УДК 534.111

Б. И. Сокил (ун-т "Львовская политехника")

ПРИМЕНЕНИЕ Ateb-ФУНКЦИЙ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Asymptotic approximations of single frequency solutions of some nonlinear partial differential equations by using periodic Ateb-functions.

Будуються асимптотичні наближення одночастотних розв'язків деяких нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними на основі використання періодичних Ateb-функцій.

Развивая идею использования периодических Ateb-функций [1] для построения решений нелинейных дифференциальных уравнений [2, 3], построим асимптотические приближения одночастотных решений уравнения

$$u_{tt} + \alpha^2\left(u_{xxxx}u_{xx}^{\nu} + 2^{-1}\nu u_{xxx}^2 u_{xx}^{\nu-1}\right) = \varepsilon f\left(x, u, u_t, u_x, u_{xx}, \ldots, u_{xxxx}\right), \tag{1}$$

которое рассматривается при краевых условиях

$$u(0,t) = u_{xx}(0,t) = u(l,t) = u_{xx}(l,t) = 0. \tag{2}$$

В (1), (2) α, l, ν — постоянные ($\nu + 1 = (2(2\mu_1 - \mu_2) + 1)(2\mu_2 + 1)^{-1}$; $2(2\mu_1 - \mu_2) + 1 > 0$; $\mu_i = 0, 1, 2$, $i = 1, 2$), ε — малый параметр, $f(x, u, u_t, u_x, u_{xx}, \ldots, u_{xxxx})$ — известная аналитическая функция.

Рассмотрим невозмущенное ($\varepsilon = 0$) уравнение (1). Его одночастотные решения в k-й форме динамического равновесия [4] будем искать в виде

$$u_k(x,t) = X_k(x)T_k(\psi_k), \quad \psi_k = \omega_k(a)t + \varphi_k, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{3}$$

где a и φ_k — постоянные; $\omega_k(a)$ — некоторая функция, вид которой будет определен ниже; $X_k(x)$ и $T_k(\psi_k)$ определяются нелинейными дифференциальными уравнениями

$$X_k^{(4)}(X_k'')^{\nu} + 2^{-1}\nu(X_k''')^2(X_k'')^{\nu-1} - \lambda\alpha^{-2}(\nu+1)^{-1}X_k = 0, \tag{4}$$

$$\ddot{T}_k + \lambda T_k^{\nu+1} = 0. \tag{5}$$

Нетривиальные решения дифференциального уравнения (4) выражаются через периодические Ateb-функции в виде

$$X_k(x) = \begin{cases} X_0 \,\mathrm{sa}(2(\nu+2)^{-1}, 1, \kappa x), \\ X_0 \,\mathrm{ca}(2(\nu+2)^{-1}, 1, \kappa x), \end{cases} \tag{6}$$

где X_0 — постоянная, а

$$\kappa^{2\nu+4} = 2^{-(\nu+3)}\alpha^2\lambda(\nu+2)^{-(\nu+1)}(\nu+4)^{\nu+2}X_0^{-\nu}.$$

Удовлетворяя краевые условия, которые следуют из (2), имеем

$$\lambda_k = 2^{\nu+3}\alpha^{-2}(\nu+2)^{\nu+1}(\nu+4)^{-(\nu+2)}(X_0^{\nu}k\Pi l^{-1})^{2\nu+4},$$

$$X_k = X_0 \,\mathrm{sa}(2(\nu+2)^{-1}, 1, k\Pi l^{-1}x), \tag{7}$$

где 2Π — период использованной Ateb-функции, т. е.

$$\Pi = \sqrt{\pi}\,\Gamma((\nu+2)(\nu+4)^{-1})\Gamma^{-1}(2^{-1}+(\nu+2)(\nu+4)^{-1}).$$

Решения уравнения (5) также выражаются с помощью периодических Ateb-функций в виде

$$T_k(\psi_k) = \begin{cases} T_0\,\mathrm{ca}(\nu+1, 1, (2^{-1}(\nu+2)\lambda_k\, T_0^{\nu})^{1/2}\, t + \varphi_k); \\ T_0\,\mathrm{sa}(\nu+1, 1, (2^{-1}(\nu+2)\lambda_k\, T_0^{\nu})^{1/2}\, t + \varphi_k), \end{cases} \tag{8}$$

где T_0 — постоянная.

Таким образом, одночастотные решения невозмущенного уравнения (1), удовлетворяющие краевым условиям (2), имеют вид

$$u_k(x,t) = a\,\mathrm{sa}(2(\nu+2)^{-1}, 1, k\Pi l^{-1}x)\,\mathrm{ca}(\nu+1, 1, \omega_k(a)t+\varphi_k), \quad a = X_0T_0, \tag{9}$$

где

$$\omega_k(a) = \alpha^{-1}[2^{\nu+2}(\nu+2)^{\nu+2}(\nu+4)^{-(\nu+2)}a^{\nu}(k\Pi l^{-1})^{2\nu+4}]^{1/2}.$$

Соотношения (9) будем считать как замену переменных для возмущенного уравнения (1), только параметры a, φ_k в них уже будут некоторыми функциями времени. Дифференцируя по времени (9) и учитывая при этом, что для невозмущенного случая

$$u_t(x,t) = -2(\nu+2)^{-1}a\omega_k(a)\,\mathrm{sa}(2(\nu+2)^{-1}, 1, k\Pi l^{-1}x)\,\mathrm{sa}(1, \nu+1, \omega_k t+\varphi_k), \tag{10}$$

из (1) имеем систему уравнений относительно $\dot a$ и $\dot\varphi_k$:

$$\{\dot a\,\mathrm{ca}(\nu+1, 1, \psi_k) - \dot\varphi_k 2(\nu+2)^{-1}a\,\mathrm{sa}(1, \nu+1, \omega_k(a)t+\varphi_k)\}X_k(x) = 0,$$

$$\Big\{\dot a\Big(a\frac{d\omega_k}{da}+\omega_k(a)\Big)\mathrm{sa}(1, \nu+1, \psi_k) +$$

$$+\dot\varphi_k a\omega_k(a)\,\mathrm{ca}^{\nu+1}(\nu+1, 1, \psi_k)\Big\}2(\nu+2)^{-1}X_k(x) = \varepsilon G(a, x, \psi_k), \tag{11}$$

где $G(a, x, \psi_k)$ — известная функция .

Решая (11), находим

$$\dot a = -\varepsilon P^{-1}\omega_k^{-1}(a)\,G_{(s)}(a, \psi_k), \quad \dot\varphi_k = \omega_k(a) + \varepsilon P^{-1}a^{-1}\omega_k^{-1}(a)\,G_{(c)}(a, \psi_k). \tag{12}$$

Здесь

$$P = \int_0^l X_k^2(x)dx, \; G_{\binom{s}{c}}(a, \varphi_k) = \begin{pmatrix}\mathrm{sa}(1, \nu+1, \psi_k), \\ \mathrm{ca}(\nu+1, 1, \psi_k)\end{pmatrix}\int_0^l G(a, x, \psi_k)X_k(x)dx.$$

Таким образом, первые приближения одночастотных решений краевой задачи (1), (2) выражаются зависимостью (9), в которой параметры a и ψ_k связаны дифференциальными уравнениями (12).

Следует заметить, что при $\nu = 0$ имеем решение задачи для квазилинейного случая, который рассматривался в [4].

1. *СеникП. М.* Обращения неполной Beta-функции // Укр. мат. журн. – 1969. – **21**, № 3. – С. 325–333.
2. *Сокил Б. И.* Об асимптотическом представлении решения одной нелинейной системы при резонансе // Укр. мат. журн. – 1983. – **33**, № 3. – С. 390–392.
3. *Сокіл Б. І.* Про один спосіб побудови одночастотних розв'язків для нелінійного хвильового рівняння // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 6. – С. 782–785.
4. *Митропольский Ю. А., Мосеенков Б. И.* Асимптотические решения уравнений в частных производных // Киев: Выща шк, 1976. – 592 с.

Получено 09.11.94