УДК 519.21

Б. В. Бондарев (Донец. ун-т)

ОЦЕНКА РАССЧЕТНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ В ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ. L_2-ПОДХОД

By using solutions of the first initial boundary-value problem for a parabolic quasilinear equation with fast random oscillations, we give an estimate for the nonlinear term of the equation with respect to the metric of the space L_2. Large deviations of a nonparametric estimate of the nonlinear contribution are studied.

За спостереженнями за розв'язками першої початково-крайової задачі для параболічного квазілінійного рівняння, яке перебуває під впливом швидких випадкових осциляцій, оцінюється нелінійний член рівняння. У метриці простору L_2 вивчаються великі відхилення непараметричної оцінки нелінійного впливу.

1. Введение. Известно (см., например, [1]), что уравнение

$$\frac{\partial \xi_0}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 \xi_0}{\partial x^2} - \beta\,(\xi_0 - u_0) + f(t,x), \tag{$*$}$$

$$\xi_0(t,0) \equiv \xi_0(t,l) \equiv 0, \quad \xi_0(t,x)|_{t=0} = \varphi(x),$$

описывает температуру в стержне длины l, концы которого поддерживаются при нулевой температуре, с начальной температурой $\varphi(x)$, $0 \le x \le l$, вдоль стержня, внутренним источником тепла $f(t,x)$ и теплообменом через боковую поверхность $\beta\,(\xi_0 - u_0)$, где $u_0(t,x)$ — температура окружающей среды; при $\beta > 0$ происходит отток тепла, при $\beta < 0$ — его приток. Уравнениями вида ($*$) описывается также процесс изменения количества субстанции с учетом зависимости от возникновения ($\beta < 0$) или распада ($\beta > 0$) субстанции в химической реакции.

Наряду с уравнением ($*$) будем рассматривать уравнение

$$\frac{\partial \xi_\varepsilon}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 \xi_\varepsilon}{\partial x^2} - \beta\,(\xi_\varepsilon - u_0) + f(t,x) + \sigma\,(t,x,\xi_\varepsilon)\,\eta\,(t/\varepsilon), \tag{$**$}$$

$$\xi_\varepsilon(t,0) \equiv \xi_\varepsilon(t,l) \equiv 0, \quad \xi_\varepsilon(t,x)|_{t=0} = \varphi(x),$$

где $\eta\,(t)$ — стационарный случайный процесс с нулевым средним, $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Уравнение ($**$) можно также записать в виде

$$\partial_t \xi_\varepsilon = \alpha^2 \frac{\partial^2 \xi_\varepsilon}{\partial x^2}\,dt - [\beta\,(\xi_\varepsilon - u_0) - f(x,t)]\,dt + \sqrt{\varepsilon}\,\sigma\,(t,x,\xi_\varepsilon)\,d\zeta_\varepsilon(t), \tag{$***$}$$

$$\xi_\varepsilon(t,0) \equiv \xi_\varepsilon(t,l) \equiv 0, \quad \xi_\varepsilon(t,x)|_{t=0} = \varphi(x),$$

где

$$\zeta_\varepsilon(t) = \sqrt{\varepsilon} \int\limits_0^{t/\varepsilon} \eta(s)\,ds.$$

При условиях слабой зависимости [2], наложенных на $\eta\,(t), t \ge 0$, случайный процесс $\zeta_\varepsilon(t)$ слабо сходится [2] при $\varepsilon \to 0$ к винеровскому процессу $w(t)$. Таким образом, решение уравнения ($***$) описывает температурный режим в стержне, когда, например, внутренний источник тепла и теплообмен через боковую поверхность стержня подвержены малым случайным возмущениям, близким к белому шуму.

Предположим, что наблюдается поле $\xi_\varepsilon(t,x)$, $(t,x)\in[0,T]\times[0,l]$, по наблюдениям требуется оценить, например, поле $-\beta(u(t,x)-u_0(t,x))+f(t,x)$, либо внутренний источник тепла $f(t,x)$, либо теплообмен через боковую поверхность $-\beta(u(t,x)-u_0(t,x))$ в идеальном случае, т. е. без воздействия случайных помех. Такие поля естественно назвать „рассчетными воздействиями". В настоящей работе предлагается непараметрическая оценка „рассчетного воздействия", исследуются ее свойства. В общем случае естественно рассматривать в качестве „рассчетного воздействия" нелинейную функцию $A(t,x,\xi_0(t,x))$; естественно также рассмотреть n-мерный случай переменной x.

1. Рассмотрим на $\theta_T=[0,T]\times D$ первую начально-краевую задачу для параболического уравнения

$$\frac{\partial\xi_\varepsilon}{\partial t} = Z_{t,x}\xi_\varepsilon + A(t,x,\xi_\varepsilon) + \sigma(t,x,\xi_\varepsilon)\eta(t/\varepsilon), \tag{1}$$

$$\xi_\varepsilon(t,x)|_{t=0} = \varphi(x); \quad \xi_\varepsilon(t,x)|_{x\in\partial D} = 0,$$

где ∂D — достаточно [3, 4] гладкая граница области D. Относительно случайного процесса $\eta(t), t\geq 0$, потребуем, чтобы $M_{\eta(t)}=0$. В данном случае оператор $Z_{t,x}$ имеет вид

$$Z_{t,x}V = \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ij}(t,x)\frac{\partial V}{\partial x_j}\right] + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)\frac{\partial V}{\partial x_i}.$$

Наряду с задачей (1) рассмотрим первую начально-краевую задачу для „укороченного" уравнения

$$\frac{\partial\xi_0}{\partial t} = Z_{t,x}\xi_0 + A(t,x,\xi_0), \tag{2}$$

$$\xi_0(t,x)|_{t=0} = \varphi(x); \quad \xi_0(t,x)|_{x\in\partial D} = 0.$$

Везде в дальнейшем считаем, что, как у системы (1), так и у системы (2), существуют обобщенные решения [4].

Для системы (2) выполнено условие согласованности первого порядка

$$\begin{gathered}\varphi(x)|_{x\in\partial D} = 0; \\ \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ij}(0,x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right] + \sum_{i=1}^{n} b_i(0,x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + A(0,x,\varphi(x)) = 0.\end{gathered} \tag{3}$$

Будем также предполагать, что коэффициенты $a_{ij}(t,x), i,j=\overline{1,n}$, и $b_i(t,x)$, $i=\overline{1,n}$, имеют, ко всему же, определенную гладкость: существует $\nabla a_{ij}(t,x)$ такая, что

$$\sum_{i,j=1}^{n}|\nabla a_{ij}(t,x)|^2 < +\infty,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left|\frac{\partial a_{ij}(t,x)}{\partial t}\right|^2 \leq \mu_1^2 < +\infty, \quad \sum_{i=1}^{n}|b_i(t,x)|^2 \leq B^2 < +\infty.$$

Будем предполагать также, что

$$\nu|z|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)z_iz_j \leq \frac{1}{\nu}|z|^2, \quad z=(z_1,z_2,\ldots,z_n), \quad \nu>0.$$

Относительно $A(t,x,z)$ потребуем $|A(t,x,z)| \le A_0(t,x)$, где $A_0(t,x)$ такая, что

$$\int_0^T \int_D A_0^2(t,x)\,dt\,dx < +\infty.$$

Тогда [4, 5] для решения $\xi_0(t,x)$ справедлива следующая оценка:

$$\sup_{0\le t\le T} \nu \int_D |\nabla \xi_0(t,x)|^2\,dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^T \int_D \left[\left|\frac{\partial \xi_0}{\partial t}(t,x)\right|^2 + \sum_{i,j=1}^n \left|\frac{\partial^2 \xi_0}{\partial x_i \partial x_j}(t,x)\right|^2\right] dt\,dx \le$$

$$\le C\left[\int_D |\nabla\varphi|^2 dt\,dx + \int_0^T \int_D A_0^2(t,x)\,dt\,dx\right] = C(\varphi, A_0). \tag{4}$$

Оценка, аналогичная оценке (4), справедлива и для случайного поля $\xi_\varepsilon(t,x)$, $(t,x)\in[0,T]\times D$:

$$\nu\int_D |\nabla\xi_\varepsilon(t,x)|^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^t \int_D \left|\frac{\partial \xi_\varepsilon}{\partial t}\right|^2 dx\,dt + \frac{1}{C}\int_0^t \int_D \sum_{i,j=1}^n \left|\frac{\partial^2 \xi_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j}\right| dy\,dt \le$$

$$\le \left[2\int_0^T \int_D A_0^2(\tau,y)\,dy\,d\tau + 2\int_0^T \int_D \sigma_0^2(\tau,y)\,dy\,|\eta(\tau/\varepsilon)|^2\,d\tau +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\nu}\int_D |\nabla\varphi|^2 dy\right]\left[1 + \frac{1}{\nu}2(\mu_1 + B^2)T\exp\left\{\frac{2(\mu_1+B^2)T}{\nu}\right\}\right]. \tag{5}$$

Из оценки (5), в частности, следует

$$C(\varphi, A_0) = \left[2\int_0^T \int_D A_0^2(\tau,y)\,dy\,d\tau + \frac{1}{\nu}\int_D |\nabla\varphi|^2\,dy\right]\times$$

$$\times\left[1 + \frac{2}{\nu}(\mu_1 + B^2)T\exp\left\{\frac{2(\mu_1+B^2)T}{\nu}\right\}\right].$$

Будем предполагать, что наблюдается

$$\xi_\varepsilon^{T,\overline{D}} = \{\xi_\varepsilon(t,x)\colon\ (t,x)\in\overline{\theta}_T\};$$

требуется по $\xi_\varepsilon^{T,\overline{D}}$ оценить рассчетное воздействие $A(t,x,\xi_0(t,x))$. В качестве оценки естественно взять функцию

$$A_\varepsilon(t,x) = \frac{1}{h_\varepsilon^{1+n}}\int_0^T \int_D \left[\frac{\partial \xi_\varepsilon}{\partial \tau} - Z_{\tau,y}\xi_\varepsilon\right] K_t^\varepsilon\left(\frac{t-\tau}{h_\varepsilon}\right) K_x^\varepsilon\left(\frac{x-y}{h_\varepsilon}\right) d\tau\,dy.$$

Ввиду оценки (5) и условий, наложенных на коэффициенты оператора $Z_{t,x}$, все интегралы в последнем соотношении существуют.

Теорема. *Пусть коэффициенты оператора* $Z_{t,x}$ *такие, что* $\nabla a_{ij}(t,x)$ *существует и*

$$\sum_{i,j=1}^n |\nabla a_{ij}(t,x)|^2 < +\infty,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left|\frac{\partial a_{ij}(t,x)}{\partial t}\right|^2 \le \mu_1^2 < +\infty, \quad \sum_{i=1}^{n}|b_i(t,x)|^2 \le B^2 < +\infty,$$

$$\nu|z|^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\, z_i z_j \le \frac{1}{\nu}|z|^2, \quad z = (z_1, \ldots, z_n).$$

Потребуем, чтобы выполнялись следующие условия:

Относительно $A(t,x,z)$:

$$A(t,x,z) \le A_0(t,x),$$

где

$$\int_0^T \int_D A_0^2(t,x)\, dt dx < +\infty, \quad |A(t,x,z_1) - A(t,x,z_2)| \le L_A |z_1 - z_2|.$$

Относительно $\sigma(t,x,z)$:

$$|\sigma(t,x,z)| \le \sigma_0(t,x), \qquad \sup_{0 \le t \le T} \int_D \sigma_0^2(t,x)\, dx < +\infty,$$

$$|\sigma(t,x,z_1) - \sigma(t,x,z_2)| \le L_\sigma |z_1 - z_2|,$$

$$\sup_{0 \le t \le T} \int_D \sigma^2(t,x,\xi_0(t,x))\, dx \le \sigma_1^2 < +\infty,$$

$$\int_0^T \int_D \left|\frac{\partial}{\partial \tau}\sigma(\tau, y, \xi_0(t,y))\right|^2 dy\, d\tau \le \sigma_2^2 < +\infty.$$

Относительно случайного процесса $\eta(t)$, $t \ge 0$:

$$M\eta(t) = 0, \quad M\eta^2(t) \le m_0^2 < +\infty,$$

$$P\left\{\sup_{0 \le t \le T} \sqrt{\varepsilon}\left|\int_0^{t/\varepsilon} \eta(\tau)\, d\tau\right| > R\right\} \le C' \exp\{-c' R^\alpha\},$$

$$P\left\{\sqrt{\varepsilon}\left|\int_0^{t/\varepsilon} \left(|\eta(\tau)|^2 - M|\eta(\tau)|^2\right) d\tau\right| > R\right\} \le C'' \exp\{-c'' R^\beta\},$$

c', c'', C', C'', α, β — *положительные постоянные.*

Относительно $K_t^\varepsilon(t)$, $K_x^\varepsilon(u)$:

$$K_t^\varepsilon(u) \ge 0, \quad h_\varepsilon \ge 0,$$

$$\frac{1}{h_\varepsilon}\int_0^T K_t^\varepsilon\left(\frac{t-s}{h_\varepsilon}\right) ds = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} K_t^\varepsilon(u)\,|u|\, du \le C_1 < +\infty,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\partial K_t^\varepsilon(u)}{\partial u}\right| du \le C_2 < +\infty, \qquad \sup_{-\infty < u < +\infty} K_t^\varepsilon(u) = K_0 < +\infty,$$

а также

$$\int_{R^n} K_x^\varepsilon(u)\,|u|^2 du \le C_1 < +\infty, \quad \int_{R^n} \left|\nabla K_x^\varepsilon(u)\right| du \le C_2 < +\infty,$$

$$\int\limits_{R^1} K_t^{\varepsilon}(t)\,|t|^2\,dt \le C_1 < +\infty, \quad \frac{1}{h_\varepsilon}\int\limits_D K_x^{\varepsilon}\left(\frac{x-y}{h_\varepsilon}\right)dy = 1.$$

Тогда, если начальное условие $\varphi(x)$ *такое, что* $\int_D |\nabla\varphi(x)|^2\,dx < +\infty$*, то справедливы соотношения*

$$P\left\{\int\limits_0^T\int\limits_D |A_\varepsilon(t,x) - A(t,x,\xi_0(t,x))|^2\,dx\,dt > \right.$$

$$\left. > \sqrt{\varepsilon}\,\overline{C}(A,\varphi,\nu,B,\mu_1) + \varepsilon\overline{\overline{C}}(A,\sigma,D,\mu_1,B,m_0,R)\right\} \le$$

$$\le C'\exp\{-c'R^{\alpha}\} + C''\exp\{-c''R^{\beta}\}, \tag{6}$$

где

$$\overline{C}(A,\varphi,\nu,B,\mu_1) = 16\,C_1\left[2\int\limits_0^T\int\limits_D A_0^2(t,x)\,dx\,dt + \frac{1}{\nu}\int\limits_D |\nabla\varphi(x)|^2\,dx\right]\times$$

$$\times\left[1 + \frac{2}{\nu}(\mu_1 + B^2) + \exp\left\{\frac{2(\mu_1+B^2)T}{\nu}\right\}\right],$$

$$\overline{\overline{C}}(A,\sigma,D,\mu_1,B,m_0,R,\varepsilon) =$$

$$= R^2\,12\left(L_A^2 + L_\sigma^2\right)\left\{8\sigma_1 + 3\sigma_2/4 + 6C(D) + \right.$$

$$+ \left[L_A^2 + L_\sigma^2 + 2(\mu_1+B^2)\right]\left[T\left(1+m_0^2\right) + \sqrt{\varepsilon}R\right]\Big\}\exp\Big\{3C(D)\Big[L_A^2 +$$

$$+ TL_\sigma^2 + 2(\mu_1+B^2)\Big]\Big[\left(1+m_0^2\right)T + \sqrt{\varepsilon}R\Big]\Big\}\left(1 + \frac{1}{\nu}\right) +$$

$$+ \left(\sigma_1^2 + T\sigma_2^2\right)\operatorname{mes} D\left[\left(1+m_0^2\right)T + \sqrt{\varepsilon}R\right] + R^2\left[K_0 + \sqrt[4]{\varepsilon}\,C_2\left(1+\sigma_1^2\right)\right]^2.$$

Доказательство. Нетрудно заметить, что

$$A_\varepsilon(t,x) - A(t,x,\xi_0(t,x)) = \frac{1}{h_\varepsilon^{1+n}}\int\limits_0^T\int\limits_D [A(\tau,y,\xi_\varepsilon(\tau,y)) -$$

$$- A(\tau,y,\xi_0(\tau,s))]\,K_t^{\varepsilon}\left(\frac{t-\tau}{h_\varepsilon}\right)K_x^{\varepsilon}\left(\frac{x-y}{h_\varepsilon}\right)dy\,d\tau +$$

$$+ \frac{1}{h_\varepsilon^{1+n}}\int\limits_0^T\int\limits_D [A(\tau,y,\xi_0(\tau,y)) - A(t,x,\xi_0(t,x))]\times$$

$$\times K_t^{\varepsilon}\left(\frac{t-\tau}{h_\varepsilon}\right)K_x^{\varepsilon}\left(\frac{x-y}{h_\varepsilon}\right)dy\,d\tau + \frac{1}{h_\varepsilon^{1+n}}\int\limits_0^T\int\limits_D [\sigma(\tau,y,\xi_\varepsilon(\tau,y)) -$$

$$- \sigma_0(\tau,y,\xi_0(\tau,y))]\,\eta(\tau/\varepsilon)\,K_t^{\varepsilon}\left(\frac{t-\tau}{h_\varepsilon}\right)K_x^{\varepsilon}\left(\frac{x-y}{h_\varepsilon}\right)d\tau\,dy +$$

$$+ \frac{1}{h_\varepsilon^{1+n}}\int\limits_0^T\int\limits_D K_t^{\varepsilon}\left(\frac{t-\tau}{h_\varepsilon}\right)K_x^{\varepsilon}\left(\frac{x-y}{h_\varepsilon}\right)\sigma(\tau,y,\xi_0(\tau,y))\,\eta(\tau/\varepsilon)\,dy\,d\tau. \tag{7}$$

В силу того, что

$$\left| \frac{1}{h_\varepsilon^{1+n}} \int_0^T \int_D K_t^\varepsilon\left(\frac{t-\tau}{h_\varepsilon}\right) K_x^\varepsilon\left(\frac{x-y}{h_\varepsilon}\right) \sigma(\tau, y, \xi_0(\tau, y))\, \eta(\tau/\varepsilon)\, dy\, d\tau \right| \le$$

$$\le \eta_\varepsilon \left(K_0 \frac{\sqrt{\varepsilon}}{h_\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon}\, C_2 \right) \sup_{0 \le t \le T} \int_D \sigma^2(t, y, \xi_0(t, y))\, K_x^\varepsilon\left(\frac{x-y}{h_\varepsilon}\right) \frac{1}{h_\varepsilon^n}\, dy \; +$$

$$+ \; \eta_\varepsilon \sqrt{\varepsilon} \int_0^T \int_D \left| \frac{\partial}{\partial \tau} \sigma(\tau, y, \xi_0(\tau, y)) \right|^2 K_x^\varepsilon\left(\frac{x-y}{h_\varepsilon}\right) \frac{1}{h_\varepsilon^n}\, dy\, d\tau,$$

имеем

$$\int_0^T \int_D |A_\varepsilon(t,x) - A(t,x,\xi_0(t,x))|^2\, dx\, dt \le$$

$$\le 4\, L_A^2 \int_0^T \int_D |\xi_\varepsilon(\tau, y) - \xi_0(\tau, y)|^2\, dy\, d\tau \; +$$

$$+ \; 4\, L_\sigma^2 \int_0^T \int_D |\xi_\varepsilon(t, y) - \xi_0(t, y)|^2\, dy\, |\eta(\tau/\varepsilon)|^2\, d\tau \; +$$

$$+ \; 4\, L_A^2 \int_0^T \int_D \int_0^T \int_D |\xi_0(t, x) - \xi_0(\tau, y)|^2 \times$$

$$\times K_t^\varepsilon\left(\frac{t-\tau}{h_\varepsilon}\right) K_x^\varepsilon\left(\frac{x-y}{h_\varepsilon}\right) \frac{1}{h_\varepsilon^{1+n}}\, dx\, dy\, d\tau\, dt \; +$$

$$+ \left(\eta_\varepsilon \sqrt{\varepsilon}\right) \left[\left(\frac{K_0}{h_\varepsilon} + C_2 \right) \sigma_1 + \sigma_2 \right]^2 \le$$

$$\le 4\left(L_A^2 + L_\sigma^2\right) \int_0^T \int_D |\xi_\varepsilon(\tau, y) - \xi_0(\tau, y)|^2\, dy \left(1 + |\eta(\tau/\varepsilon)|^2\right) d\tau \; +$$

$$+ \; \sqrt{\varepsilon}\; h_\varepsilon^2 \left[\left(\frac{K_0 \sqrt[4]{\varepsilon}}{h_\varepsilon} + C_2 \sqrt[4]{\varepsilon} \right) \sigma_1 + \sigma_2 \sqrt[4]{\varepsilon} \right]^2 +$$

$$+ \; 8\, L_A^2 \frac{1}{h_\varepsilon} \int_0^T \int_D \int_0^T |\xi_0(\tau, y) - \xi_0(t, y)|^2 K_t^\varepsilon\left(\frac{t-\tau}{h_\varepsilon}\right) dy\, d\tau\, dt \; +$$

$$+ \; 8\, L_A^2 \frac{1}{h_\varepsilon^n} \int_D \int_0^T \int_D |\xi_0(t, x) - \xi_0(t, y)|^2 K_x^\varepsilon\left(\frac{x-y}{h_\varepsilon}\right) dx\, dy\, dt. \tag{8}$$

Далее, так как

$$\xi_0(t, x) - \xi_0(t, y) = \int_0^1 \left(\nabla \xi_0(t, x + \theta(y - x)), [x - y] \right) d\theta,$$

то с учетом выпуклости области D имеем

$$\frac{1}{h_\varepsilon^n} \int_D \int_0^T |\xi_0(t, x) - \xi_0(t, y)|^2 K_x^\varepsilon\left(\frac{x-y}{h_\varepsilon}\right) dy\, dx\, dt \le$$

$$\leq h_\varepsilon^2 \int_0^T \int_D |\nabla \xi_0(t,x)|^2 dx\, d\tau \int_{R^n} |V|^2 K_x^\varepsilon(V)\, dV \leq h_\varepsilon^2 C_1 C(\varphi, A_0). \tag{9}$$

Так как

$$\xi_0(t,x) - \xi_0(t,y) = \int_0^1 \frac{\partial \xi_0}{\partial t}(t + \theta(\tau - t), x)(t-\tau)\, d\theta,$$

с учетом оценки (4) получаем

$$\frac{1}{h_\varepsilon} \int_0^T \int_D \int_0^T |\xi_0(\tau,y) - \xi_0(t,y)|^2 K_t^\varepsilon\left(\frac{t-\tau}{h_\varepsilon}\right) dt\, d\tau\, dy \leq$$

$$\leq h_\varepsilon^2 \int_0^T \int_D \left|\frac{\partial \xi_0}{\partial t}(t,x)\right|^2 dt\, dx \int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^2 K_t^\varepsilon(\tau)\, d\tau \leq h_\varepsilon^2 C_1 C(\varphi, A_0). \tag{10}$$

Из (8) с учетом оценок (9), (10), полагая $h_\varepsilon = \sqrt[4]{\varepsilon}$, имеем соотношение

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^T \int_D |A_\varepsilon(t,x) - A(t,x,\xi_0(t,x))|^2 dx\, dt \leq$$

$$\leq 4\left(L_A^2 + L_\sigma^2\right) \int_0^T \int_D \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} |\xi_\varepsilon(\tau,y) - \xi_0(\tau,y)|^2 dy \left(1 + |\eta(\tau/\varepsilon)|^2\right) d\tau +$$

$$+ \eta_\varepsilon^2 L\left[\left(K_0 + \sqrt[4]{\varepsilon} C_2\right)\sigma_1 + \sqrt[4]{\varepsilon}\sigma_2\right]^2 + 16 C_1 C(\varphi, A_0) L_A^2. \tag{11}$$

Пусть

$$\|\xi_\varepsilon(t) - \xi_0(t)\|^2 = \int_D |\xi_\varepsilon(t,x) - \xi_0(t,x)|^2 dx,$$

$$\|\nabla[\xi_\varepsilon(t) - \xi_0(t)]\|^2 = \int_D |\nabla[\xi_\varepsilon(t,x) - \xi_0(t,x)]|^2 dx;$$

тогда в силу условий, наложенных на коэффициенты уравнения (1), получаем

$$\|\xi_\varepsilon(t) - \xi_0(t)\|^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla[\xi_\varepsilon(s) - \xi_0(s)]\|^2 ds \leq$$

$$\leq \nu \int_0^t \|\nabla[\xi_\varepsilon(s) - \xi_0(s)]\|^2 ds + \frac{B_2}{\nu} \int_0^t \|\xi_\varepsilon(s) - \xi_0(s)\|^2 ds +$$

$$+ 2L_\sigma \int_0^t \|\xi_\varepsilon(s) - \xi_0(s)\|^2 |\eta(s/\varepsilon)|\, ds + 2L_A \int_0^t \|\xi_\varepsilon(s) - \xi_0(s)\|^2 ds +$$

$$+ 2 \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \int_D [\xi_\varepsilon(s,x) - \xi_0(s,x)]\, \sigma(s,x,\xi_0(s,x))\, \eta(s/\varepsilon)\, dx\, ds \right|. \tag{12}$$

В силу того, что

$$\sqrt{\varepsilon} \int_0^t \int_D [\xi_\varepsilon(s,x) - \xi_0(s,x)]\, \sigma(s,x,\xi_0(s,x))\, d\eta_\varepsilon(s)\, dx =$$

$$= \sqrt{\varepsilon}\,\eta_\varepsilon(t)\int\limits_D [\xi_\varepsilon(t,x)-\xi_0(t,x)]\,\sigma(t,x,\xi_0(t,x))\,dx\ -$$

$$-\ \sqrt{\varepsilon}\int\limits_0^t \eta_\varepsilon(\tau)\int\limits_D \sigma(\tau,y,\xi_0(\tau,y))\,\frac{\partial[\xi_\varepsilon(\tau,y)-\xi_0(\tau,y)]}{\partial\tau}\,d\tau dy\ -$$

$$-\ \sqrt{\varepsilon}\int\limits_0^t \eta_\varepsilon(\tau)\int\limits_D [\xi_\varepsilon(\tau,y)-\xi_0(\tau,y)]\,\frac{\partial\sigma(\tau,y,\xi_0(\tau,y))}{\partial\tau}\,dy\,d\tau\,.$$

Отсюда имеем

$$\left|\int\limits_0^t\int\limits_D [\xi_\varepsilon(s,x)-\xi_0(t,x)]\,\sigma(s,x,\xi_0(s,x))\,\eta(s/\varepsilon)\,dx\,ds\right| \le$$

$$\le \frac{1}{4}\,\|\xi_\varepsilon(t)-\xi_0(t)\|^2 + \int\limits_0^t \|\xi_\varepsilon(s)-\xi_0(s)\|^2 ds\ +$$

$$+\ 2\varepsilon\eta_\varepsilon^2\left(2\sigma_1+3\sigma_2/4\right) + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \left\|\frac{\partial[\xi_\varepsilon(\tau)-\xi_0(\tau)]}{\partial\tau}\right\|^2 d\tau. \qquad (13)$$

Запишем оценку для последнего слагаемого в соотношении (13); для этого воспользуемся рассуждениями, применяемыми для получения оценки (5). Нетрудно заметить, что справедливы соотношения

$$\nu\int\limits_D |\nabla[\xi_\varepsilon(t,x)-\xi_0(t,x)]|^2\,dx + \int\limits_0^t\int\limits_D \left|\frac{\partial[\xi_\varepsilon-\xi_0]}{\partial\tau}\right|^2 dx\,d\tau \le$$

$$\le 3L_A^2\int\limits_0^t\int\limits_D |\xi_\varepsilon(t,x)-\xi_0(t,x)|^2\,dx\,d\tau\ +$$

$$+\ 3L_\sigma^2\int\limits_0^t\int\limits_D |\xi_\varepsilon(t,x)-\xi_0(\tau,x)|^2\,|\eta(\tau/\varepsilon)|^2\,dx\,d\tau\ +$$

$$+\ 2(\mu_1+B^2)\int\limits_0^t\int\limits_D \left|\nabla[\xi_\varepsilon-\xi_0]\right|^2 dx\,d\tau + 3\left[\int\limits_0^t\int\limits_D \sigma(\tau,y,\xi_0(\tau,y))\,\eta(\tau/\varepsilon)\,dy\,d\tau\right]^2. \qquad (14)$$

Используя неравенство [5, с. 62], из (14), в частности, имеем

$$\nu\int\limits_D |\nabla[\xi_\varepsilon(t,x)-\xi_0(t,x)]|^2\,dx \le C(D)\,3\left(L_A^2+L_\sigma^2\ +\right.$$

$$\left.+\ 2(\mu_1+B^2)\right)\int\limits_0^t\int\limits_D |\nabla[\xi_\varepsilon-\xi_0]|^2\,[2+|\eta(\tau/\varepsilon)|^2]\,d\tau\,dx\ +$$

$$+\ 3\sup_{0\le t\le T}\left|\int\limits_0^t\int\limits_D \sigma(\tau,y,\xi_0(\tau,y))\,\eta(\tau/\varepsilon)\,dy\,d\tau\right|,$$

откуда в силу леммы Гронуолла получаем

$$\int_D |\nabla[\xi_\varepsilon - \xi_0]|^2 dx \le \frac{3}{\nu} \sup_{0\le t\le T} \left| \int_0^t \int_D \sigma(\tau, y, \xi_0(\tau, y))\, \eta(\tau/\varepsilon)\, dy\, d\tau \right|^2 \times$$

$$\times \exp\left\{ 3C\left(L_A^2 + L_\sigma^2 + 2(\mu_1 + B^2)\right) \int_0^T \left(1 + |\eta(\tau/\varepsilon)|^2\right) d\tau \right\}. \qquad (15)$$

Из (14) и (15) вытекает

$$\int_0^t \left\| \frac{\partial[\xi_\varepsilon(\tau) - \xi_0(\tau)]}{\partial\tau} \right\|^2 d\tau \le$$

$$\le 3\, C(D) \left(L_A^2 + L_\sigma^2 + 2(\mu_1 + B^2)\right) \int_0^T \left(1 + |\eta(\tau/\varepsilon)|^2\right) d\tau \times$$

$$\times \exp\left\{ 3C(D) \left(L_A^2 + L_\sigma^2 + 2(\mu_1 + B^2)\right) \int_0^T \left(1 + |\eta(\tau/\varepsilon)|^2\right) d\tau \right\} \times$$

$$\times \left(1 + \frac{1}{\nu}\right) 3 \sup_{0\le t\le T} \left| \int_0^t \int_D \sigma(\tau, y, \xi_0(\tau, y))\, \eta(\tau/\varepsilon)\, dy\, d\tau \right|^2, \qquad (16)$$

здесь $C(D)$ — постоянная, фигурирующая в неравенстве Пуанкаре–Фридрихса [5]. Далее, так как

$$\int_0^t \int_D \sigma(\tau, y, \xi_0(\tau, y))\, \eta(\tau/\varepsilon)\, dy\, d\tau = \sqrt{\varepsilon}\, \eta_\varepsilon(t) \int_D \sigma(t, y, \xi_0(t, y))\, dy -$$

$$- \sqrt{\varepsilon} \int_0^t \int_D \frac{\partial \sigma(\tau, y, \xi_0(\tau, y))}{\partial\tau}\, dy\, \eta_\varepsilon(\tau)\, d\tau,$$

имеем

$$\sup_{0\le t\le T} \left| \int_0^t \int_D \sigma(\tau, y, \xi_0(\tau, y))\, \eta(\tau/\varepsilon)\, dy\, d\tau \right| \le \varepsilon\, \eta_\varepsilon^2 [\sigma_1 + T\sigma_2] \operatorname{mes} D. \qquad (17)$$

Из (12) и (13) следует

$$\frac{1}{2} \|\xi_\varepsilon(t) - \xi_0(t)\|^2 \le$$

$$\le \left(\frac{B_2}{\nu} + 2L_\sigma + 2L_A + 2\right) \int_0^t \|\xi_\varepsilon(\tau) - \xi_0(\tau)\|^2 d\tau +$$

$$+ 4\varepsilon\eta_\varepsilon^2 \left(2\sigma_1 + 3\sigma_2/4\right) + \int_0^t \left\| \frac{\partial[\xi_\varepsilon - \xi_0]}{\partial\tau} \right\|^2 d\tau.$$

Отсюда в силу леммы Гронуолла

$$\|\xi_\varepsilon(t) - \xi_0(t)\|^2 \le \left[8\varepsilon\eta_\varepsilon^2 \left(2\sigma_1 + 3\sigma_2/4\right) + 2\int_0^T \left\| \frac{\partial[\xi_\varepsilon - \xi_0]}{\partial\tau} \right\|^2 d\tau \right] \times$$

$$\times \exp\left\{\left(2 + 2L_A + 2L_\sigma + \frac{B^2}{\nu}\right)T\right\}. \tag{18}$$

Подставляя (17) сначала в (16), а затем результат в (18), получаем

$$\|\xi_\varepsilon(t) - \xi_0(t)\|^2 \le \left[8\varepsilon\eta_\varepsilon^2\left(2\sigma_1 + 3\sigma_2/4\right) + \right.$$

$$\left. + 23\,C(D)\left(L_A^2 + L_\sigma^2 + 2(\mu_1 + B^2)\right)\int_0^t \left(1 + |\eta(\tau/\varepsilon)|^2\right)d\tau\right] \times$$

$$\times \exp\left\{3\,C(D)\left(L_A^2 + TL_\sigma^2 + 2(\mu_1 + B^2)\right)\int_0^T \left(1 + |\eta(\tau/\varepsilon)|^2\right)d\tau\right\} \times$$

$$\times 3\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)\varepsilon\eta_\varepsilon^2[\sigma_1 + T\sigma_2]\,\mathrm{mes}\,D.$$

Подставляя последнюю оценку в неравенство (11), имеем

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^T\int_D |A_\varepsilon(t,x) - A(t,x,\xi_0(t,x))|^2\,dx\,dt \le 4\left(L_A^2 + L_\sigma^2\right),$$

$$\sqrt{\varepsilon}\,\eta_\varepsilon^2\,\frac{8\left(2\sigma_1 + 3\sigma_2/4 + C(D)\right)\left(L_A^2 + L_\sigma^2 + 2(\mu_1 + B^2)\right)}{\int_0^T (1 + |\eta(\tau/\varepsilon)|^2)\,d\tau} \times$$

$$\times \exp\left\{3C(D)\left(L_A^2 + TL_\sigma^2 + 2(\mu_1 + B^2)\right)\int_0^T \left(1 + |\eta(\tau/\varepsilon)|^2\right)d\tau\right\} \times$$

$$\times 3\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)(\sigma_1 + T\sigma_2)\,\mathrm{mes}\,D\int_0^T (1 + |\eta(\tau/\varepsilon)|^2)\,d\tau +$$

$$+ \eta_\varepsilon^2\left[\left(K_0 + \sqrt[4]{\varepsilon}\,C_2\right)\sigma_1 + \sqrt[4]{\varepsilon}\,\sigma_2\right]^2 + 16\,C_1C(\varphi, A_0)\,L_A^2.$$

Отсюда и следует утверждение теоремы.

1. *Фарлоу С.* Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров. – М.: Мир, 1985. – 383 с.
2. *Давыдов Ю. А.* О сходимости распределений, порожденных стационарными случайными процессами // Теория вероятностей и ее применения. – 1968. – **13**, вып. 4. – С. 730–737.
3. *Гихман Ил. И.* О смешанной задаче для стохастического дифференциального уравнения параболического типа // Укр. мат. журн. – 1980. – **32**, № 3. – С. 367–372.
4. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
5. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. – М.: Наука, 1973. – 407 с.

Получено 25.05.94