УДК 519. 21

Е. Ю. Канева (С.-Петербург. трансп. ун-т),
В. С. Королюк (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

СЛУЧАЙНЫЕ ПЕРМАНЕНТЫ СМЕШАННЫХ ВЫБОРОЧНЫХ МАТРИЦ

The central limit theorem of mixed random permanents are studied.

Вивчається центральна збіжна теорема змішаних випадкових перманентів.

1. Смесь пуассоновской и гауссовской аппроксимации. Пусть имеется простая выборка в схеме серий $\delta_j^{(n)}$, $1 \le j \le n$, случайных величин $\delta_j^{(n)}$ с распределениями Бернулли $P(\delta_j^{(n)} = 1) = 1 - P(\delta_j^{(n)} = 0) = \lambda / n$ с фиксированным параметром $\lambda > 0$, и положим $\nu_n = \delta_1^{(n)} + \delta_2^{(n)} + \ldots + \delta_n^{(n)}$, т. е. при $n \to \infty$ имеет место слабая сходимость

$$\nu_n \Rightarrow \nu, \tag{1}$$

где ν — пуассоновская случайная величина с распределением $P(\nu = k) = e^{-\lambda}\lambda^k / k!$, $k \ge 0$.

Кроме того, пусть имеется вторая простая выборка ε_j, $1 \le j \le n$, независимых одинаково распределенных случайных величин с $E\varepsilon_j = 0$, $E\,\varepsilon_j^2 = \sigma^2 > 0$ таких, что имеет место слабая сходимость

$$\varepsilon_1^{(n)} + \varepsilon_2^{(n)} + \ldots + \varepsilon_n^{(n)} \Rightarrow \tau, \tag{2}$$

где $\varepsilon_j^{(n)} = \varepsilon_j / \sigma\sqrt{n}$, $j = 1, \ldots, n$; τ — стандартная нормальная случайная величина. Предполагается, что выборки $(\varepsilon_1^{(n)}, \ldots, \varepsilon_n^{(n)})$ и $(\delta_1^{(n)}, \ldots, \delta_n^{(n)})$ независимы.

Введем в рассмотрение смешанную выборочную матрицу размера $m \times n$

$$A_n^m(\varepsilon + \delta) = [a_{ij} = \varepsilon_j^{(n)} + \delta_j^{(n)};\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n]$$

и случайный перманент степени m этой матрицы

$$\operatorname{Per} A_n^m(\varepsilon + \delta) = \sum_{1 \le j_1 \ne \ldots \ne j_m \le n} \prod_{s=1}^{m} (\varepsilon_{j_s}^{(n)} + \delta_{j_s}^{(n)}). \tag{3}$$

В настоящей статье изучается слабая сходимость перманента (3) в условиях (1), (2). В последующих доказательствах применяются методы работ [1, 2].

2. Перманенты с фиксированными степенями.

Теорема 1. *Если m фиксировано, то при $n \to \infty$ справедлива слабая сходимость*

$$\operatorname{Per} A_n^m(\varepsilon + \delta) \Rightarrow \sum_{c=0}^{m} m^{[c]} H_c(\tau) \nu^{[m-c]} / c!, \tag{4}$$

где $H_c(\tau)$ — полином Эрмита.

Доказательство. По формуле декомпозиции (1. 1. 34) из [1, с. 15]

$$\operatorname{Per} A_n^m(\varepsilon + \delta) = \sum_{c=0}^{m} m^{[c]} \sigma^{-c} n^{-c/2} \sum_{1 \le j_1 \ne \ldots \ne j_c \le n} \prod_{s=1}^{m} \varepsilon_{j_s} \operatorname{Per} A_{n-c}^{m-c}(\overline{\delta}), \tag{5}$$

где

$$A_{n-c}^{m-c}(\overline{\delta}) = [a_{ij} = \delta_j^{(n)};\ 1 \le i \le m-c,\ 1 \le j \le n,\ j \ne j_1, \ldots, j_c],$$

$$\overline{\delta} = (\overline{\delta}_1^{(n)}, \overline{\delta}_2^{(n)}, \ldots, \overline{\delta}_{n-c}^{(n)}) = (\delta_1^{(n)}, \delta_2^{(n)}, \ldots, \delta_n^{(n)}) - (\delta_{j_1}^{(n)}, \ldots, \delta_{j_c}^{(n)}).$$

В (5) $\operatorname{Per} A_{n-c}^{m-c}(\overline{\delta}) = \nu_{n-c}^{[m-c]}(\overline{\delta})$. Если m фиксировано и $n \to \infty$, то [1]

$$\nu_{n-c}^{[m-c]}(\overline{\delta}) \Rightarrow \nu^{[m-c]}, \quad \sigma^{-c} n^{-c/2} \sum_{1 \le j_1 \ne \ldots \ne j_c \le n} \prod_{s=1}^{c} \varepsilon_{j_s} \Rightarrow H_c(\tau).$$

Это доказывает (4), так как m фиксировано.

Теорема 2. *Если m фиксировано, то при $n \to \infty$ имеет место слабая сходимость*

$$\operatorname{Per} A_n^m(\varepsilon + \delta - \lambda/n) \Rightarrow \sum_{c=0}^{m} m^{[c]} H_c(\tau) C_{m-c}(\nu, \lambda)/c!, \tag{6}$$

где $H_c(\tau)$ — полином Эрмита, $C_{m-c}(\nu, \lambda)$ — полином Шарлье.

Доказательство. Достаточно показать, что в (5) $\operatorname{Per} A_{n-c}^{m-c}(\overline{\delta} - \lambda/n) \Rightarrow$ $\Rightarrow C_{m-c}(\nu, \lambda)$. Производящая функция перманента слева равна [1]

$$\sum_{m=0}^{n-c} \frac{z^m}{m!} \operatorname{Per} A_{n-c}^m(\overline{\delta} - \lambda/n) = \prod_{j=1}^{n-c} (1 + z(\overline{\delta}_j^{(n)} - \lambda/n)) =$$

$$= \prod_{j=1}^{n} (1 + z(\delta_j^{(n)} - \lambda/n)) \prod_{s=1}^{c} (1 + z(\delta_{j_s}^{(n)} - \lambda/n)),$$

при этом для $|z| < 1$ и всех $1 \le c \le m$

$$\prod_{s=1}^{c} (1 + z(\delta_{j_s}^{(n)} - \lambda/n)) \xrightarrow{P} 1,$$

ибо $\delta_{j_s}^{(n)} - \lambda/n \xrightarrow{P} 0,\ n \to \infty$.

Второе произведение представим в виде

$$\prod_{j=1}^{n} (1 + z(\delta_j^{(n)} - \lambda/n)) = \prod_{j=1}^{n} (1 - z\lambda/n + z\delta_j^{(n)}) =$$

$$= (1 - z\lambda/n)^n \prod_{j=1}^{n} (1 + z\,\delta_j^{(n)}/(1 - z\lambda/n)) =$$

$$= (1 - z\lambda/n)^n (1 + z/(1 - z\lambda/n))^{\nu_n}.$$

Таким образом,

$$\prod_{j=1}^{n-c} (1 + z(\overline{\delta}_j^{(n)} - \lambda/n)) \Rightarrow e^{-z\lambda}(1+z)^{\nu},$$

если $n \to \infty$, $|z| < 1$, при этом справа

$$e^{-z\lambda}(1+z)^{\nu} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m C_m(\nu, \lambda)}{m!},$$

где

$$C_m(\nu, \lambda) = \sum_{c=0}^{m} \frac{(-\lambda)^c m^{[c]} \nu^{[m-c]}}{c!},$$

что совпадает с полиномом Шарлье. Это доказывает (6).

3. Перманенты с возрастающими степенями. В этом пункте предполагается, что степень $m = m(n) \to \infty$ при $n \to \infty$.

Теорема 3. *Если при* $n \to \infty$ $b_n = m/n \to b$, $0 < b < 1$, *то имеет место слабая сходимость*

$$n^{-[m]} \operatorname{Per} A_n^m (1 + \varepsilon + \delta) \Rightarrow \exp(\tau b - b^2/2)(1+b)^{\nu}. \tag{7}$$

Доказательство. По формуле декомпозиции (1. 1. 34) из [1, с. 15]

$$n^{-[m]} \operatorname{Per} A_n^m (1 + \varepsilon + \delta) = \sum_{c=0}^{m} m^{[c]} n^{-[c]} \frac{\operatorname{Per} A_n^c(\varepsilon + \delta)}{c!}. \tag{8}$$

Сумму справа в (8) запишем в виде

$$\sum_{c=0}^{m} m^{[c]} n^{-[c]} \frac{\operatorname{Per} A_n^c(\varepsilon + \delta)}{c!} = \sum_{c=0}^{n} \frac{b^c}{c!} \operatorname{Per} A_n^c(\varepsilon + \delta) + \Delta_{n1} - \Delta_{n2}, \tag{9}$$

где

$$\Delta_{n1} = \sum_{c=0}^{m} (m^{[c]} n^{-[c]} - b^c) \frac{\operatorname{Per} A_n^c(\varepsilon + \delta)}{c!},$$

$$\Delta_{n2} = \sum_{c=m+1}^{n} \frac{b^c}{c!} \operatorname{Per} A_n^c(\varepsilon + \delta).$$

В (9) по формуле (1. 2. 3) из [1, с. 16]

$$\sum_{c=0}^{n} \frac{b^c}{c!} \operatorname{Per} A_n^c(\varepsilon + \delta) = \prod_{j=1}^{n} (1 + b(\varepsilon_j / \sigma\sqrt{n} + \delta_j^{(n)})). \tag{10}$$

Покажем сначала, что при $n \to \infty$

$$\prod_{j=1}^{n} (1 + b(\varepsilon_j / \sigma\sqrt{n} + \delta_j^{(n)})) \Rightarrow \exp(\tau b - b^2/2)(1+b)^{\nu}. \tag{11}$$

Для этой цели введем урезанные случайные величины

$$\varepsilon_{nj} = \begin{cases} \varepsilon_j, & |\varepsilon_j| \le \sigma\sqrt{n}, \\ 0, & |\varepsilon_j| > \sigma\sqrt{n}. \end{cases}$$

Обозначим

$$\Delta_n = \prod_{j=1}^{n} (1 + b(\varepsilon_j / \sigma\sqrt{n} + \delta_j^{(n)})) - \prod_{j=1}^{n} (1 + b(\varepsilon_{nj} / \sigma\sqrt{n} + \delta_j^{(n)})).$$

В силу независимости $\varepsilon_j^{(n)}$ и $\delta_j^{(n)}$ имеем

$$E\Delta_n^2 = E \prod_{j=1}^{n} (1 + b(\varepsilon_j / \sigma\sqrt{n} + \delta_j^{(n)}))^2 -$$

$$- 2E \prod_{j=1}^{n} (1 + b(\varepsilon_j / \sigma\sqrt{n} + \delta_j^{(n)}))(1 + b(\varepsilon_{nj} / \sigma\sqrt{n} + \delta_j^{(n)})) +$$

$$+ E \prod_{j=1}^{n} (1 + b(\varepsilon_{nj}/\sigma\sqrt{n} + \delta_j^{(n)}))^2,$$

и далее

$$E\Delta_n^2 = (E(1 + b(\varepsilon_1/\sigma\sqrt{n} + \delta_1^{(n)}))^2)^n -$$
$$- 2(E(1 + b(\varepsilon_1/\sigma\sqrt{n} + \delta_1^{(n)}))(1 + b(\varepsilon_{n1}/\sigma\sqrt{n} + \delta_1^{(n)})))^n +$$
$$+ (E(1 + b(\varepsilon_{n1}/\sigma\sqrt{n} + \delta_1^{(n)}))^2)^n. \tag{12}$$

Из (12) видно, что $E\Delta_n^2 \to 0$, если $n \to \infty$. Следовательно, $\Delta_n \xrightarrow{P} 0$, $n \to \infty$, и для справедливости (11) достаточно установить, что

$$\prod_{j=1}^{n} (1 + b(\varepsilon_{nj}/\sigma\sqrt{n} + \delta_j^{(n)})) \Rightarrow \exp(\tau b - b^2/2)(1 + b)^{\nu}. \tag{13}$$

Произведение в (13) представим в виде

$$\prod_{j=1}^{n} (1 + b(\varepsilon_{nj}/\sigma\sqrt{n} + \delta_j^{(n)})) =$$
$$= \prod_{j=1}^{n} (1 + b\varepsilon_{nj}/\sigma\sqrt{n}) \prod_{j=1}^{n} (1 + b\delta_j^{(n)}/(1 + b\varepsilon_{nj}/\sigma\sqrt{n})).$$

Тогда

$$\prod_{j=1}^{n} (1 + b\delta_j^{(n)}/(1 + b\varepsilon_{nj}/\sigma\sqrt{n})) = \prod_{j=1}^{n} (1 + b\,\delta_j^{(n)})\Delta_n(\varepsilon, \delta),$$

где

$$\Delta_n(\varepsilon, \delta) = \prod_{j=1}^{n} (1 - b^2\delta_j^{(n)}\varepsilon_{nj}/\delta\sqrt{n}(1 + b\varepsilon_{nj}/\sigma\sqrt{n})).$$

Так как

$$\prod_{j=1}^{n} (1 + b\,\delta_j^{(n)}) = (1 + b)^{\nu_n},$$

то

$$\prod_{j=1}^{n} (1 + b(\varepsilon_{nj}/\sigma\sqrt{n} + \delta_j^{(n)})) = \prod_{j=1}^{n} (1 + b\varepsilon_{nj}/\sigma\sqrt{n})(1 + b)^{\nu_n}\Delta_n(\varepsilon, \delta).$$

Очевидно, здесь при $n \to \infty$

$$\prod_{j=1}^{n} (1 + b\varepsilon_{nj}/\sigma\sqrt{n}) \Rightarrow \exp(\tau b - b^2/2),$$

$$(1 + b)^{\nu_n} \Rightarrow (1 + b)^{\nu}.$$

Покажем, что

$$\Delta_n(\varepsilon, \delta) \xrightarrow{P} 1, \tag{14}$$

откуда и будет следовать (11). Применим формулу

$$1-\Delta_n(\varepsilon,\delta) = \sum_{j=1}^{n} \left(b^2\delta_j^{(n)}\varepsilon_{nj}/\sigma\sqrt{n}(1+b\delta_j^{(n)})(1+b\varepsilon_{nj}/\sigma\sqrt{n})\right)\times$$

$$\times\prod_{s=j+1}^{n}\left(1-b^2\delta_s^{(n)}\varepsilon_{ns}/\sigma\sqrt{n}(1+b\delta_s^{(n)})(1+b\varepsilon_{ns}/\sigma\sqrt{n})\right).$$

Отсюда получаем оценку

$$E|1-\Delta_n(\varepsilon,\delta)| \le \frac{b^2\lambda}{(1-b)\sqrt{n}}\left(1+\frac{b^2\lambda}{(1-b)n}\right)^n,$$

из которой следует, что при $n\to\infty$

$$E|1-\Delta_n(\varepsilon,\delta)| \to 0,$$

т. е. справедливо (14).

Далее покажем, что в условиях теоремы 3 в соотношении

$$\Delta_{ni} \xrightarrow{P} 0, \quad i = 1, 2. \tag{15}$$

Для Δ_{n1} запишем

$$|\Delta_{n1}| \le \sum_{c=1}^{m} |m^{[c]}n^{-[c]}-b^c| E\frac{|\operatorname{Per} A_n^c(\varepsilon+\delta)|}{c!}. \tag{16}$$

По формуле декомпозиции (1.1.34) из [1, с. 15] с учетом независимости и одинаковой распределенности $\varepsilon_1^{(n)},\ldots,\varepsilon_n^{(n)}$ и $\delta_1^{(n)},\ldots,\delta_n^{(n)}$ имеем

$$E|\operatorname{Per} A_n^c(\varepsilon+\delta)| \le \sum_{d=0}^{c} \lambda^d c^{[d]} n^{[d]} n^{-d} E\frac{|\operatorname{Per} A_{n-d}^{c-d}(\varepsilon/\sigma\sqrt{n})|}{d!}. \tag{17}$$

В (17) в силу неравенства Гельдера

$$\left(E|\operatorname{Per} A_{n-d}^{c-d}(\varepsilon)|\right)^2 \le E\left(\operatorname{Per} A_{n-d}^{c-d}(\varepsilon)\right)^2 = (n-d)^{[c-d]}/n^{(c-d)} \le 1.$$

Учитывая эти оценки, из (17) имеем

$$E|\operatorname{Per} A_n^c(\varepsilon+\delta)| \le \sum_{d=0}^{c} \frac{\lambda^c c^{[d]}}{d!} = (1+\lambda)^c. \tag{18}$$

Далее, в (16)

$$|m^{[c]}n^{-[c]}-b^c| \le |m^{[c]}n^{-[c]}-m^c n^{-c}| + |m^c n^{-c}-b^c|$$

и

$$|m^{[c]}n^{-[c]}-m^c n^{-c}| \le \frac{(c-1)c}{2m}, \quad c\ge 2,$$

$$|m^c n^{-c}-b^c| \le c|m/n-b|, \quad c\ge 1.$$

Подставляя эти оценки и (18) в (16), находим

$$E|\Delta_{n1}| \le \frac{1}{2m}\sum_{c=2}^{m}\frac{(1+\lambda)^c}{(c-2)!} + |m/n-b|\sum_{c=1}^{m}\frac{(1+\lambda)^c}{(c-1)!} \le$$

$$\le \frac{1}{2m}(1+\lambda)^2 e^{(1+\lambda)} + |m/n-b|(1+\lambda)e^{(1+\lambda)},$$

т. е. выполняется (15) для $i=1$.

Для Δ_{n2} в (9) сначала запишем

$$E|\Delta_{n2}| \le \sum_{c=m+1}^{n} \frac{b^c}{c!} E|\mathrm{Per}\, A_n^c(\varepsilon+\delta)|.$$

Так как $(m+c)!\,c! \ge m!\,c!$, отсюда с учетом (18) получаем

$$E|\Delta_{n2}| \le \sum_{c=m+1}^{n} \frac{b^c}{c!}(1+\lambda)^c = (b(1+\lambda))^{m+1} \sum_{c=0}^{n-m-1} \frac{b^c}{(m+c+1)!}(1+\lambda)^c \le$$

$$\le (b(1+\lambda))^{m+1} \frac{1}{(m+1)!} \sum_{c=0}^{n-m-1} \frac{(b(1+\lambda))^c}{c!} \le \frac{(b(1+\lambda))^{m+1}}{(m+1)!} e^{b(1+\lambda)},$$

т. е. при $n \to \infty$ справедливо (15) для $i = 2$. Объединяя (8) – (11) и (15), получаем (7).

Теорема 4. *Если при* $n \to \infty$ $b_n = m/n \to b$, $0 < b < 1$, *то справедлива слабая сходимость*

$$n^{-[m]} \mathrm{Per}\, A_n^m (1+\varepsilon+\delta-\lambda/n) \Rightarrow \exp(\tau b - b^2/2) e^{-\lambda b}(1+b)^{\nu}. \tag{19}$$

Доказательство. По формуле декомпозиции (1.1.34) из [1, с. 15]

$$n^{-[m]} \mathrm{Per}\, A_n^m (1+\varepsilon+\delta-\lambda/n) =$$

$$= \sum_{c=0}^{m} (1-\lambda/n)^{m-c} m^{[c]} n^{-[c]} \frac{\mathrm{Per}\, A_n^c(\varepsilon+\delta)}{c!}. \tag{20}$$

Сравнивая (8) и (20), имеем

$$n^{-[m]} \mathrm{Per}\, A_n^m (1+\varepsilon+\delta-\lambda/n) = (1-\lambda/n)^m n^{-[m]} \mathrm{Per}\, A_n^m (1+\varepsilon+\delta) + \Delta_n, \tag{21}$$

где

$$\Delta_n = \sum_{c=1}^{m} \frac{q_c m^{[c]} n^{-[c]} \mathrm{Per}\, A_n^c(\varepsilon+\delta)}{c!},$$

$$q_c = (1-\lambda/n)^{m-c} - (1-\lambda/n)^m.$$

Здесь $0 \le q_c \le \lambda c/n$, $c = 1, \ldots, m$, и с учетом (18)

$$E|\Delta_n| \le \frac{\lambda}{n} \sum_{c=1}^{m} c m^{[c]} n^{-[c]} \frac{E|\mathrm{Per}\, A_n^c(\varepsilon+\delta)|}{c!} \le$$

$$\le \frac{\lambda}{n} \sum_{c=1}^{m} \frac{(1+\lambda)^c}{(c-1)!} \le \frac{\lambda(1+\lambda)}{n} e^{1+\lambda},$$

т. е. $E|\Delta_n| \to 0$, когда $n \to \infty$. Заметим также, что в (21) $(1-\lambda/n)^m \to e^{-\lambda b}$. Из приведенных оценок с учетом (7) в результате получаем соотношение (19).

1. *Королюк В. С., Боровских Ю. В.* Случайные перманенты. – Киев: Ин-т математики АН Украины, 1993. – 134 с.
2. *Korolyuk V. S., Borovskikh Yu. V.* Random permanents and symmetric statistics // Proceedings of the Sixth USSR – Japan Symposium on Probability Theory and Mathematical Statistics, Kiev. – World Scientific, 1992. – P. 176–187.

Получено 23.06.94

Для Δ_{n2} в (9) сначала запишем

$$E|\Delta_{n2}| \le \sum_{c=m+1}^{n} \frac{b^c}{c!} E|\mathrm{Per}\, A_n^c(\varepsilon+\delta)|.$$

Так как $(m+c)!\,c! \ge m!\,c!$, отсюда с учетом (18) получаем

$$E|\Delta_{n2}| \le \sum_{c=m+1}^{n} \frac{b^c}{c!}(1+\lambda)^c = (b(1+\lambda))^{m+1} \sum_{c=0}^{n-m-1} \frac{b^c}{(m+c+1)!}(1+\lambda)^c \le$$

$$\le (b(1+\lambda))^{m+1} \frac{1}{(m+1)!} \sum_{c=0}^{n-m-1} \frac{(b(1+\lambda))^c}{c!} \le \frac{(b(1+\lambda))^{m+1}}{(m+1)!} e^{b(1+\lambda)},$$

т. е. при $n \to \infty$ справедливо (15) для $i = 2$. Объединяя (8) – (11) и (15), получаем (7).

Теорема 4. *Если при* $n \to \infty$ $b_n = m/n \to b$, $0 < b < 1$, *то справедлива слабая сходимость*

$$n^{-[m]}\mathrm{Per}\, A_n^m(1+\varepsilon+\delta-\lambda/n) \Rightarrow \exp(\tau b - b^2/2) e^{-\lambda b}(1+b)^{\nu}. \tag{19}$$

Доказательство. По формуле декомпозиции (1.1.34) из [1, с. 15]

$$n^{-[m]}\mathrm{Per}\, A_n^m(1+\varepsilon+\delta-\lambda/n) =$$

$$= \sum_{c=0}^{m} (1-\lambda/n)^{m-c} m^{[c]} n^{-[c]} \frac{\mathrm{Per}\, A_n^c(\varepsilon+\delta)}{c!}. \tag{20}$$

Сравнивая (8) и (20), имеем

$$n^{-[m]}\mathrm{Per}\, A_n^m(1+\varepsilon+\delta-\lambda/n) = (1-\lambda/n)^m n^{-[m]}\mathrm{Per}\, A_n^m(1+\varepsilon+\delta) + \Delta_n, \tag{21}$$

где

$$\Delta_n = \sum_{c=1}^{m} \frac{q_c m^{[c]} n^{-[c]}\mathrm{Per}\, A_n^c(\varepsilon+\delta)}{c!},$$

$$q_c = (1-\lambda/n)^{m-c} - (1-\lambda/n)^m.$$

Здесь $0 \le q_c \le \lambda c/n$, $c = 1, \ldots, m$, и с учетом (18)

$$E|\Delta_n| \le \frac{\lambda}{n} \sum_{c=1}^{m} c m^{[c]} n^{-[c]} \frac{E|\mathrm{Per}\, A_n^c(\varepsilon+\delta)|}{c!} \le$$

$$\le \frac{\lambda}{n} \sum_{c=1}^{m} \frac{(1+\lambda)^c}{(c-1)!} \le \frac{\lambda(1+\lambda)}{n} e^{1+\lambda},$$

т. е. $E|\Delta_n| \to 0$, когда $n \to \infty$. Заметим также, что в (21) $(1-\lambda/n)^m \to e^{-\lambda b}$. Из приведенных оценок с учетом (7) в результате получаем соотношение (19).

1. *Королюк В. С., Боровских Ю. В.* Случайные перманенты. – Киев: Ин-т математики АН Украины, 1993. – 134 с.
2. *Korolyuk V. S., Borovskikh Yu. V.* Random permanents and symmetric statistics // Proceedings of the Sixth USSR – Japan Symposium on Probability Theory and Mathematical Statistics, Kiev. – World Scientific, 1992. – P. 176–187.

Получено 23.06.94