УДК 517.95

М. В. Борсук (Львів. ун-т)

ПРО РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ ЕЛІПТИЧНИХ НЕДИВЕРГЕНТНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ В ОБЛАСТІ З КОНІЧНОЮ ТОЧКОЮ*

Solvability of the Dirichlet problem is studied for the second order linear and quasilinear uniformly elliptic nondivergence equations in a bounded domain, the boundary of which contains a conical point. New theorems about unique solvability of solution of the linear problem are obtained under minimal smoothness conditions of the coefficients, the right-hand sides, and the boundary of the domain. We find classes of solvability of the problem for quasilinear equations under natural conditions.

Вивчена розв'язність задачі Діріхле для лінійних та квазілінійних рівномірно еліптичних рівнянь другого порядку в обмеженій області, межа якої містить у собі канонічні точки. Одержані нові теореми про однозначну розв'язність лінійної задачі за мінімальних умов на гладкість коефіцієнтів, правих частин та межі області. Встановлені класи розв'язності задачі для квазілінійних рівнянь за природних умов.

У даній роботі досліджується питання розв'язності задачі Діріхле для лінійних та квазілінійних еліптичних недивергентних рівнянь другого порядку. У роботах [1–3] досліджена нормальна розв'язність у вагових соболєвських просторах загальних лінійних еліптичних задач в негладких областях при припущеннях достатньої гладкості як поверхні $\partial G \setminus O$, так і коефіцієнтів задачі. Ми досліджуємо розв'язність задачі Діріхле для лінійних рівнянь у таких функціональних просторах, в яких вона має місце при *мінімальних* вимогах на гладкість коефіцієнтів та правих частин, а також послаблюємо вимоги на гладкість поверхні $\partial G \setminus O$. Теорія розв'язності задачі (КЛ) (див. далі) в гладкій області повністю нещодавно побудована завдяки працям О. Ладиженської, Н. Уральцевої [4] та Г. Лібермана [5, 6]. Що ж стосується квазілінійних рівнянь у негладких областях, то автору відома лише одна робота І. І. Данилюка [7] (мова йде про недивергентні рівняння), в якій доведена розв'язність у соболєвському просторі $W^{2,2+\varepsilon}(G)$ при достатньо малому $\varepsilon > 0$ двовимірної задачі (КЛ) в області з кутовою точкою. Нижче будуть сформульовані нові теореми існування розв'язку задачі (КЛ) в області з кутовою граничною точкою в соболєвських просторах при природних умовах.

Будемо використовувати позначення й означення з [8, 9].

Нехай $G \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, — обмежена область з межею ∂G, яка припускається достатньо гладкою поверхнею скрізь за виключенням точки $O \in \partial G$ — початку прямокутної системи координат, а поблизу точки O вона є конічною поверхнею з вершиною в O. Нехай $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — точка в $\mathbb{R}^n$; (r, ω) — її сферичні координати; Ω — область на одиничній сфері S^{n-1} з гладкою межею $\partial\Omega$; $G_a^b = G \cap \{(r, \omega) \mid 0 \leq a < r < b,\ \omega \in \Omega\}$ — шар в $\mathbb{R}^n$; $\Gamma_a^b = \partial G \cap \cap \{(r, \omega) \mid 0 \leq a < r < b,\ \omega \in \partial\Omega\}$ — бічна поверхня шару G_a^b; $G_\varepsilon = G \setminus G_0^\varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$; $\Omega_\rho = G_0^d \cap \{|x| = \rho\}$, $0 < \rho < d$.

Будемо використовувати наступні функціональні простори: $C^l(\overline{G})$ — банахів простір функцій, що мають неперервні похідні в $\overline{G}$ до порядку $l \geq 0$, якщо l ціле, та до порядку $[l]$ (ціла частина l), якщо l не ціле, які задовольняють умову Гельдера з показником $l - [l]$; через $|u|_{l;G}$ позначимо норму в $C^l(\overline{G})$,

*Робота частково фінансована Фондом фундаментальних досліджень Державного комітету України з питань науки і технологій.

через $\| u \|_{q;G}$ — норму елемента в банаховому просторі $L_q(G)$, $q \geq 1$; через $\| u \|_{m,q\,G}$ — норму елемента соболєвського простору $W^{m,q}(G)$; означимо ваговий простір $V^m_{q,\alpha}(G)$ як множину функцій зі скінченною нормою

$$\| u \|_{V^m_{q,\alpha}(G)} = \left(\iint\limits_G \sum_{|\beta|=0}^{m} r^{q(|\beta|-m+\alpha/2)} \left| D^\beta u \right|^q dx \right)^{1/q}, \quad q \geq 1,$$

$m \geq 0$ — ціле. Якщо $\mathcal{X}(G)$ — один з соболєвських просторів, означених вище, то під $\mathcal{X}(G \setminus O)$ розуміємо множину функцій, які мають скінченні інтеграли, що фігурують в означенні норми в $\mathcal{X}(G)$, але беруться по множині G_ε $\forall\, \varepsilon > 0$. Нарешті, через $\mathcal{X}_{\mathrm{loc}}(G)$ позначимо локальний простір функцій, що належать до $\mathcal{X}(G')$ для будь-якого компакту $G' \subset G$.

В області G розглядаємо задачу Діріхле

$$\begin{cases} Lu = a^{ij}(x) u_{x_i x_j} + a^i(x) u_{x_i} + a(x) u = f(x), & x \in G, \\ u(x) = \varphi(x), & x \in \partial G, \end{cases} \qquad \text{(Л)}$$

або

$$\begin{cases} a_{ij}(x, u, u_x) u_{x_i x_j} + a(x\, u, u_x) = 0, & x \in G, \\ u(x) = \varphi(x), & x \in \partial G. \end{cases} \qquad \text{(КЛ)}$$

Означення. *Розв'язком задачі* (Л) *або* (КЛ) *називається функція* $u(x) \in C^0(\overline{G}) \cap W^{2,q}_{\mathrm{loc}}(\overline{G} \setminus O)$, $q \geq n$, *що задовольняє рівняння задачі для майже всіх* $x \in G$ *та граничну умову для всіх* $x \in \partial G$. *Вважаємо відомою величину*

$$M_0 = \max_{x \in \overline{G}} | u(x) |.$$

Надалі скрізь припускаємо виконаною умову: існує число d_0 таке, що $G_0^{d_0}$ є опуклим конусом; це означає, що $\lambda > 1$, де $\lambda = \lambda(\Omega)$ — найменше додатне власне число задачі

$$\begin{cases} \Delta_\omega \psi + \lambda(\lambda + n - 2)\psi = 0, & \omega \in \Omega \subset S^{n-1}, \\ \psi(\omega) = 0, & \omega \in \partial\Omega, \end{cases} \qquad \text{(ЗВ)}$$

де Δ_ω — оператор Лапласа – Бельтрамі на одиничній сфері. Ця умова еквівалентна наступній:

(S) для довільного $\varepsilon_0 > 0$ існує $d_0 > 0$ таке, що $G_0^{d_0} = \{ x \in G \mid \cos\theta = x_n / r;\ |\theta| < \pi/2 - \varepsilon_0 \}$ (тобто $G_0^{d_0} \subset \{ x_n \geq 0 \}$, отже, $\lambda > 1$ [10]).

Далі будуть потрібні наступні функції: $\mathcal{A}(t)$ — визначена при $t \geq 0$ невід'ємна монотонно зростаюча неперервна в нулі функція, $\mathcal{A}(0) = 0$; $d(x) = \operatorname{dist}(x, \partial G \setminus O)$.

Теорема 1. *Нехай* $\Gamma_{r_0} \in C^{1,1}$ *та виконані умови:*

а) умова рівномірної еліптичності:

$$\nu \xi^2 \leq a^{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \mu \xi^2 \quad \forall\, x \in \overline{G}, \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n; \quad \nu, \mu = \mathrm{const} > 0;$$

аа) $a^{ij}(0) = \delta^i_j$ — *символ Кронекера* $(i, j = 1, \ldots, n)$;

aaa) $a^{ij}(x) \in C^0(\overline{G})$, $i, j = 1, \dots, n$; $a^i(x)$, $a(x)$ *— вимірні в* G *функції, причому* $a^i(x) \in L_n(G)$; $a(x) \in L_p(G)$, $p > n/2$; *для них виконуються наступні нерівності:*

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n} \left| a^{ij}(x) - a^{ij}(0) \right|^2 \right)^{1/2} + |x| \left(\sum_{i=1}^{n} \left| a^i(x) \right|^2 \right)^{1/2} + |x|^2 |a(x)| \le \mathcal{A}(|x|),$$

$$x \in G_0^{r_0};$$

b) $a(x) \le 0 \ \ \forall x \in G$;

c) $f(x) \in L_p(G) \cap V^0_{2,4-n}(G)$; $\varphi(x) \in V_{p,0}^{2-1/p}(\partial G) \cap V^{3/2}_{2,4-n}(\partial G)$; $p \ge n$;

d) існують невід'ємні числа k_1, k_2 *та* $s > \lambda$ *такі, що*

$$\| f \|_{V^0_{2,4-n}(G_0^\rho)} + \| \varphi \|_{V^{3/2}_{2,4-n}(\Gamma_0^\rho)} \le k_1 \rho^s, \quad \rho \in (0, r_0);$$

$$\| f \|_{p, G^\rho_{\rho/2}} + \| \varphi \|_{V^{2-1/p}_{p,0}(\Gamma^\rho_{\rho/2})} \le k_2 \rho^{\lambda - 2 + n/p}, \quad \rho \in (0, r_0).$$

Нехай або $\lambda \ge 2$, $p \ge n$ *або* $n \le p < n/(2-\lambda)$, $1 < \lambda < 2$.

Тоді задача (Л) *має єдиний розв'язок* $u(x) \in V^2_{p,0}(G)$ *і для нього справджується оцінка*

$$\| u \|_{V^2_{p,0}(G)} \le c \left(\| f \|_{p,G} + \| \varphi \|_{V^{2-1/p}_{p,0}(\partial G)} \right) \tag{1}$$

зі сталою c, *що не залежить від* u, f, φ *і лише визначається величинами* ν, μ, p, n, $\max_{x \in \overline{G}} \mathcal{A}(|x|)$, $\| a \|_{p,G}$, $\left\| \left(\sum_{i=1}^{n} |a^i(x)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{n,G}$ *та областю* G.

Ця теорема доводиться методом продовження за параметром з урахуванням теореми Вержбинського – Мазьї ([11], теорема 1, зауваження 5) про однозначну розв'язність задачі Діріхле для рівняння Пуассона. Оцінка (1) є результатом шаудерівської L_p-оцінки всередині області та поблизу гладкої частини межі, принципу максимума Александрова ([12], теорема 9.1), оцінки (16) з [11], а також оцінок з [8].

У наступній теоремі послаблюється вимога на гладкість поверхні Γ_{r_0}, але підсилюється припущення на гладкість коефіцієнтів задачі.

Теорема 2. *Нехай відомі числа* $\lambda \in (1, 2)$, $q \ge n/(2-\lambda)$, $\Gamma_{r_0} \in C^{1,1}$ *і виконуються припущення a) – d) при* $p = q$ *та, крім того;*

в) $a^{ij}(x)$, $i, j = 1, \dots, n$, *неперервні за Діні в будь-якій точці* $y \in \partial G$, *тобто*

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n} \left| a^{ij}(x) - a^{ij}(y) \right|^2 \right)^{1/2} \le \mathcal{A}(|x-y|) \quad \forall x \in \overline{G}, \quad y \in \partial G,$$

причому

$$\int_0^{r_0} t^{-1} \mathcal{A}(t)\, dt < \infty;$$

ee) існує невід'ємне число k_3 *таке, що виконується нерівність*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left|a^{i}(x)\right|^{2}\right)^{1/2} + |a(x)| + |f(x)| + |\Phi_{xx}(x)| \le k_3 d^{\lambda-2}(x), \ \ x\in G_\varepsilon \quad \forall\,\varepsilon>0.$$

Тоді задача (Л) *має єдиний розв'зок* $u(x)\in W^{2,q}_{\mathrm{loc}}(G)\cap V^{2}_{p,0}(G)\cap C^{\lambda}(\overline{G})$ *для довільних* $p\in[n, n/(2-\lambda))$ *і для нього справджується оцінка* (1), *а також*

$$|u|_{\lambda,\overline{G}} \le \mathcal{K} \tag{2}$$

зі сталою $\mathcal{K}$, *що не залежить від* $u(x)$ *і визначається лише величинами* $n, q, \nu, \mu, \lambda, s, k_1, k_2, k_3, \|f\|_{q,G}, \|\varphi\|_{V^{2-1/q}_{q,0}(\partial G)}, \int_0^{r_0} t^{-1}\mathcal{A}(t)\,dt, \max\limits_{x\in\overline{G}}\mathcal{A}(|x|)$ *та областю* G.

Доведення. За теоремою 9.30 [12] задача (Л) має єдиний розв'язок $u(x)\in W^{2,q}_{\mathrm{loc}}(G)\cap C^{0}(\overline{G})$. Оскільки $n\le p<n/(2-\lambda)$, а $f(x)\in L_q(G)$, $\varphi(x)\in V^{2-1/q}_{q,0}(\partial G)$, $q\ge n/(2-\lambda)$, то виконані всі умови теореми 1, за якою маємо $u(x)\in V^{2}_{p,0}(G)$ і для $u(x)$ справджується оцінка (1). Твердження $u(x)\in C^{\lambda}(\overline{G})$ та оцінка (2) доводяться за допомогою методу розбиття одиниці. При цьому використовуються:

– теорема вкладення Соболєва – Кондрашова, яка забезпечує необхідну гладкість розв'язку всередині області G;

– теорема 3 [8] про гладкість розв'язку в околі конічної точки;

– теорема 3.1 [13] про гладкість розв'язку в околі C^{λ}-межі.

Аналогічним чином доводиться така теорема.

Теорема 3. *Нехай виконуються всі умови теореми* 2 *за винятком вимоги на гладкість поверхні* Γ_{r_0}, *яка замінюється припущенням* $\Gamma_{r_0}\in C^{\lambda}$. *Тоді задача* (Л) *має єдиний розв'язок* $u(x)\in W^{2,q}_{\mathrm{loc}}(G)\cap C^{\lambda}(\overline{G})$ *і для нього вірна оцінка* (2).

Нехай $G_0 = G_0^{\infty}$ — необмежений конус, $G_0\subset\{x_n>0\}$, Γ_0 — його бічна поверхня. Визначимо лінійний еліптичний оператор

$$\mathcal{L}_0 \equiv a^{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j};\quad a^{ij}(x)\equiv a^{ji}(x),\quad x\in G_0,$$

$$\nu\xi^2 \le a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \le \mu\xi^2 \quad \forall\, x\in G_0,\quad \forall\,\xi\in\mathbb{R}^n;\quad \nu,\ \mu=\mathrm{const}>0;$$

Лема (про існування бар'єрної функції). *Існують число* $h>0$, *що визначається лише областю* G_0, *число* $\gamma_0>0$ *та функція* $w(x)\in C^1(\overline{G_0})\cap C^2(G_0)$, *які залежать лише від області* G_0 *та сталих еліптичності* ν,μ *оператора* $\mathcal{L}_0$, *такі, що для всіх* $\gamma\in(0,\gamma_0]$

$$\mathcal{L}_0 w(x) \le -\nu h^2|x|^{\gamma-1},\quad x\in G_0, \tag{3}$$

$$0\le w(x)\le |x|^{1+\gamma};\quad |\nabla w(x)|\le 2(1+h^2)^{1/2}|x|^{\gamma},\quad x\in\overline{G}_0. \tag{4}$$

Доведення. Позначимо $x'=(x_1,\dots,x_{n-2})$, $x=x_{n-1}$, $y=x_n$. У півпросторі $y\ge\ge 0$ розглянемо конус $\mathcal{K}$ з вершиною в O такий, що $\mathcal{K}\supset G_0$ (це можливо, оскільки $G_0\subset\{y>0\}$). Нехай $\partial\mathcal{K}$ — бічна поверхня конуса $\mathcal{K}$ і рівняння множини $\partial\mathcal{K}\cap\{xOy\}$ має вигляд $y=\pm hx$, так що всередині $\mathcal{K}$ виконується нерівність $y>h|x|$. Розглянемо функцію

$$w(x';x,y) = (y^2-h^2x^2)y^{\gamma-1}, \quad \gamma\in\mathbb{R}. \tag{5}$$

Перепозначаючи коефіцієнти оператора $\mathcal{L}_0$: $a^{n-1,n-1}=a$, $a^{n-1,n}=b$, $a^{nn}=c$, маємо

$$\mathcal{L}_0 w = aw_{xx}+2bw_{xy}+cw_{yy};$$
$$\nu\eta^2 \le a\eta_1^2+2b\eta_1\eta_2+c\eta_2^2 \le \mu\eta^2; \tag{6}$$
$$\eta^2 = \eta_1^2+\eta_2^2 \quad \forall\,\eta_1,\eta_2\in\mathbb{R}.$$

Обчислимо оператор $\mathcal{L}_0$ на функції (5):

$$\mathcal{L}_0 w = -h^2y^{\gamma-1}\varphi(\gamma),$$
$$\varphi(\gamma) = 2(a-2bt+ct^2)-(3c^2-4bt+ch^{-2})\gamma - c(h^{-2}-t^2)\gamma^2; \tag{7}$$
$$t = x/y,\ |t|<1/h.$$

Оскільки на підставі (6) $\varphi(0)=2(a-2bt+ct^2)\ge 2\nu$ і $\varphi(\gamma)$ є квадратичною функцією, очевидно, знайдеться число $\gamma_0>0$, що залежить лише від ν, μ, h, таке, що $\varphi(\gamma)>\nu$ для всіх $\gamma\in[0,\gamma_0]$. Тепер із (5) та (7) одержуємо всі твердження леми.

Означимо множину $\mathfrak{M}=\{(x,u,z\mid x\in\overline{G},\ u\in\mathbb{R},\ z\in\mathbb{R}^n)\}$. Відносно рівняння задачі (КЛ) припустимо, що на множині $\mathfrak{M}$ виконуються умови:

A) умова Каратеодорі для функцій $a(x,u,z)$, $a_{ij}(x,u,z)$, $i,j=1,\ldots,n$;

B) рівномірна еліптичність: існують додатні сталі ν, μ, незалежні від u, z, такі, що для всіх $\xi\in\mathbb{R}^n$

$$\nu\xi^2\le a_{ij}(x,u,z)\xi_i\xi_j\le\mu\xi^2;$$

C) існують число $\beta>\lambda-2>-1$, невід'ємні числа μ_1, k_1 та функції $b(x)$, $f(x)\in L_{q,\mathrm{loc}}(\overline{G}\setminus O)$, $q\ge n$, незалежні від u, z, такі, що

$$|a(x,u,z)|\le\mu_1|z|^2+b(x)|z|+f(x),$$

причому

$$b(x)+f(x)\le k_1|x|^{\beta},\quad x\in G_0^{d_0}. \tag{8}$$

Побудована бар'єрна функція та принцип порівняння (пп. 3. 1., 9.1 [12]) дають змогу оцінити $|u(x)|$ в околі конічної точки.

Теорема 4. *Нехай* $u(x)$ — *розв'язок задачі* (КЛ) *та виконуються умови* (S), A), B), C) *на множині* $\mathfrak{M}$ *з* $u=u(x)$, $z=u_x(x)$. *Тоді існують додатні числа* $d\le d_0$ *та* γ, *які визначаються лише величинами* ν, μ, μ_1, n, k_1, β, γ_0, d_0, M_0 *та областю* G, *такі, що в області* G_0^d *виконується оцінка*

$$|u(x)|<c_0|x|^{1+\gamma} \tag{9}$$

зі сталою c_0, *що не залежить від* $u(x)$ *та визначається лише величинами* ν, μ, μ_1, n, k_1, β, γ_0, d_0, M_0 *і областю* G.

Доведення. Розглянемо лінійний еліптичний оператор

$$\tilde{L} = a^{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + a^{i}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad x \in G;$$

$$a^{ij}(x) = a_{ij}((x, u(x), u_x(x)); \quad a^{i}(x) = b(x)|\nabla u(x)|^{-1} u_{x_i}(x),$$

$a^{i}(x) = 0$, якщо $|\nabla u(x)| = 0$. Означимо допоміжну функцію

$$v(x) = -1 + \exp(\nu^{-1}\mu_1 u(x)). \tag{10}$$

Для неї маємо

$$\tilde{L}v(x) = \nu^{-1}\mu_1(a^{ij}(x)u_{x_i x_j} + \nu^{-1}\mu_1 a^{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j} +$$

$$+ b(x)|\nabla u(x)|)\exp(\nu^{-1}\mu_1 u(x)) =$$

$$= \nu^{-1}\mu_1(b(x)|\nabla u(x)| - a((x, u(x), u(x)) +$$

$$+ \nu^{-1}\mu_1 a^{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j})\exp(\nu^{-1}\mu_1 u(x)) \geq$$

$$\geq -\nu^{-1}\mu_1 f(x)\exp(\nu^{-1}\mu_1 M_0)$$

на підставі B), C). За умовою (8) тепер маємо

$$\tilde{L}v(x) \geq -\nu^{-1}\mu_1 k_1 r^{\beta}\exp(\nu^{-1}\mu_1 M_0), \quad x \in G_0^d. \tag{11}$$

Нехай γ_0 — число, визначене лемою про бар'єрну функцію, а число γ задовольняє нерівність

$$0 < \gamma \leq \min(\gamma_0, \beta + 1). \tag{12}$$

Обчислимо оператор $\tilde{L}$ від бар'єрної функції (5):

$$\tilde{L}w(x'; x, y) = -h^2 y^{\gamma-1}\varphi(\gamma) +$$

$$+ |\nabla u|^{-1} b\left((h^2(1-\gamma)x^2 y^{\gamma-2} + (1+\gamma)y^{\gamma})\frac{\partial u}{\partial x} - 2h^2 x y^{\gamma-1}\frac{\partial u}{\partial y}\right) \leq$$

$$\leq -\nu h^2 y^{\gamma-1} + 2(1+h)b y^{\gamma} \quad \forall\, (x'; x, y) \in G_0.$$

Повертаючись до старих позначень та беручи до уваги нерівність (8), одержуємо

$$\tilde{L}w(x) \leq (-\nu h^2 + 2(1+h)k_1 d^{1+\beta})r^{\gamma-1}, \quad x \in G_0^d.$$

Нехай тепер число $d \in (0, d_0)$ задовольняє нерівність

$$d \leq (\nu h^2 / 4k_1(1+h))^{1/(1+\beta)}. \tag{13}$$

Тоді остаточно

$$\tilde{L}w(x) \leq -\frac{1}{2}\nu h^2 r^{\gamma-1}, \quad x \in G_0^d. \tag{14}$$

Визначимо число

$$A \geq 2k_1\mu_1\nu^{-2}h^{-2}d^{1+\beta-\gamma}\exp(M_0\mu_1/\nu). \tag{15}$$

Тоді з (11) та (14) з урахуванням (12) маємо

$$\tilde{L}(Aw(x)) \le \tilde{L}v(x), \quad x \in G_0^d. \tag{16}$$

Крім того, з (4) та (10) випливає

$$Aw(x) \ge 0 = v(x), \quad x \in \Gamma_0^d. \tag{17}$$

Порівняємо тепер функції v та w на Ω_d. За умовою S) на множині $G \cap \{r = d\} \cap \{x_{n-1}Ox_n\}$ маємо

$$x_{n-1} = d\sin\theta, \quad x_n = d\cos\theta, \quad |\theta| < \pi/2 - \varepsilon_0, \quad d \le d_0,$$

а також існує конус $\mathcal{K} \supset G_0$ такий, що $0 < h < \operatorname{tg}\varepsilon_0$ (див. доведення леми про бар'єрну функцію). З (5) дістаємо

$$w\big|_{r=d} \le d^{1+\gamma}(\sin\varepsilon_0)^{\gamma-1}(\sin^2\varepsilon_0 - h^2\cos^2\varepsilon_0) > 0. \tag{18}$$

Разом з тим ([4], п. 2) $|u(x)| \le M_\alpha |x|^\alpha$, де $\alpha \in (0, 1)$ визначається величинами ν^{-1}, μ, n, областю G, а M_α — тими ж самими величинами, а також M_0, k_1, β, d_0. Отже, на підставі відомої нерівності $e^t - 1 \le t/(1-t)$, $t < 1$, маємо

$$v(x)\big|_{r=d} \le -1 + \exp(\nu^{-1}\mu_1 M_\alpha d^\alpha) \le 2\nu^{-1}\mu_1 M_\alpha d^\alpha, \tag{19}$$

якщо d настільки мале, що задовольняє нерівність

$$d \le (2\mu_1 M_\alpha \nu^{-1})^{-1/\alpha}. \tag{20}$$

Вибираючи тепер A настільки великим, щоб виконувалась нерівність

$$A \ge 2\mu_1 M_\alpha d^{\alpha-1-\gamma}(\sin\varepsilon_0)^{1-\gamma}(\sin^2\varepsilon_0 - h^2\cos^2\varepsilon_0)^{-1}, \tag{21}$$

з (18), (19) одержуємо

$$Aw(x) \ge v(x), \quad x \in \Omega_d. \tag{22}$$

Отже, якщо $d \in (0, d_0)$ вибране згідно з (13), (20), γ — згідно з (12), A — згідно з (15), (21), то з (16), (17), (22) маємо

$$\tilde{L}v(x) \ge \tilde{L}(Aw(x)), \quad x \in G_0^d; \quad v(x) \le Aw(x), \quad x \in \partial G_0^d.$$

Тепер з принципу порівняння випливає, що $v(x) \le Aw(x)$, $x \in \partial \overline{G}_0^d$. Повертаючись до функції $u(x)$, з (10) дістаємо

$$u(x) = \nu\mu_1^{-1}\ln(1 + v(x)) \le \nu\mu_1^{-1}\ln(1 + Aw(x)) \le A\nu\mu_1^{-1}w(x), \quad x \in \overline{G}_0^d.$$

Аналогічним чином доводиться оцінка знизу $u(x) \ge -A\nu\mu_1^{-1}w(x)$, $x \in \overline{G}_0^d$, якщо як допоміжну функцію розглянути $v(x) = 1 - \exp\left(-\nu^{-1}\mu_1 u(x)\right)$. На підставі (4) теорему доведено.

Тепер методом кілець Кондратьева, використовуючи результати роботи [4] для гладких областей, оцінюється максимум модуля градієнта розв'язку поблизу конічної точки.

Теорема 5. *Нехай* $u(x)$ — *розв'язок задачі* (КЛ), $q > n$ *та виконані припущення* S), B), C), *а також умова*:

D) *на множині* $\mathfrak{M}_{r_0}^{(u)} = \{(x, u, z) \mid x \in G_0^{r_0},\ u = u(x),\ z = u_x(x)\}$ *справджу-*

ється нерівність (4.1) *з* [4] *з функцією* $\Phi_2(x)$, *яка в свою чергу задовольняє умову: існує невід'ємна стала* k_2 *така, що* $\|\Phi_2(x)\|_{q, G^{\rho}_{\rho/2}} \le k_2 \rho^{n/q+\gamma-1}$, $\rho \in$ $\in (0, r_0)$, $q > n$, $\gamma \in (0, 1)$, *де* γ *та ж сама, що й в теоремі* 4.

Тоді в області G_0^d, $0 < d \le \min(d_0, r_0)$, *вірна нерівність*

$$|\nabla u(x)| < c_1 |x|^{\gamma} \tag{23}$$

зі сталою c_1, *що залежить лише від* ν^{-1}, μ, μ_0, μ_1, μ_2, n, q, β, γ, k_1, k_2, M_0 *та області* G.

Доведення. Розглянемо в шарі $G^1_{1/2}$ функцію $v(x') = \rho^{-1-\gamma} u(\rho x')$, вважаючи $u \equiv 0$ зовні G. У рівнянні (КЛ) зробимо заміну змінних $x = \rho x'$. Функція $v(x')$ задовольняє рівняння

$$a^{ij}(x') v_{x_i' x_j'} = F(x'), \quad x' \in G^1_{1/2}, \tag{КЛ$'$}$$

де

$$a^{ij}(x') = a_{ij}(\rho x', \rho^{1+\gamma} v(x'), \rho^{\gamma} v_{x'}(x')),$$

$$F(x') = -\rho^{1-\gamma} a(\rho x', \rho^{1+\gamma} v(x'), \rho^{\gamma} v_{x'}(x')).$$

Припущення B) – D) гарантують виконання умов теореми 4.1. з [4] про обмеженість модуля градієнта розв'язку всередині й поблизу гладкого куска межі:

$$\operatorname*{vrai\,max}_{G^1_{1/2}} |\nabla' v| \le M_1', \tag{24}$$

де M_1' визначається лише величинами ν, μ, μ_0, μ_1, μ_2, k_1, k_2, c_0, M_0, β, γ, n, q. Повертаючись до старих змінних з (24), маємо $|\nabla u(x)| \le M_1' \rho^{\gamma}$, $x \in G^{\rho}_{\rho/2}$, $\rho \in (0, d)$. Покладаючи $|x| = 2p/3$, одержуємо шукану оцінку (23). Теорему 5 доведено.

Встановимо тепер „слабку" гладкість розв'язку задачі (КЛ) в околі конічної точки.

Теорема 6. *Нехай* $u(x)$ — *розв'язок задачі (КЛ),* $q > n$ *та виконані припущення* S), B) – D), *а також умова*:

E) *або на множині* $\mathfrak{M}^{(u)}_{r_0}$ *справджується нерівність* (4.10) *з* [4], *або на множині*

$$\mathfrak{M}_M \equiv \{(x, u, z) \mid x \in \overline{G},\ u \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{R}^n \mid |u| + |z| < M\}$$

функції $a_{ij}(x, u, z)$, $i, j = 1, \dots, n$, *неперервні за Ліпшіцом за всіма своїми аргументами та існує невід'ємна стала* μ_M *така, що*

$$\left|\frac{\partial a_{ij}(x, u, z)}{\partial z_k}\right| \le \mu_M, \quad \left|\frac{\partial a_{ij}(x, u, z)}{\partial u}\right| + \left|\frac{\partial a_{ij}(x, u, z)}{\partial x_k}\right| + |a(x, u, z)| \le$$

$$\le \mu_M \delta^{\gamma-1}(x), \quad i, j, k = 1, \dots, n$$

(див. нерівності (5.20a), (5.20b) [6]*).*

Нехай γ_0 — *число, визначене за лемою про бар'єрну функцію. Тоді* $u(x) \in$

$\in C^{1+\gamma}(\overline{G_0^d})$ *для деякого* $d \in (0, \min(d_0, r_0))$ *та всіх* $\gamma \in (0, \gamma^*]$, *де* $\gamma^* = \min(\gamma_0; \beta+1; 1-n/q)$.

Доведення. Зафіксуємо число $d \in (0, \min(d_0, r_0))$ таким чином, що згідно з теоремами 4, 5 виконуються оцінки (9), (23). Розглянемо в шарі $G^1_{1/2}$ рівняння (КЛ$'$) для функції $v(x') = \rho^{-1-\gamma} u(\rho x')$. За теоремою вкладення Соболева – Кондрашова (див., наприклад, теорему 1.4.5 (b) з [14])

$$\sup_{\substack{x', y' \in G^1_{1/2} \\ x' \neq y'}} \frac{|\nabla' v(x') - \nabla' v(y')|}{|x'-y'|^{1-n/q}} \leq c(n, q, G) \|v\|_{2, q; G^1_{1/2}}, \quad q > n. \tag{25}$$

Перевіримо можливість застосування до розв'язку $v(x')$ локальної шаудерівської L_q-оцінки всередині області та поблизу гладкого куска межі (п. 9.5 [12]). Дійсно, за припущеннями D), E) теореми функції $a_{ij}(x, u, z)$ неперервні на множині $\mathfrak{M}^{(u)}_{r_0}$, тобто для всіх $\varepsilon > 0$ існує таке $\eta(\varepsilon)$, що

$$|a_{ij}(x, u(x), u_x(x)) - a_{ij}(y, u(y), u_x(y))| < \varepsilon,$$

коли

$$|x-y| + |u(x) - u(y)| + |u_x(x) - u_x(y)| < \eta(\varepsilon) \quad \forall\, x, y \in G^{\rho}_{\rho/2}, \quad \rho \in (0, r_0).$$

Остання нерівність забезпечується локальними оцінками (4.26) з [15] та (2.4), (4.12) з [4] (вони справджуються завдяки припущенням нашої теореми), які вірні в області $G^{\rho}_{\rho/2}$ та на гладкому куску її межі $\Gamma^{\rho}_{\rho/2}$: існують числа $\chi > 0$, що визначається лише величинами n, ν, μ, μ_0, μ_1, μ_2, μ_3, γ, β, k_1, k_2, q, M_0, d_0, r_0, та $c_3 > 0$, що визначається тими ж самими величинами та $\|b, f, g, h\|_{q, G_0}$ і областю G; вони не залежать від $u(x)$ і для них

$$|u(x) - u(y)| + |\nabla u(x) - \nabla u(y)| \leq c_3 |x-y|^{\chi} \quad \forall\, x, y \in G^{\rho}_{\rho/2}, \quad \rho \in (0, d).$$

Але тоді функції $a^{ij}(x')$ неперервні в $\overline{G^1_{1/2}}$, отже, й рівномірно неперервні, тобто для всіх $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$ (з викладеного вище його слід визначати з нерівності $\delta d + c_3(\delta d)^{\chi} < \eta(\varepsilon)$), що $|a^{ij}(x') - a^{ij}(y')| < \varepsilon$, коли $|x'-y'| < \delta$ для всіх $x', y' \in \overline{G^1_{1/2}}$. Отже, перевірено, що виконані умови, за яких справедлива локальна гранична шаудерівська L_q-оцінка, згідно з якою дістаємо

$$\|v\|^q_{2, q; G^1_{1/2}} \leq c_4 \iint_{G^2_{1/4}} \left(|v|^q + \rho^{q(1-\gamma)} \left| a\left(\rho x', \rho^{1+\gamma} v, \rho^{\gamma} v_{x'}\right) \right|^q \right) dx' \tag{26}$$

зі сталою c_4, незалежною від v та a, яка визначається лише величинами n, ν, μ, μ_0, μ_1, μ_2, μ_3, γ, β, k_1, k_2, q, M_0, d_0, r_0, $\|b, f, g, h\|_{q, G_0^d}$. З оцінки (9) маємо

$$\iint_{G^2_{1/4}} |v|^q dx' = \iint_{G^{2\rho}_{\rho/4}} \rho^{-q(1+\gamma)} |u(x)|^q \rho^{-n} dx \leq$$

$$\leq c_0^q \operatorname{mes}\Omega\, c_{q\gamma} \int_{\rho/4}^{2\rho} \frac{dr}{r} \leq c_0^q \operatorname{mes}\Omega\, c_{q\gamma} \ln 8. \tag{27}$$

Так само з припущення C) разом з нерівністю (8) і оцінкою (23) одержуємо

$$\iint\limits_{G^2_{1/4}} \rho^{q(1-\gamma)} \left| a\left(\rho x', \rho^{1+\gamma} v, \rho^{\gamma} v_{x'}\right)\right|^q dx' \le$$

$$\le \rho^{q(1-\gamma)-n} \iint\limits_{G^{2\rho}_{\rho/4}} \left(\mu_1 |\nabla u|^2 + b(x)|\nabla u|\right) + f(x))^q dx \le$$

$$\le 2^n 3^{q-1} \rho^{q(1-\gamma)} \operatorname{mes}\Omega \int\limits_{\rho/4}^{2\rho} \left(\mu_1^q c_1^{2q} r^{2q\gamma - 1} + (k_1 c_1)^q r^{q(\beta+\gamma)-1} + k_1^q r^{q\beta - 1}\right) dr \le$$

$$\le c(n, q, \gamma, \beta, \mu_1, c_1, k_1), \tag{28}$$

оскільки $0 < \gamma \le 1 + \beta$. З (26)–(28) випливає

$$\|v\|_{2,q;G^1_{1/2}} \le c(n, \nu, \mu, \mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \gamma, \beta, k_1, q, M_1, c_0, c_1). \tag{29}$$

Тепер з (25) та (29) маємо

$$\sup_{\substack{x', y' \in G^1_{1/2} \\ x' \ne y'}} \frac{|\nabla' v(x) - \nabla' v(y)|}{|x' - y'|^{1-n/q}} \le c_5, \quad q > n, \tag{30}$$

де $c_5 = c(n, \nu, \mu, \mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \gamma, \beta, k_1, q, M_0, c_0, c_1, G)$.

Повертаючись до змінних x, u, одержуємо нерівність

$$\sup_{\substack{x, y \in G^\rho_{\rho/2} \\ x \ne y}} \frac{|\nabla u(x) - \nabla u(y)|}{|x - y|^{1-n/q}} \le c_5 \rho^{\gamma - 1 + n/q}, \quad q > n, \quad \rho \in (0, d). \tag{31}$$

За умовою теореми $q \ge n/(1-\gamma)$. Покладемо $\tau = \gamma - 1 + n/q \le 0$; тоді з (31) випливає оцінка

$$|\nabla u(x) - \nabla u(y)| \le c_5 \rho^{\tau} |x - y|^{\gamma - \tau} \quad \forall x, y \in G^\rho_{\rho/2}, \quad \rho \in (0, d).$$

За означенням множини $G^\rho_{\rho/2}: |x - y| \le 2p$, а отже, $|x - y|^\tau \ge (2p)^\tau$, оскільки $\tau \le 0$. Тому

$$\sup_{\substack{x, y \in G^\rho_{\rho/2} \\ x \ne y}} \frac{|\nabla u(x) - \nabla u(y)|}{|x - y|^{\gamma}} \le 2^{-\tau} c, \quad \rho \in (0, d). \tag{32}$$

Нехай тепер $x, y \in \overline{G^d_0}$ та $\rho \in (0, d)$. Якщо $x, y \in G^\rho_{\rho/2}$, то виконується (32). Якщо ж $|x - y| > \rho = |x|$, то на підставі оцінки (23) дістаємо

$$\frac{|\nabla u(x) - \nabla u(y)|}{|x - y|^{\gamma}} \le 2\rho^{-\gamma} |\nabla u(x)| \le 2c_1.$$

Звідси з урахуванням (32) маємо

$$\sup_{\substack{x, y \in G^\rho_{\rho/2} \\ x \ne y}} \frac{|\nabla u(x) - \nabla u(y)|}{|x - y|^{\gamma}} \le \text{const}.$$

Ця нерівність разом з оцінками (9), (23) означає належність $u(x) \in C^{1+\gamma}\left(\overline{G^d_0}\right)$. Теорему 6 доведено.

Задачу (КЛ) включимо до однопараметричної сім'ї задач

$$\begin{cases} a_{ij}(x,u,u_x)u_{x_ix_j} + ta(x,u,u_x) = 0, & x \in G, \\ u(x) = t\varphi(x) \quad \forall\, t \in [0,1], & x \in \partial G. \end{cases} \tag{КЛ}_t$$

Відносно задачі (КЛ) припускаємо, що виконані умови S), A), та умова: AA) $a_{ij}(0,0,0) = \delta_i^j$, $i,j = 1, \ldots, n$, — символ Кронекера, а також на множині $\mathfrak{M} = \{(x,u,z) \mid x \in G,\ u \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{R}^n\}$ умови B) – E). Крім того, припустимо:

F) для будь-якого розв'язку $u_t(x)$ задачі $(\text{КЛ})_t$ відома величина

$$M_0 = \sup_{x \in G} |u_t(x)| \quad \forall\, t \in [0,1];$$

EE) існує невід'ємна стала k_3 така, що

$$b(x) + f(x) + |\Phi_{xx}(x)| \le k_3 d^{\lambda-2}(x), \quad x \in G_\varepsilon, \quad \forall\, \varepsilon > 0;$$

G) існують невід'ємні числа k_4, k_5 та $s > \lambda$ такі, що

$$\|\varphi\|_{V^{3/2}_{2,4-n}(\Gamma_0^\rho)} \le k_4 \rho^s, \quad \rho \in (0, r_0);$$

$$\|\varphi\|_{V^{2-1/q}_{q,0}(\Gamma^\rho_{\rho/2})} \le k_5 \rho^{\lambda-2+n/q}, \quad \rho \in (0, r_0).$$

Теорема 7. *Нехай* $\Gamma_{r_0} \in W^{2,p}$, $\varphi(x) \in V^{2-1/p}_{p,0}(\partial G)$, $p > n$, *і виконуються припущення:*

i) S), A), B), F) *та* C), D) *при* $q = p$ (*вони гарантують існування величини* $M_1 = \sup_{x \in G} |\nabla u_t(x)| \ \forall\, t \in [0,1]$);

ii) E) *при* $q = p$ *та* AA).

Якщо або $\lambda \ge 2$, *або* $1 < \lambda < 2$, $n < p < n/(2-\lambda)$, *то задача* $(\text{КЛ})_t$ *має хоча б один розв'язок* $u_t(x) \in V^2_{p,0}(G)$ *при будь-якому* $t \in [0,1]$.

Теорема 8. *Нехай дані числа*

$$\lambda \in (1,2), \quad p \in (n, n/(2-\lambda)), \quad \beta > \lambda - 2, \quad q \ge n/(2-\lambda).$$

Нехай

$$\Gamma_{r_0} \in W^{2,p}, \quad \varphi(x) \in V^{3/2}_{2,4-n}(\partial G) \cap V^{2-1/q}_{q,0}(\partial G)$$

та виконані припущення S), A), AA), B) – F), CC) G). *Тоді задача* $(\text{КЛ})_t$ *має принаймні один розв'язок* $u_t(x) \in W^{2,q}_{\text{loc}}(G) \cap V^2_{p,0}(G) \cap C^\lambda(\overline{G})$ *при будь-якому* $t \in [0,1]$.

Доведення *теорем* 7, 8. Спочатку встановимо, що для деякого $\gamma \in (0,1)$ і всіх $t \in [0,1]$ кожний розв'язок $u_t(x) \in W^{2,q}_{\text{loc}}(G) \cap C^0(\overline{G})$ задовольняє нерівність

$$|u_t(x)|_{1+\gamma,\overline{G}} \le K \tag{33}$$

зі сталою K, що не залежить від $u_t(x)$ та t. Зобразимо $G = G_0^{r_0} \cup G_{r_0}$ з деяким достатньо малим додатнім r_0. За теоремою 6 робимо висновок, що при зроблених припущеннях існують такі додатні числа r_0 та γ_0, що $u_t(x) \in C^{1+\gamma}\left(\overline{G_0^{r_0}}\right)$ і справджується оцінка (33) в $\overline{G_0^{r_0}}$ для довільних $\gamma \in (0, \gamma^*]$,

$\gamma^* = \min(\gamma_0; \beta+1; 1-n/q)$. Належність $u_t(x) \in C^{1+\gamma}(\overline{G_{r_0}})$ і відповідна апріорна оцінка випливають з локальних оцінок поблизу гладкого куска межі, що встановлені в [15, 4] при зроблених припущеннях. Гладкість розв'язку строго всередині області G випливає з теореми Соболєва – Кондрашова. Таким чином встановлюється належність $u_t(x) \in C^{1+\gamma}(\overline{G})$ та апріорна оцінка (33). Наявність оцінки (33) дає можливість застосувати теорему Лєре – Шаудера про нерухому точку (теорема 11.3 [12]). Для цього зафіксуємо $\gamma \in (0, 1)$ та розглянемо банахів простір $C^{1+\gamma}(\overline{G})$ (для теореми 7) або $C_0^{1+\gamma}(\overline{G}) = \{v \in C^{1+\gamma}(\overline{G}) \mid v(0) = |\nabla v(0)| = 0\}$ (для теореми 8). Визначимо оператор $\mathfrak{L}$, поклавши $u = \mathfrak{L}v$, як єдиний розв'язок у просторі $V_{p,0}^2(G)$ (теорема 7) або в просторі $W_{\text{loc}}^{2,q}(G) \cap V_{p,0}^2(G) \cap C^{\lambda}(\overline{G})$ (теорема 8) лінійної задачі

$$\begin{cases} a^{ij}(x)u_{x_ix_j} = F_t(x), & x \in G, \\ u(x) = t\varphi(x), & x \in \partial G, \end{cases}$$

де $a^{ij}(x) = a_{ij}(x, v(x), v_x(x))$; $F_t(x) = -ta(x, v(x), v_x(x))$ (він існує за теоремою 1 або 2). Далі стандартним методом показуємо, що $u(x)$ є розв'язком задачі (КЛ) тоді й тільки тоді, коли u є нерухомою точкою відображення $\mathfrak{L}$; при цьому зауважуємо, що рівняння $u = t\mathfrak{L}u$ еквівалентне задачі $(\text{КЛ})_t$.

1. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1967. – **16**. – С. 209–292.
2. *Кондратьев В. А., Олейник О. А.* Краевые задачи для уравнений в областях с частными производными в негладких областях // Успехи мат. наук. – 1983. – **38**, № 2. – С. 3–76.
3. *Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Элиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей. – М.: Наука, 1991. – 336 с.
4. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Обзор результатов по разрешимости краевых задач для равномерно эллиптических и параболических квазилинейных уравнений второго порядка, имеющих неограниченные особенности // Успехи мат. наук. – 1986. – **41**, № 5. – С. 59–83.
5. *Lieberman G. M.* The quasilinear Dirichlet problem with decreased regularity at the boundary // Comm. Partial Different. Equats. – 1981. – **6**, № 4. – P. 437–497.
6. *Lieberman G. M.* The Dirichlet problem for quasilinear elliptic equations with continuously differentiable boundary data // Ibid. – 1986. – **11**, № 2. – P. 167–229.
7. *Данилюк И. И.* Задача Дирихле для двумерного квазилинейного дифференциального уравнения эллиптического типа // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1987. – № 12. – С. 3–7.
8. *Борсук М. В.* Неулучшаемые оценки решений задачи Дирихле для линейных эллиптических недивергентных уравнений второго порядка в окрестности конической точки границы // Мат. сб. – 1991. – **182**, № 10. – С. 1446–1462.
9. *Борсук М. В.* Оценки решений задачи Дирихле для квазилинейных эллиптических недивергентных уравнений второго порядка в окрестности конической точки // Допов. Акад. наук України. – 1993. – № 1. – С. 12–15.
10. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 1. – М.–Л.: Гостехиздат, 1933. – 525 с.
11. *Вержбинский Г. М., Мазья В. Г.* О замыкании в L_p оператора задачи Дирихле в области с коническими точками // Изв. вузов. Математика. – 1974. – № 6. – С. 8–19.
12. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. – М.: Наука, 1989. – 463 с.
13. *Widman K. O.* Inequalities for the Green function and boundary continuity of the gradient of solutions of elliptic differential equations // Math. Scand. – 1967. – **21**, № 2. – P. 17–37.
14. *Мазья В. Г.* Подпространства С. Л. Соболева. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985. – 415 с.
15. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Оценки на границе области первых производных функций, удовлетворяющих эллиптическому или параболическому неравенству // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – **179**. – С. 102–125.

Одержано 06.05.94