УДК 517.927.4

М. Ронто (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
Й. Месарош (Мат. ин-т Мишкол. ун-та, Венгрия)

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О СХОДИМОСТИ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

We establish a new improved estimations that are essentially used in the foundation of the numerical-analytic method for the investigation of the existence and approximate construction of the solutions of nonlinear boundary value problem for ordinary differential equations.

Встановлюються нові покращені оцінки, що використовуються при обгрунтуванні чисельно-аналітичного методу дослідження існування та наближеної побудови розв'язків нелінійних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь.

1. Введение. Численно-аналитический метод, основанный на последовательных приближениях [1–3], позволяет исследовать существование и построение решений нелинейных краевых задач для обыкновенных дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений с периодическими, двухточечными и многоточечными краевыми условиями [4–6].

Согласно общей идее этого метода исходная задача в каждом случае сводится к исследованию специальным образом построенной „возмущенной” краевой задачи [4]. Заметим, что эта краевая задача зависит от векторного параметра x_0, размерность которого равна размерности исходной системы дифференциальных уравнений. Приближенное решение $x = x_m(t, x_0)$ „возмущенной” задачи может быть непосредственно построено методом последовательных приближений. Окончательно, решение $x = x^*(t, x_0)$ „возмущенной” задачи при определенном значении параметра $x_0 = x_0^*$ является решением исходной задачи и выполняется предельное соотношение

$$\lim_{m \to \infty} x_m(t, x_0) < x^*\left(t, x_0^*\right).$$

Математическое обоснование сходимости последовательных приближений, доказательство существования точного решения и оценка погрешности существенным образом основываются на следующих вспомогательных утверждениях.

Лемма 1 [1]. *Пусть функция $f(t)$ непрерывна на отрезке $t \in [0, T]$. Тогда для каждого $t \in [0, T]$ выполняется неравенство*

$$\left| \int_0^t \left[f(\tau) - \frac{1}{T} \int_0^T f(s)\, ds \right] d\tau \right| \le \alpha_1(t) |f(t)|_0, \tag{1}$$

где

$$\alpha_1(t) = 2t\left(1 - \frac{t}{T}\right), \quad |f(t)|_0 < \sup_t |f(t)|.$$

Лемма 2 [1]. *Пусть задана последовательность непрерывных функций*

$$\alpha_{m+1}(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right) \int_0^t \alpha_m(s)\, ds + \frac{t}{T} \int_t^T \alpha_m(s)\, ds,$$

$$m = 0, 1, 2, \ldots; \quad \alpha_0(t) = 1.$$

Тогда существуют положительные постоянные

$$q_0 = 1, \quad q_1 = \frac{1}{3}, \quad q_2 = \frac{1}{10},$$
$$\frac{1}{6^m} \le q_m \le \frac{1}{10^{[m/2]} \cdot 3^{2(m/2)}} < \frac{1}{(3,1)^m} \tag{2}$$

такие, что при любых $t \in [0, T]$ *справедливо неравенство*

$$\alpha_{m+1}(t) \le \alpha_1(t) T^m q_m, \tag{3}$$

где $[m/2]$, $(m/2)$ *означают соответственно целую и дробную части числа* $m/2$.

***Замечание* 1.** В [4] оценки (2), (3) изменены следующим образом: существуют положительные констаты $q_m \le 1/\pi^m$, $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$, для которых $\alpha_{m+1}(t) \le T^m q_m \tilde{\alpha}_1(t) \le T^m \tilde{\alpha}_1(t)\big/\pi^m$, где

$$\tilde{\alpha}_1(t) = \frac{\pi}{3}\alpha_1(t) = \frac{2\pi}{3} t\left(1 - \frac{t}{T}\right) \le \frac{\pi T}{6}.$$

Целью настоящей работы является улучшение оценок (1)–(3). Новые оценки применяются для получения условий, гарантирующих существование решения некоторых нелинейных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Даются также улучшенные оценки погрешности приближенного решения.

2. Модификация лемм 1 и 2.

Лемма 3. *Предположим, что функция* $f(t)$ *непрерывна на отрезке* $[0, T]$. *Тогда для каждого* $t \in [0, T]$ *выполняется неравенство*

$$\left| \int_0^t \left[f(\tau) - \frac{1}{T}\int_0^T f(s)\, ds \right] d\tau \right| \le$$
$$\le \frac{1}{2}\alpha_1(t)\left(\max_{t \in [0,T]} f(t) - \min_{t \in [0,T]} f(t) \right), \tag{4}$$

где $\alpha_1(t) = 2t(1 - t/T)$.

Доказательство. Очевидно,

$$\int_0^t \left[f(\tau) - \frac{1}{T}\int_0^T f(s)\, ds \right] d\tau = \frac{1}{T}\int_0^t \int_0^T [f(\tau) - f(s)]\, ds\, d\tau =$$
$$= \frac{1}{T}\int_0^t \int_0^t [f(\tau) - f(s)]\, ds\, d\tau + \frac{1}{T}\int_0^t \int_t^T [f(\tau) - f(s)]\, ds\, d\tau.$$

Кроме того,

$$\int_0^t \int_0^t [f(\tau) - f(s)]\, ds\, d\tau = \int_0^t \left[t f(\tau) - \int_0^t f(s)\, ds \right] d\tau =$$
$$= t\int_0^t f(\tau)\, d\tau - t\int_0^t f(s)\, ds = 0.$$

Следовательно, справедливы соотношения

$$\left|\int_0^t \left[f(\tau) - \frac{1}{T}\int_0^T f(s)\,ds \right] d\tau \right| \le \frac{1}{T}\int_0^t \int_t^T [f(\tau) - f(s)]\,ds\,d\tau \le$$

$$\le \frac{1}{T} \max_{\substack{\tau\in[0,t],\\ s\in[t,T]}} |f(\tau) - f(s)|\, t(T-t) = \frac{1}{2}\alpha_1(t) \max_{\substack{\tau\in[0,t],\\ s\in[t,T]}} |f(\tau) - f(s)| \le$$

$$\le \frac{1}{2}\alpha_1(t)\left[\max_{t\in[0,T]} f(t) - \min_{t\in[0,T]} f(t) \right].$$

Замечание 2. Можно легко проверить, что

$$\frac{1}{2}\left[\max_{t\in[0,T]} f(t) - \min_{t\in[0,T]} f(t) \right] \le \max_{t\in[0,T]} |f(t)|,$$

причем равенство

$$\frac{1}{2}\left[\max_{t\in[0,T]} f(t) - \min_{t\in[0,T]} f(t) \right] = \max_{t\in[0,T]} |f(t)|$$

выполняется тогда и только тогда, когда

$$\max_{t\in[0,T]} f(t) = -\min_{t\in[0,T]} f(t) = \max_{t\in[0,T]} |f(t)|.$$

Пример. Рассмотрим функцию $f(t,x) = \ln x \sin t + 10$ с областью определения $(t,x)\in G = [0,\pi/2]\times[e, e^2]$. Легко видеть, что

$$\max_{(t,x)\in G} |f(t,x)| = 12,$$

и

$$\frac{1}{2}\left[\max_{(t,x)\in G} f(t,x) - \min_{(t,x)\in G} f(t,x) \right] = \frac{1}{2}(12-10) = 1.$$

Следовательно, согласно лемме 1

$$\left|\int_0^t \left[f(\tau,x) - \frac{1}{T}\int_0^T f(s,x)\,ds \right] d\tau \right| \le \alpha_1(t)\cdot 12 \le \frac{\pi}{4}\,12 \approx 9{,}42,$$

и с учетом леммы 3

$$\left|\int_0^t \left[f(\tau,x) - \frac{1}{T}\int_0^T f(s,x)\,ds \right] d\tau \right| \le \alpha_1(t)\cdot 1 \le \frac{\pi}{4} \approx 0{,}78.$$

С другой стороны, путем непосредственных вычислений можно убедиться, что

$$\int_0^t \left[\ln x \sin\tau + 10 - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} (\ln x \sin s + 10)\,ds \right] d\tau =$$

$$= \int_0^t \left[\ln x \sin\tau + 10 - \frac{2}{\pi}(\ln x + 5\pi) \right] d\tau =$$

$$= \left(1 - \frac{2}{\pi}t - \cos t\right)\ln x,$$

и

$$\max_{(t;x)\in G}\left|\left(1-\frac{2}{\pi}t-\cos t\right)\ln x\right| \approx 0{,}42.$$

Таким образом, очевидно, что оценка в лемме 3 лучше, чем соответствующая оценка в лемме 1.

Лемма 4. *Для последовательности непрерывных функций*

$$\alpha_{m+1}(t) = \left(1-\frac{t}{T}\right)\int_0^t \alpha_m(s)\,ds + \frac{t}{T}\int_t^T \alpha_m(s)\,ds, \tag{5}$$

$$m = 0, 1, 2, \ldots; \quad \alpha_0(t) = 1,$$

выполняются следующие неравенства:

$$\alpha_{m+1}(t) = 3T\alpha_m(t)/10,$$

$$\alpha_{m+1}(t) = (3T/10)^m\overline{\alpha}_1(t), \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

где

$$\overline{\alpha}_1(t) = 10\alpha_1(t)/9, \quad \alpha_1(t) = 2t(1-t/T).$$

Доказательство. Путем непосредственных вычислений по рекуррентной формуле (5) получаем

$$\alpha_2(t) = \alpha_1(t)\left[\frac{T}{6} + \frac{1}{3}\alpha_1(t)\right], \tag{7}$$

$$\alpha_3(t) = \alpha_1(t)\left[\frac{T^2}{20} + \frac{T}{15}\alpha_1(t) + \frac{1}{15}\alpha_1^2(t)\right]. \tag{8}$$

Принимая во внимание, что $\alpha_1(t) \le T/2$, из (7) имеем

$$\alpha_2(t) \le \frac{1}{3}T\alpha_1(t) = \frac{3}{10}T\left(\frac{10}{9}\alpha_1(t)\right) = \left(\frac{3}{10}T\right)\overline{\alpha}_1(t).$$

Из соотношения (8) следует

$$\alpha_3(t) = \frac{3}{10}T\,\alpha_1(t)\left[\frac{T}{6} + \frac{1}{3}\alpha_1(t)\right] - \frac{1}{30}T\alpha_1^2(t) + \frac{1}{15}\alpha_1^3(t) =$$

$$= \frac{3}{10}T\,\alpha_2(t) - \frac{1}{30}\alpha_1^2(t)\,[T-2\alpha_1(t)] \le \left(\frac{3}{10}T\right)\alpha_2(t). \tag{9}$$

Применяя метод математической индукции, на основании (9) получаем следующие неравенства для функций последовательности (5):

$$\alpha_{m+1}(t) \le 3T\alpha_m(t)/10, \quad m = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$\alpha_{m+1}(t) \le (3T/10)^m\overline{\alpha}_1(t), \quad \overline{\alpha}_1(t) = 10\alpha_1(t)/9.$$

Таким образом, оценки (6) справедливы.

***Замечание* 3.** Сравнивая полученные оценки с использованными в работе Кваписа [5], имеем $\sqrt{10} \approx 3{,}162$ вместо $10/3 = 3{,}33\ldots$, и $\overline{\alpha}_1(t) = \sqrt{10}\,\alpha_1(t)/3$ вместо $\overline{\alpha}_1(t) = 10\alpha_1(t)/9$.

3. Применение установленных вспомогательных утверждений к обоснованию численно-аналитического метода. Рассмотрим для простоты периодическую задачу

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad f(t,x) = f(t+T,x), \tag{10}$$

$$x(0) = x(T). \tag{11}$$

Предположим, что $x, f \in R^n$, $f \in C(R^1 \times D)$, где D — некоторая замкнутая связная область в R^n.

В [1, 2, 4, 5] показано, что для исследования существования и приближенного построения решений разных классов краевых задач, в том числе и периодической задачи (10), (11), при выполнении ряда достаточно естественных ограничений можно применять численно-аналитический метод. Именно: в области определения $(t, x) \in [0, T] \times D$ достаточно выполнения соотношений

$$|f(t,x)| \le M, \quad |f(t,x') - f(t,x'') \le K|x' - x''|, \quad D_\beta \ne 0, \tag{12}$$

$$T\lambda_{\max}(K) < q, \tag{13}$$

где D_β — множество точек $x_0 \in R^n$, содержащихся в D вместе со своими $(\beta = TM/2)$-окрестностями, а $\lambda_{\max}(K)$ — наибольшее из собственных чисел матрицы K, компоненты которой неотрицательны, а значение параметра q равно: $q = 3{,}1$ в [1], $q = \pi$ в [2, 3, 4] и $q = \sqrt{10}$ в [5]. Рассмотрим совокупность T-периодических функций $x_m(t, x_0)$, заданных формулами

$$x_m(t,x_0) = x_0 + \int_0^t \left[f(t, x_{m-1}(t,x_0)) - \frac{1}{T}\int_0^T f(s, x_{m-1}(s,x_0))\,ds \right] dt, \tag{14}$$

$$m = 1, 2, \ldots, \quad x_0(t, x_0) = x_0,$$

где $x_0 \in R^n$ — параметр.

Достаточные условия сходимости построенной последовательности содержатся в следующем утверждении.

Теорема. *Пусть в уравнении* (10) *T-периодическая функция $f(t,x)$ непрерывна в области определения $(t,x) \in [0,T] \times D$ и удовлетворяет условиям* (12) *и* (13) *с $q = 10/3$. Тогда:*

i) функции последовательности (14) *удовлетворяют периодическим краевым условиям* (11) *для любого $x_0 \in D_\beta$;*

ii) последовательность $\{x_m(t,x_0)\}$ равномерно сходится:

$$\lim_{m\to\infty} x_m(t,x_0) = x^*(t,x_0),$$

и предельная функция $x^*(t,x_0)$ при каждом $x_0 \in D_\beta$ является решением „возмущенной" задачи

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) + \Delta(x_0), \quad x(0) = x(T)$$

с возмущающим членом

$$\Delta(x_0) = -\frac{1}{T}\int_0^T f(t, x^*(t,x_0))\,dt;$$

iii) отклонение функций $x^*(t,x_0)$ и $x_m(t,x_0)$ оценивается неравенством

$$|x^*(t,x_0) - x_m(t,x_0)| \le k\alpha_1(t)\,Q^m(E-Q)^{-1}M', \tag{15}$$

где

$$k = \frac{10}{9}, \quad Q = \frac{T}{q} K, \quad q = \frac{10}{3},$$

$$M' = \frac{1}{2} \left[\max_{(t,x) \in [0,T] \times D} f(t,x) - \min_{(t,x) \in [0,T] \times D} f(t,x) \right].$$

Для доказательства сформулированного утверждения достаточно провести выкладки, аналогичные сделанным в ([4], с. 32, теорема 2.1) применительно к периодической задаче [4, с. 60]. Разница лишь в том, что вместо лемм 2.1 и 2.2 [4, с. 31] следует использовать приведенные выше леммы 3 и 4. По этой причине детали доказательства опускаются.

Замечания. **4.** Условие (13) с константой $q = 10/3$ расширяет класс периодических задач (10), (11), для которых является применимым численно-аналитический метод. Кроме того, улучшена оценка погрешности (15). Действительно, поскольку $M' \le M$, то известные из [1–5] оценки могут быть получены из (13) и (15):

в [1], когда $k=1$, $q=3{,}1$, $M' = M$;

в [2, 3, 4], когда $k = \frac{\pi}{3}$, $q = \pi$, $M' = M$;

в [5], когда $k = \frac{\sqrt{10}}{3}$, $q = \sqrt{10}$, $M' = M$.

5. В [6, 7] показано, что для специальным образом подобранных последовательных приближений можно получить значение $q = 3{,}416 \ldots$.

В заключение отметим, что подобные результаты справедливы не только в случае периодической задачи, но и для краевых задач более общих типов.

1. *Самойленко А. М.* Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений, I // Укр. мат. журн. – 1965. – **17**, № 4. – С. 16–23.
2. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений. – Киев: Вища шк., 1976. – 184 с.
3. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. – Киев: Наук. думка, 1985. – 224 с.
4. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. – Киев: Вища шк., 1976. – 184 с.
5. *Kwapisz M.* Some remarks on an integral equation arising in application of numerical-analytic method of solving of boundary value problems // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 4. – С. 128–132.
6. *Трофимчук Е. П.* Интегральные операторы метода последовательных периодических приближений // Мат. физика и нелинейн. механика. – 1990. – **13** (47). – С. 31–36.
7. *Самойленко А. М., Лаптинский В. Н.* Об оценках периодических решений дифференциальных уравнений // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1992. – № 1. – С. 30–32.

Получено 31.05.94