрическая система имеет свойство* B *на всей действительной оси.*

Для всякого алгебраического полинома $P_n(\cdot)$ степени n, как хорошо известно (см., например, [17]), справедлив следующий аналог неравенства Бернштейна:

$$\| P_n' \|_{p,(c,d)} \leq Kn \| P_n \|_{p,(a,b)}$$

для любых $p \geq 1$ и $a < c < d < b$.

Поэтому из следствия 1 получаем следующее утверждение.

Лемма 7. *Пусть* $\{ P_k(\cdot) \}_\omega$ *— ортонормированная на* $[a, b]$ *с весом* $\omega(\cdot)$ *система алгебраических полиномов и* $[c, d]$ *— некоторый отрезок такой, что* $[c, d] \subseteq [a, b]$, *на котором система* $\{ P_k(\cdot) \}_\omega$ *равномерно ограничена, и в то же время* $\omega(x) \geq \omega_0 > 0$ *для любого* $x \in [c, d]$. *Тогда данная система имеет свойство* B *на интервале* (c, d).

Основные результаты данной работы содержатся во второй ее части.

1. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* Sur la serie de Fourier d'une fonction a carre summable // Comput. Revs. – 1913 – **153**. – P. 1307–1309.
2. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* On the strong summability of Fourier series // Proc. London Math. Soc. – 1926. – **26**. – P. 233–286.
3. *Carleman T.* A theorem concerning Fourier series // Ibid. – 1923. – **21**. – P. 483–492.
4. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* The stong summability of Fourier series // Fund. Math. – 1935. – **25**. – P. 162–189.
5. *Marcinkievicz J.* Sur la summability forte des series de Fourier // J. London Math. Soc. – 1939. – **14**. – P. 162–168.
6. *Zygmynd A.* On the convergence and summability of power series on the circle on convergence // Proc. London Math. Soc. – 1941. – **47**. – P. 326–350.
7. *Tandori K.* Uber die starke summation von Fourierreihen // Acta Sci. Math. – 1955. – **16**. – P. 65–73.
8. *Tandori K.* Berichtigung Arbeit "Uber die starke summation von Fourierreihen" // Ibid. –1968. – **29**, № 3–4.
9. *Габисония О. Д.* О точках сильной суммируемости рядов Фурье // Мат. заметки. – 1973. – **14**, № 5. – С. 615–628.
10. *Харди Г., Литтлвуд Д., Полиа Г.* Неравенства. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948. – 456 с.
11. *Новиков И. Я., Родин В. А.* Характеризация точек p-сильной суммируемости тригонометрических рядов Фурье // Изв. вузов. – 1988. – **9**. – С. 58–62.
12. *Tandori K.* Uber die Cesaroche summierbarkeit der orthogonalen Polynomreihen. II // Acta. Math. Sci. Hung. – 1954. – **5**, № 3–4. – P. 236–253.
13. *Алексич Г.* Проблемы сходимости ортогональных рядов. – М.: Изд–во иностр. лит., 1963. – 359 с.
14. *Alexits G., Kralik D.* Uber Approximation im starken Sinne // Acta Scient. Math. Szeged. – 1965. – **26**, № 1–2. – P. 93–101.
15. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2–х т. – М.: Мир, 1965. – **1**. – 615 с. – Т. 2. – 537 с.
16. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. – М.: Физматгиз, 1961. – 936 с.
17. *Исмайлов А. Я.* Об оценке производных многочленов многих переменных // Докл. АН СССР. – 1956. – **4**. – С. 239–243.

Получено 16.01.95