УДК 517. 941

В. С. Рыхлов (Саратов. ун-т)

АСИМПТОТИКА СИСТЕМЫ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ОБЩЕГО ВИДА С ПАРАМЕТРОМ

In this article a differential equation of the n th order on a finite interval $[a, b]$ with a parameter $\lambda \in \mathbb{C}$ and of the form

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)y(x) = \lambda y(x)$$

is considered. Under the conditions that $a_j(x) \in L_1[a, b]$, $j = \overline{1, n}$, and $a_0(x)$ is an absolutely continuous function, not vanishing on the interval $[a, b]$, the asymptotic formulas of an exponential type for the fundamental system of this equation are obtained when $|\lambda|$ is sufficiently large.

Розглянуто диференціальне рівняння n-го порядку на скінченному відрізку $[a, b]$ з параметром $\lambda \in \mathbb{C}$ вигляду

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)y(x) = \lambda y(x).$$

При умовах $a_j(x) \in L_1[a, b]$, $j = \overline{1, n}$, $a_0(x)$ — абсолютно неперервна функція, яка не має нульового значення на $[a, b]$, одержані асимптотичні формули експоненціального типу для фундаментальної системи розв'язків цього рівняння при достатньо великих значеннях $|\lambda|$.

1. Введение. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка на конечном отрезке $[a, b]$ с параметром $\lambda \in \mathbb{C}$ вида

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)y(x) = \lambda y(x), \tag{1}$$

где $a_j(x) \in L_1[a, b]$, $j = \overline{1, n}$, $a_0(x)$ — абсолютно непрерывная функция, не обращающаяся в ноль на $[a, b]$.

Обозначим $\lambda = \operatorname{sign}(a_0(x))\rho^n$ и введем в рассмотрение следующие углы в комплексной ρ-плоскости:

$$S_k = \{\rho \in \mathbb{C} : \pi k/n \le \arg\rho \le \pi(k+1)/n\}, \quad k = \overline{0, 2n-1}.$$

Пусть S — некоторый угол S_k, а T_c — область, получающаяся из S сдвигом на число $-c$. Обозначим через $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ корни n-степени из 1, пронумерованные для $\rho \in T_c$ таким образом, что

$$\operatorname{Re}(\rho + c)\omega_1 \le \operatorname{Re}(\rho + c)\omega_2 \le \ldots \le \operatorname{Re}(\rho + c)\omega_n. \tag{2}$$

Положим, для краткости, $\rho_j = \rho\,\omega_j$, $\rho_{js} = \rho(\omega_j - \omega_s)$. Через $W_1^k[a, b]$ обозначим пространство Соболева функций, k-я производная которых существует п. в. на $[a, b]$ и суммируема, а через $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_1$ обозначим нормы в пространствах C и L_1 на соответствующих множествах.

В случае $a_0(x) \equiv 1$ и $a_1(x) \equiv 1$ в [1–4], в частности, показано, что уравнение (1) в любой области T_c ρ-плоскости имеет n линейно независимых решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$, регулярных по $\rho \in T_c$ при $|\rho|$ достаточно большом, для которых справедливы формулы

$$y_k^{(m)}(x, \rho) = (\rho\,\omega_k)^m e^{\rho\omega_k(x-a)}(1 + O(1/\rho)), \quad k = \overline{1, n}, \quad k = \overline{0, n-1}. \tag{3}$$

В случае $a_0(x) \equiv 1$ и $a_1 \in W_1^{n-1}[a, b]$ в результате замены

$$y(x) = v(x)\hat{y}(x), \quad v(x) := \exp\left(-\frac{1}{n}\int\limits_a^x a_1(\tau)\,d\tau\right),$$

и деления обеих частей уравнения (1) на $v(x)$, для $\hat{y}$ получается [4, с. 53] дифференциальное уравнение с коэффициентами $\hat{a}_j(x)$, $j = \overline{0, n}$, причем $\hat{a}_0(x) \equiv 1$ и $\hat{a}_1(x) \equiv 0$. Таким образом, вместо асимптотических формул (3) будем иметь

$$y_k^{(m)}(x, \rho) = (\rho\,\omega_k)^m v(x) e^{\rho\omega_k(x-a)}(1 + O(1/\rho)). \tag{4}$$

В случае $a_0 \in W_1^n[a, b]$ и $a_0(x) \neq 0$ на отрезке $[a, b]$ в результате замены независимой переменной

$$t = \eta(x) := \int\limits_a^x |a_0(\tau)|^{-1/n} d\tau \in [0, h],$$

$$h := \int\limits_a^b |a_0(\tau)|^{-1/n} d\tau,$$

получается [4, с. 87–89] дифференциальное уравнение с коэффициентами $\hat{a}_j(t)$, $j = \overline{0, n}$, $t \in [0, h]$, причем $\hat{a}_0(t) \equiv 1$ и $\hat{a}_1 \in W_1^{n-1}[0, h]$, если выполнено условие $a_0 \in W_1^{n-1}[a, b]$. Таким образом, в этом случае существует фундаментальная система решений (ф. с. р.) с асимптотикой

$$y_k^{(m)}(x, \rho) = (\rho\,\omega_k \eta'(x))^m |a_0(x)|^{(n-1)/2n} w(x) e^{\rho\omega_k\eta(x)}(1 + O(1/\rho)), \tag{5}$$

где

$$w(x) := \exp\left(-\frac{1}{n}\int\limits_a^x \frac{a_1(\tau)}{a_0(\tau)}\,d\tau\right).$$

В случае $a_0 \notin W_1^n[a, b]$ или $a_1 \notin W_1^{n-1}[a, b]$ ситуация усложняется. В работах [1–2, 5–7] рассмотрены более общие дифференциальные уравнения. Если полученные там результаты применить к уравнению (1), то найдем, что при условиях $a_0 \in W_1^2[a, b]$, $a_1 \in W_1^1[a, b]$ и $a_0(x) \neq 0$ на отрезке $[a, b]$ это уравнение в любой области T_c имеет n линейно независимых решений y_1, $y_2, \ldots, y_n$, регулярных по $\rho \in T_c$ при $|\rho|$ достаточно большом, имеющих асимптотические формулы (5).

В данной статье снижаются требования на коэффициенты $a_0(x)$ и $a_1(x)$, а именно: предполагается, что $a_0 \in W_1^1[a, b]$, $a_1 \in L_1[a, b]$ и $a_0(x) \neq 0$ на отрезке $[a, b]$. При таких условиях также могут быть получены формулы, аналогичные формулам (4) и (5), только вместо оценок $O(1/\rho)$ для остаточного члена получаются оценки вида $o(1)$ при $|\rho| \to \infty$. При этом в зависимости от свойств функций $a_0(x)$ и $a_1(x)$ стремление к нулю остаточного члена может быть сколь угодно медленным.

Сформулируем основные результаты, полученные в данной статье.

Теорема 1. *Предположим, что коэффициенты дифференциального уравнения* (1) *удовлетворяют следующим условиям*:

$$a_0 \in W_1^1[a, b], \quad a_1, a_2, \ldots, a_n \in L_1[a, b], \quad a_0(x) \neq 0, \quad a \leq x \leq b.$$

Пусть $\lambda = \operatorname{sign}(a_0(x))\rho^n$. *Тогда во всякой области* T_c *комплексной* ρ-*плоскости уравнение* (1) *имеет* n *линейно независимых решений* $y_1, y_2, \dots, y_n$, *регулярных по* $\rho \in T_c$ *при* $|\rho|$ *достаточно большом и имеющих асимптотику*

$$y_k^{(m)}(x,\rho) = (\rho\omega_k\eta'(x))^m |a_0(x)|^{(n-1)/2n} w(x)\times$$
$$\times e^{\rho\omega_k\eta(x)}(1+O(\psi(\rho))), \tag{6}$$

где

$$k = \overline{1, n}, \quad m = \overline{0, n-1}, \quad \psi(\rho) := f(\rho) + 1/|\rho|,$$
$$f(\rho) := \max_{j\neq s}\left\{\left\| \int\limits_{c_{js}}^{x} e^{\rho_{js}(\eta(x)-\eta(t))}\,\frac{a_1(t)}{a_0(t)}\,dt\right\|, \left\| \int\limits_{c_{js}}^{x} e^{\rho_{js}(\eta(x)-\eta(t))}\,\frac{a_0'(t)}{a_0(t)}\,dt\right\|\right\},$$

c_{js} *равно либо* a, *либо* b *в зависимости от условия* $j<s$ *или* $j>s$.

Утверждение теоремы 1 получается как следствие соответствующего результата об асимптотике ф. с. р. для более общего, чем уравнение (1), квазидифференциального (к.-д.) уравнения вида

$$y^{[n]}(x) = \lambda y(x) \tag{7}$$

на конечном отрезке $[a, b]$, где

$$y^{[m]} := ip_{mm}(x)\,\frac{d}{dx}\,y^{[m-1]} + \sum_{j=1}^{m-1} p_{mj}(x)y^{[j]}, \tag{8}$$
$$m = \overline{1, n}, \quad y^{[0]}(x) := y(x).$$

Теорема 2. *Обозначим*

$$r_m(x) := \prod_{s=1}^{m} p_{ss}(x), \quad m = \overline{1, n}, \quad r_0(x) := 1,$$

и положим $\lambda = \operatorname{sign}(r_n(x))(i\rho)^n$. *Если коэффициенты к.-д. уравнения* (7) *удовлетворяют условиям:*

$$p_{mm} \in W_1^1[a,b], \ p_{mj} \in L_1[a,b], \ m = \overline{1, n}, \ j = \overline{0, m-1}; \ r_n(x) \neq 0, \ a \le x \le b,$$

то во всякой области T_c *комплексной* ρ-*плоскости уравнение* (7) *имеет* n *линейно независимых решений* $y_1, y_2, \dots, y_n$, *регулярных по* $\rho \in T_c$ *при* $|\rho|$ *достаточно большом и имеющих асимптотику при* $k = \overline{1, n}$, $m = \overline{0, n-1}$ *вида*

$$y_k^{[m]}(x,\rho) = r_m(x)(i\rho\omega_k\tilde\eta'(x))^m q(x)\tilde w(x)\times$$
$$\times e^{\rho\omega_k\tilde\eta(x)}(1+O(\tilde\psi(\rho))), \tag{9}$$

где

$$q(x) := |r_n(x)|^{(n-1)/2n}\left(\prod_{j=1}^{n-1}|p_{jj}(x)|^{(n-j)/n}\right)^{-1},$$

$$\tilde\eta(x) := \int\limits_a^x |r_n(\tau)|^{-1/n}\,d\tau,$$

$$\tilde{\varkappa}(x) := \exp\left(\frac{i}{n}\int_a^x \sum_{j=1}^n \frac{p_{jj-1}(\tau)}{p_{jj}(\tau)}\,d\tau\right), \quad \tilde{\psi}(\rho) := \tilde{f}(\rho) + \frac{1}{|\rho|},$$

$$\tilde{f}(\rho) := \max_{\substack{m \\ j\neq s}}\left\{\left\|\int_{c_{js}}^x e^{\rho_{js}(\tilde{\eta}(x)-\tilde{\eta}(t))}\,\frac{p_{mm-1}(t)}{p_{mm}(t)}\,dt\right\|, \left\|\int_{c_{js}}^x e^{\rho_{js}(\tilde{\eta}(x)-\tilde{\eta}(t))}\,\frac{p'_{mm}(t)}{p_{mm}(t)}\,dt\right\|\right\}.$$

Здесь константы c_{js} *имеют тот же смысл, что и в теореме* 1.

Замечания. **1.** К.-д. уравнение (7), по-видимому, впервые рассмотрено в [8]. Выражения, аналогичные (8), возникают естественным образом при рассмотрении сопряженного дифференциального уравнения к уравнению (1), когда коэффициенты $a_j(x)$ не являются достаточно гладкими [4, с. 180–183].

2. Результаты настоящей статьи, даже в случае обыкновенного дифференциального уравнения (1) при условии недостаточной гладкости коэффициентов, получаются посредством его сведения к некоторому к.-д. уравнению (7). Это хорошо видно на примере простейшего для изучаемой ситуации уравнения

$$y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) = \lambda y(x), \quad a_1 \in L_1[a, b]. \tag{10}$$

Суть предлагаемого метода состоит в следующей замене:

$$y(x) = \exp\left(-\frac{1}{n}\int_a^x a_1(\tau)\,d\tau\right)u(x). \tag{11}$$

Эта замена сводит уравнение (10) к уравнению

$$u^{[n]}(x) = \lambda u(x), \tag{12}$$

где

$$u^{[0]}(x) := u(x),$$

$$u^{[k]}(x) := \frac{d}{dx}u^{[k-1]}(x) - \frac{1}{n}a_1(x)u^{[k-1]}(x), \quad k = \overline{1, n-1},$$

$$u^{[n]}(x) := \frac{d}{dx}u^{[n-1]}(x) + \frac{n-1}{n}a_1(x)u^{[n-1]}(x).$$

Отметим, что в случае $a_1 \notin W_1^{n-1}[a, b]$ уравнение (12) является к.-д. уравнением, не сводящимся к обычному дифференциальному уравнению. При этом роль коэффициента при $(n-1)$-й производной играют коэффициенты

$$p_{kk-1}(x) := -a_1(x)/n, \quad k = \overline{1, n-1},$$

$$p_{nn-1}(x) := (n-1)a_1(x)/n.$$

Значение замены (11) состоит в следующем. Наличие негладкого коэффициента $a_1(x)$ при $(n-1)$-й производной в уравнении (10) не позволяет применить к этому уравнению метод [3] (см. также [4, с. 52–62]). В отличие от этого, применение указанного метода к решению уравнения (12) позволяет получить требуемую асимптотику ф. с. р. Это происходит в силу того, что в уравнениии (12) $\sum_{k=1}^n p_{kk-1}(x) \equiv 0$, хотя сами коэффициенты $p_{kk}(x)$, как видно из их определения, имеют те же свойства в смысле гладкости, что и коэффициент $a_1(x)$.

3. Первоначальным толчком к излагаемому в данной статье методу послужила работа [9]. В этой работе рассматривалось уравнение (1) в случае $a_0(x) \equiv 1$ и $a_j \in C[a, b]$, $j = \overline{1, n}$, и для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$

предлагалась замена искомой функции

$$y(x) = v_\varepsilon(x)\,\hat{y}_\varepsilon(x), \quad v_\varepsilon(x) := \exp\left(-\frac{1}{n}\int_a^x A_{1\varepsilon}(\tau)\,d\tau\right), \tag{13}$$

где $A_{1\varepsilon}(x)$ — многочлен достаточно высокой степени, аппроксимирующий коэффициент $a_1(x)$ с точностью до ε на отрезке $[a, b]$, т. е. $\| a_1 - A_{1\varepsilon}\| \le \varepsilon$. Затем к получающемуся в результате этой замены уравнению относительно $\hat{y}_\varepsilon(x)$ с коэффициентом при $(n-1)$-й производной $\hat{a}_1(x) \equiv a_1(x) - A_{1\varepsilon}(x)$ применялся метод нахождения ф. с. р. [4, с. 52–62]. В результате получались асимптотические формулы

$$y_k^{(m)}(x, \rho) = (\rho\,\omega_k)^m v(x) e^{\rho\omega_k(x-a)}(1 + O(\varepsilon) + O_\varepsilon(1/\rho)), \tag{14}$$

где функция $v(x)$ определена как и выше, а $\| O(\varepsilon)\| \le C\varepsilon$, $\| O_\varepsilon(1/\rho)\| \le \le C(\varepsilon)/|\rho|$, причем константа C не зависит ни от ρ, ни от ε, а константа $C(\varepsilon)$ зависит только от ε.

Недостаток формул (14) состоит в том, что число $\varepsilon > 0$ хоть и является сколь угодно малым, но все-таки фиксировано. Этот недостаток устранен в [10], где полагалось $\varepsilon \to 0$. При этом для обеспечения условия $O_\varepsilon(1/\rho) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ предлагалось вполне определенное согласование ε и $|\rho|$, т. е. в качестве ε выбиралась функция $\varepsilon = \varepsilon(|\rho|) \to 0$ при $|\rho| \to \infty$. В результате в [10] доказаны формулы

$$y_k^{(m)}(x, \rho) = (\rho\,\omega_k)^m v(x) e^{\rho\omega_k(x-a)}(1 + O(\psi(\rho))), \tag{15}$$

где $\psi(\rho) = o(1)$ при $|\rho| \to \infty$. В [11] получен аналог этого результата для уравнения $a_0(x) y^{(n)}(x) = \lambda y(x)$.

Обобщение результатов [10, 11] на случай системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с оценкой для $\psi(\rho)$ вида $o(1)$ получено в [12]. В частности, там отмечается зависимость скорости стремления $\psi(\rho)$ к нулю от свойств коэффициентов $a_0(x)$ и $a_1(x)$ или их аналогов. По-видимому, впервые зависимость $\psi(\rho)$ от свойств коэффициента $a_1(x)$, аналогичная той, что содержится в теоремах 1 и 2, выявлена в работе [13].

К указанным результатам близки результаты работ [14, 16], относящиеся к вопросу об асимптотике решений функционально-дифференциального уравнения вида

$$y^{(n)}(x) + (Fy)(x) + \rho^n y(x) = 0, \quad 0 \le x \le 1,$$

а также некоторым его обобщениям. Здесь F — линейный оператор, непрерывно действующий из пространства Гельдера $C^\gamma[0, 1]$ в пространство $L_1[0, 1]$, причем $\gamma < n - 1$. В этих работах, в частности, получена асимптотика системы решений экспоненциального типа, при этом также выявлена определенная зависимость скорости стремления $\psi(\rho)$ к нулю от свойств оператора F.

2. Вспомогательная теорема. Для доказательства сформулированных утверждений нам потребуется вспомогательная теорема об асимптотике системы решений к.-д. уравнения (7) при условии

$$p_{kk}(x) \equiv 1, \quad a \le x \le b, \quad p_{kj} \in L_1[a, b], \quad k = \overline{1, n}, \quad j = \overline{0, k-1}, \tag{16}$$

представляющая также самостоятельный интерес.

Пусть в уравнении (7) $\lambda = (i\rho)^n$. Тогда оно будет иметь вид

$$y^{[n]}(x) - (i\rho)^n y(x) = 0. \tag{17}$$

Теорема 3. *Если выполняется условие* (16), *то во всякой области* T_c ρ-*плоскости уравнение* (17) *имеет* n *линейно независимых решений* $y_1, y_2, \ldots$ $\ldots, y_n$, *регулярных по* $\rho \in T_c$ *при* $|\rho|$ *достаточно большом и имеющих асимптотику*

$$y_k^{[m]}(x, \rho) = (i\rho\omega_k)^m \tilde{v}(x) e^{\rho\omega_k(x-a)}(1 + O(\tilde{\varphi}(\rho))), \tag{18}$$
$$k = \overline{1, n}, \quad m = \overline{0, n-1},$$

где

$$\tilde{v}(x) := \exp\left(\frac{i}{n}\int_a^x \sum_{j=1}^n p_{jj-1}(\tau)\,d\tau\right), \quad \tilde{\varphi}(\rho) := \tilde{g}(\rho) + \frac{1}{|\rho|},$$
$$\tilde{g}(\rho) := \max_{j \neq s} \max_m \left\| \int_{c_{js}}^x e^{\rho_{js}(x-t)} p_{mm-1}(t)\,dt \right\|. \tag{19}$$

Константы c_{js} *имеют тот же смысл, что и в теореме* 1.

Доказательство. Пусть $\rho \in T_c$. Преобразуем уравнение (17). Рассмотрим достаточно малое число $\varepsilon > 0$ и сделаем замену искомой функции

$$y^{[0]}(x) = \tilde{v}(x) y^{\lfloor 0 \rfloor}(x), \quad y^{[k]}(x) =$$
$$= \tilde{v}(x)\left(y^{\lfloor k \rfloor}(x) + \left(\sum_{j=1}^k P_{jj-1}(x) - \frac{k}{n}\sum_{j=1}^n P_{jj-1}(x)\right) y^{\lfloor k-1 \rfloor}(x)\right), \quad k = \overline{1, n}, \tag{20}$$

где $P_{jj-1}(x)$ — фиксированные функции из $W_1^1[a, b]$ такие, что

$$\| p_{jj-1} - P_{jj-1} \|_1 \leq \varepsilon. \tag{21}$$

Нетрудно показать, что в результате замены (20) уравнение (17) преобразуется к эквивалентному уравнению

$$y^{\lfloor n \rfloor}(x) = (i\rho)^n y^{\lfloor 0 \rfloor}(x), \tag{22}$$

где

$$y^{\lfloor k \rfloor}(x) := i\frac{d}{dx} y^{\lfloor k-1 \rfloor}(x) + \sum_{j=0}^{k-1} q_{kj}(x) y^{\lfloor j \rfloor}(x), \quad k = \overline{1, n}, \tag{23}$$

$$q_{kk-1}(x) := \left(p_{kk-1}(x) - P_{kk-1}(x)) - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n (p_{jj-1}(x) - P_{jj-1}(x)\right), \tag{24}$$

причем q_{kj}, $j = \overline{0, k-2}$, — некоторые функции от p_{kj}, P_{jj-1} и P'_{jj-1} такие, что $q_{kj} \in L_1[a, b]$. Когда $p_{kk-1} \in W_1^1[a, b]$, тогда в качестве P_{kk-1} можно рассматривать p_{kk-1}, и в результате получим $q_{kk-1}(x) \equiv 0$, $k = \overline{1, n}$.

Из (21) и (24) следует

$$\| q_{kk-1} \|_1 \leq \varepsilon, \quad k = \overline{1, n}; \quad \sum_{k=1}^n q_{kk-1}(x) \equiv 0. \tag{25}$$

Эти соотношения будут играть принципиальную роль в дальнейшем.

Рассмотрим теперь к.-д. уравнение (22). Обозначим $y^{\lfloor m \rfloor} = z_m$, $m = \overline{0, n-1}$. В результате получаем систему

$$\begin{cases} i \dfrac{d}{dx} z_{m-1} + q_{mm-1} z_{m-1} - z_m = G_{m-1}, & m = \overline{1, n-1}, \\ i \dfrac{d}{dx} z_{n-1} + q_{nn-1} z_{n-1} + (i\rho)^n z_0 = G_{n-1}, \end{cases} \tag{26}$$

где

$$G_0 = 0, \quad G_m = -\sum_{j=0}^{m} q_{m+1j} z_j, \quad m = \overline{1, n-1}.$$

Найдем фундаментальную матрицу решений (ф. м. р.) системы (26), используя модификацию метода [3]. Первоначально рассмотрим систему

$$\begin{cases} i \dfrac{d}{dx} v_{m-1} - v_m = -q_{mm-1} v_{m-1}, & m = \overline{1, n-1}, \\ i \dfrac{d}{dx} v_{n-1} + (i\rho)^n v_0 = -q_{nn-1} v_{n-1}. \end{cases} \tag{27}$$

Для того чтобы получить систему интегральных уравнений, которой удовлетворяет решение системы (27), полагаем, что ее правые части являются свободными членами. Тогда, очевидно, матрица $\left[(i\rho\omega_k)^{m-1} \exp(\rho\omega_k(x-a)) \right]_{m,k=1}^{n}$ — ф. м. р. однородной системы. Применяя теперь к системе (27) метод вариации произвольных постоянных, получаем для нахождения k-го столбца матрицы решений систему интегральных уравнений

$$v_{mk}(x,\rho) = (i\rho\omega_k)^m e^{\rho\omega_k(x-a)} -$$

$$- \int_a^x \sum_{s=1}^{n} K_{mks}(x,t,\rho) q_{ss-1}(t) v_{s-1k}(t,\rho)\, dt +$$

$$+ \int_x^b \sum_{s=1}^{n} N_{mks}(x,t,\rho) q_{ss-1}(t) v_{s-1k}(t,\rho)\, dt, \quad m = \overline{0, n-1}, \tag{28}$$

где

$$K_{mks}(x,t,\rho) = \frac{1}{in} \sum_{j=1}^{k} (i\rho\omega_j)^{m+1-s} e^{\rho\omega_j(x-t)},$$

$$N_{mks}(x,t,\rho) = \frac{1}{in} \sum_{j=k+1}^{n} (i\rho\omega_j)^{m+1-s} e^{\rho\omega_j(x-t)}.$$

Производя в (28) замену

$$v_{mk}(x,\rho) = (i\rho\omega_k)^m e^{\rho\omega_k(x-a)} u_{mk}(x,\rho), \quad m = \overline{0, n-1}, \tag{29}$$

имеем относительно u_{mk} систему

$$u_{mk}(x,\rho) = 1 + \int_a^b \sum_{s=1}^{n} A_{mks}(x,t,\rho) u_{s-1k}(t,\rho)\, dt, \quad m = \overline{0, n-1}, \tag{30}$$

где

$$A_{mks}(x, t, \rho) = \begin{cases} -\dfrac{1}{in} \sum\limits_{j=1}^{k} \left(\dfrac{\omega_k}{\omega_j}\right)^{s-1-m} e^{\rho_{j k}(x-t)} q_{ss-1}(t), & t \le x; \\ \dfrac{1}{in} \sum\limits_{j=k+1}^{n} \left(\dfrac{\omega_k}{\omega_j}\right)^{s-1-m} e^{\rho_{kj}(t-x)} q_{ss-1}(t), & t > x. \end{cases}$$

Из первого соотношения в (25) и (2) следует, что для $\rho \in T_c$

$$\max_{x\in[a,b]} \| A_{mks}(x, \cdot, \rho) \|_1 \le C\varepsilon.$$

Поэтому система (30) однозначно разрешима при достаточно малом $\varepsilon > 0$, ее решением являются непрерывные по $x \in [a, b]$ и регулярные по $\rho \in T_c$ функции $u_{mk}(x, \rho)$, $m = \overline{0, n-1}$, и равномерно по $x \in [a, b]$ и $\rho \in T_c$

$$u_{mk}(x, \rho) = 1 + O(\varepsilon), \quad m = \overline{0, n-1}. \tag{31}$$

Непосредственно из системы (30) получить оценки для $u_{mk}(x, \rho)$, из которых вытекают формулы (18), не удается. Поэтому поступаем следующим образом. Зафиксируем ε, при котором найдено решение (31), и осуществим в системе (30) два раза последовательную подстановку. В результате получим, что решение $u_{mk}(x, \rho)$, $m = \overline{0, n-1}$, помимо системы (30) удовлетворяет также и следующей системе тождеств:

$$u_{mk}(x, \rho) \equiv 1 - \frac{1}{in} \int_a^x \sum_{s=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{\omega_k}{\omega_j}\right)^{s-1-m} e^{\rho_{jk}(x-t)} q_{ss-1}(t) D_{ks}(t, \rho)\, dt +$$

$$+ \frac{1}{in} \int_x^b \sum_{s=1}^{n} \sum_{j=k+1}^{k} \left(\frac{\omega_k}{\omega_j}\right)^{s-1-m} e^{\rho_{jk}(x-t)} q_{ss-1}(t) D_{ks}(t, \rho)\, dt, \quad m = \overline{0, 1}, \tag{32}$$

где

$$D_{ks}(t, \rho) := 1 - \frac{1}{in} \int_a^t \sum_{\alpha=1}^{t} \sum_{\beta=1}^{k} \left(\frac{\omega_k}{\omega_\beta}\right)^{\alpha-s} \times$$

$$\times e^{\rho_{\beta k}(t-\tau)} q_{\alpha\alpha-1}(\tau) E_{k\alpha}(\tau, \rho)\, d\tau +$$

$$+ \frac{1}{in} \int_t^b \sum_{\alpha=1}^{t} \sum_{\beta=k+1}^{k} \left(\frac{\omega_k}{\omega_\beta}\right)^{\alpha-s} e^{\rho_{k\beta}(\tau-t)} q_{\alpha\alpha-1}(\tau) E_{k\alpha}(\tau, \rho)\, d\tau,$$

$$E_{k\alpha}(\tau, \rho) := 1 - \frac{1}{in} \int_a^\tau \sum_{\gamma=1}^{t} \sum_{\mu=1}^{k} \left(\frac{\omega_k}{\omega_\mu}\right)^{\gamma-\alpha} \times$$

$$\times e^{\rho_{\mu k}(\tau-\xi)} q_{\gamma\gamma-1}(\xi) u_{\gamma-1\,k}(\xi, \rho)\, d\xi +$$

$$+ \frac{1}{in} \int_\tau^b \sum_{\gamma=1}^{n} \sum_{\mu=k+1}^{n} \left(\frac{\omega_k}{\omega_\mu}\right)^{\gamma-\alpha} e^{\rho_{k\mu}(\xi-\tau)} q_{\gamma\gamma-1}(\xi) u_{\gamma-1\,k}(\xi, \rho)\, d\xi.$$

В соответствии со вторым соотношением в (25) система (32) имеет важное свойство, которое и позволяет далее получить искомое асимптотическое представление для решения. А именно: в правой части (32) отсутствуют слагаемые, в которых $\beta = j$, $\mu = \beta$, $j = k$ (в группе слагаемых, содержащих интегралы только по переменной t) и $\beta = k$ (в группе слагаемых, содержащих интегралы только по переменным t и τ). В самом деле, рассмотрим для примера случай $\beta = j$. Тогда под знаком интеграла справа в (32) имеется, например, член вида

$$\frac{1}{(in)^2} \sum_{\substack{s=1 \\ \alpha=1}}^{n} \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{\omega_k}{\omega_j}\right)^{s-1-m} e^{\rho_{jk}(x-t)} q_{ss-1}(t) \left(\frac{\omega_k}{\omega_j}\right)^{\alpha-s} e^{\rho_{jk}(t-\tau)} q_{\alpha\alpha-1}(\tau) E_{k\alpha}.$$

Переставляя в нем порядок суммирования и учитывая справедливость тождества $\sum_{s=1}^{n} q_{ss-1}(x) \equiv 0$, получаем, что этот член равен нулю. Остальные слагаемые в случае $\beta = j$ рассматриваются аналогично.

Оценим теперь оставшиеся слагаемые в правой части (32). Разобьем их на три группы по числу входящих в них интегралов. Как оцениваются слагаемые, содержащие один интеграл, покажем на примере суммы вида

$$I_1 := \frac{1}{in} \sum_{s=1}^{n} \sum_{j=1}^{k-1} \left(\frac{\omega_k}{\omega_j}\right)^{s-1-m} \int_a^x e^{\rho_{jk}(x-t)} q_{ss-1}(t)\, dt.$$

Подставляя в I_1 представление для q_{ss-1} из (24) и интегрируя один раз по частям члены, содержащие $P_{\eta\eta-1}$, получаем для I_1 оценку $O(\tilde{g}(\rho) + 1/|\rho|)$, где $\tilde{g}(\rho)$ определяется формулой (19). Слагаемые в (32), содержащие по два интеграла, оцениваются аналогично.

Рассмотрим теперь слагаемые в (32), содержащие по три интеграла. Найдем оценку на примере слагаемого вида

$$I_2 := \frac{1}{(in)^3} \left(\frac{\omega_k}{\omega_j}\right)^{s-1-m} \left(\frac{\omega_k}{\omega_\beta}\right)^{\alpha-s} \left(\frac{\omega_k}{\omega_\mu}\right)^{\gamma-\alpha} \int_a^x e^{\rho_{jk}(x-t)} q_{ss-1}(t) \times$$

$$\times \int_a^t e^{\rho_{\beta k}(t-\tau)} q_{\alpha\alpha-1}(\tau) \int_a^\tau e^{\rho_{\mu k}(\tau-\xi)} q_{\gamma\gamma-1}(\xi) u_{\gamma-1\,k}(\xi, \rho)\, d\xi\, d\tau\, dt,$$

где $1 \le s, \alpha, \gamma \le n$; $1 \le j, \beta, \mu \le k$; $\beta \ne j$, $\mu \ne \beta$. Меняя порядок интегрирования по t и τ, имеем

$$I_2 = O\left(\max_{a \le \tau \le x \le b} \left| \int_\tau^x e^{\rho_{jk}(x-t) + \rho_{\beta k}(t-\tau)} q_{ss-1}(t)\, dt \right| \right).$$

Для определенности рассмотрим случай $j < \beta$. Представляя показатель в экспоненте в виде

$$\rho_{jk}(x-t) + \rho_{\beta k}(t-\tau) \equiv \rho_{j\beta}(x-t) + \rho_{\beta k}(x-\tau),$$

получаем

$$\left| \int_\tau^x e^{\rho_{j\beta}(x-t) + \rho_{\beta k}(x-\tau)} q_{ss-1}(t)\, dt \right| \le \left| \int_a^x e^{\rho_{j\beta}(x-t)} q_{ss-1}(t)\, dt \right| +$$

$$+ \left| \int_a^\tau e^{\rho_{j\beta}(\tau-t)} q_{ss-1}(t)\, dt \right| \le 2 \max_{a \le x \le b} \left| \int_a^x e^{\rho_{j\beta}(x-t)} q_{ss-1}(t)\, dt \right|.$$

Случай $j > \beta$ рассматривается аналогично. Окончательно будем иметь

$$I_2 = O\left(\max_{a \le x \le b} \left| \int_a^x e^{\rho_{j\beta}(x-t)} q_{ss-1}(t)\, dt \right| \right) = O\left(\tilde{g}(\rho) + \frac{1}{|\rho|} \right).$$

Остальные слагаемые в правой части (32) оцениваются аналогично.

Следовательно,

$$u_{mk}(x, \rho) = 1 + O(\tilde{\varphi}(\rho)), \quad m = \overline{0, n-1}, \quad k = \overline{1, n}.$$

С учетом (29) отсюда получаем следующую асимптотику для компонент решений системы (27):

$$v_{mk}(x, \rho) = (i\rho\omega_k)^m e^{\rho\omega_k(x-a)}(1 + O(\tilde{\varphi}(\rho))), \tag{33}$$

$$m = \overline{0, n-1}, \quad k = \overline{1, n},$$

образующих ф. м. р. системы (26), если ее рассматривать как неоднородную систему с правыми частями C_j, $j = \overline{0, n-1}$. Рассуждая так же, как и при получении формул (33), но используя вместо матрицы

$$[(i\rho\omega_k)^{m-1} \exp(\rho\,\omega_k(x-a))]_{m,k=1}^n$$

матрицу $[v_{mk}]_{m,k=1}^n$, получаем для компонент решений системы (26) асимптотику при $|\rho| \to \infty$ вида

$$z_{mk}(x, \rho) = (i\rho\omega_k)^m e^{\rho\omega_k(x-a)}(1 + O(\tilde{\varphi}(\rho))), \quad m = \overline{0, n-1}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Последовательно возвращаясь от системы (26) к уравнению (22), а затем от него с помощью формул (20) к уравнению (17), получаем утверждение теоремы. Таким образом, теорема 3 доказана.

3. Доказательство теорем 1 и 2. Дифференциальное уравнение (1) — это частный случай к.-д. уравнения (7), если в (7) положить

$$p_{kk}(x) \equiv 1, \quad p_{kj}(x) \equiv 0, \quad k = \overline{0, n-1}, \quad j = \overline{0, k-1};$$

$$p_{nj}(x) \equiv a_{n-j}(x)\lambda(i^j), \quad j = \overline{0, n}.$$

Поэтому теорема 1 является простым следствием теоремы 2.

Докажем теорему 2. Обозначая $\chi = \operatorname{sign}(r_n(x))$ и полагая $\lambda = \chi(i\rho)^n$ в уравнении (7), получаем к.-д. уравнение

$$y^{[n]}(x) - \chi(i\rho)^n y(x) = 0. \tag{34}$$

Сделаем теперь в этом уравнении замену независимой переменной

$$t = \tilde{\eta}(x) := \int_a^x |r_n(\tau)|^{-1/n} d\tau \in [0, \tilde{h}],$$

$$\tilde{h} = \int_a^b |r_n(\tau)|^{-1/n} d\tau. \tag{35}$$

Так как функция $\tilde{\eta}(x)$ строго монотонна на $[a, b]$, то существует обратная функция $x = \theta(t)$. Обозначим далее

$$P_{kj}(t) := p_{kj}(\theta(t)), \quad R_k(t) := r_k(\theta(t)), \quad R(t) := r(\theta(t)), \quad Y(t) := y(\theta(t)),$$

где $r(x) := |r_n(x)|^{1/n}$.

Легко установить, что в результате замены (35) уравнение (34) принимает вид

$$Y^{\lceil n \rceil}(t) - (i\rho)^n Y^{\lceil 0 \rceil}(t) = 0, \quad t \in [0, \tilde{h}], \tag{36}$$

где

$$\begin{gathered} Y^{\lceil 0 \rceil}(t) := Y(t), \\ Y^{\lceil k \rceil}(t) := i\frac{d}{dt} Y^{\lceil k-1 \rceil}(t) + \sum_{j=0}^{k-1} Q_{kj}(t) Y^{\lceil j \rceil}(t), \quad k = \overline{1, n}, \end{gathered} \tag{37}$$

$$Q_{kk-1}(t) := i\frac{R^{k-1}(t)}{R_{k-1}(t)} \left(\frac{R_{k-1}(t)}{R^{k-1}(t)} \right)' + \frac{P_{kk-1}(t)}{P_{kk}(t)} R(t), \quad k = \overline{1, n}, \tag{38}$$

при этом $Q_{kk-1} \in L_1[0, \tilde{h}]$, а остальные Q_{kj} также вполне определенные функции из $L_1[0, \tilde{h}]$, конкретный вид которых нам не потребуется. При этом справедливы формулы

$$y^{[0]}(x) \equiv Y^{\lceil 0 \rceil}(t), \quad y^{[k]}(x) \equiv R_k(t) R^{-k}(t) Y^{\lceil k \rceil}(t), \quad k = \overline{1, n}. \tag{39}$$

Но уравнение (36) удовлетворяет требованиям теоремы 3. На основании этой теоремы оно имеет для всякой области T_c систему независимых решений Y_1, $Y_2, \ldots, Y_n$, регулярных по ρ при $|\rho|$ достаточно большом и имеющих асимптотику

$$Y_k^{\lceil m \rceil}(t, \rho) = (i\rho\omega_k)^m \tilde{V}(t) e^{\rho\omega_k t}(1 + O(\tilde{\Phi}(\rho))), \quad k = \overline{1, n}, \quad m = \overline{0, n-1}, \tag{40}$$

где

$$\begin{gathered} \tilde{V}(t) := \exp\left(\frac{i}{n} \int_0^t \sum_{j=1}^n Q_{jj-1}(\tau) d\tau \right), \quad \tilde{\Phi}(\rho) := \tilde{G}(\rho) + \frac{1}{|\rho|}, \\ \tilde{G}(\rho) := \max_{j \neq s} \max_m \left\| \int_{d_{js}}^t e^{\rho_{js}(t-\tau)} Q_{mm-1}(\tau) d\tau \right\|, \end{gathered} \tag{41}$$

d_{js} равно либо 0, либо $\tilde{h}$ в зависимости от условия $j < s$ или $j > s$.

Преобразуем выражения для функций $\tilde{V}(t)$ и $\tilde{\Phi}(\rho)$. Для $\tilde{V}(t)$ имеем

$$\tilde{V}(\rho) = \exp\left(\frac{i}{n} \int_0^t \left(i \sum_{j=1}^n \frac{R^{j-1}(\tau)}{R_{j-1}(\tau)} \left(\frac{R_{j-1}(\tau)}{R^{j-1}(\tau)} \right)' + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{j=1}^n \frac{P_{jj-1}(\tau)}{P_{jj}(\tau)} R(\tau) \right) d\tau \right) = \exp(J_1(t) + J_2(t)).$$

Делая замену $\tau = \tilde{\eta}(\xi)$, для $J_1(t)$ получаем

$$J_1(t) = -\frac{1}{n} \int_0^t \left(\sum_{j=2}^n \frac{R^{j-1}(\tau)}{R_{j-1}(\tau)} d\left(\frac{R_{j-1}(\tau)}{R^{j-1}(\tau)} \right) \right) =$$

$$= -\frac{1}{n}\int\limits_a^x \left(\sum_{j=2}^{n} \frac{r^{j-1}(\xi)}{r_{j-1}(\xi)}\, d\left(\frac{r_{j-1}(\xi)}{r^{j-1}(\xi)}\right)\right) =$$

$$= \ln\left(\prod_{j=2}^{n} \frac{r^{j-1}(\xi)}{|r_{j-1}(\xi)|}\right)^{1/n}\Bigg|_a^x = \ln\left(\frac{r^{(n-1)/2}(\xi)}{\prod_{j=1}^{n-1}|r_j(\xi)|^{1/n}}\right)\Bigg|_a^x = \ln\frac{q(x)}{q(a)},$$

где функция $q(x)$ та же самая, что и в формулировке теоремы 2.

Для $J_2(t)$ после замены $\tau = \tilde{\eta}(\xi)$ имеем

$$J_2(t) = \frac{i}{n}\int\limits_0^t \sum_{j=1}^{n} \frac{P_{jj-1}(\tau)}{P_{jj}(\tau)} R(\tau)\, d\tau = \frac{i}{n}\int\limits_a^x \sum_{j=1}^{n} \frac{p_{jj-1}(\xi)}{p_{jj}(\xi)}\, d\xi.$$

Следовательно,

$$\tilde{V}(t) = \frac{q(x)}{q(a)} \exp\left(\frac{i}{n}\int\limits_a^x \sum_{j=1}^{n} \frac{p_{jj-1}(\tau)}{p_{jj}(\tau)}\, d\tau\right) \equiv \frac{q(x)}{q(a)}\, \tilde{w}(x). \tag{42}$$

Для того чтобы оценить $\tilde{\Phi}(\rho)$, рассмотрим интегралы внутри нормы в (41) и подставим вместо $Q_{mm-1}(\tau)$ их выражения из (38). Ограничимся рассмотрением случая $j < s$, т. е. когда $d_{j_s} = 0$. Рассуждения в случае $j > s$ аналогичны. Интеграл, соответствующий первому слагаемому в правой части (38), обозначим через L_1, а второму — через L_2.

Для первого интеграла имеем

$$L_1 = \int\limits_0^t e^{\rho_{js}(t-\tau)} \frac{R^{\alpha-1}(\tau)}{R_{\alpha-1}(\tau)}\, d\left(\frac{R_{\alpha-1}(\tau)}{R^{\alpha-1}(\tau)}\right) =$$

$$= \int\limits_a^x e^{\rho_{js}(\tilde{\eta}(x)-\tilde{\eta}(\xi))}\, d\ln\left(\frac{|r_{\alpha-1}(\xi)|}{r^{\alpha-1}(\xi)}\right) =$$

$$= \int\limits_a^x e^{\rho_{js}(\tilde{\eta}(x)-\tilde{\eta}(\xi))}\, d\left(\sum_{\beta=1}^{\alpha-1} \ln|p_{\beta\beta}(\xi)| - \frac{\alpha-1}{n}\sum_{\beta=1}^{n} \ln|p_{\beta\beta}(\xi)|\right) =$$

$$= O\left(\sum_{\alpha=1}^{n}\left|\int\limits_a^x e^{\rho_{js}(\tilde{\eta}(x)-\tilde{\eta}(\xi))}\, d\ln|p_{\alpha\alpha}(\xi)|\right|\right) =$$

$$= O\left(\sum_{\alpha=1}^{n}\left|\int\limits_a^x e^{\rho_{js}(\tilde{\eta}(x)-\tilde{\eta}(\xi))} \frac{p'_{\alpha\alpha}(\xi)}{p_{\alpha\alpha}(\xi)}\, d\xi\right|\right).$$

Второй интеграл преобразуем следующим образом:

$$L_2 = \int\limits_0^t e^{\rho_{js}(t-\tau)} \frac{P_{\alpha\alpha-1}(\tau)}{P_{\alpha\alpha}(\tau)} R(\tau)\, d\tau =$$

$$= \int\limits_a^x e^{\rho_{js}(\tilde{\eta}(x)-\tilde{\eta}(\xi))} \frac{p_{\alpha\alpha-1}(\xi)}{p_{\alpha\alpha}(\xi)}\, d\xi.$$

Следовательно, мы получили, что $\tilde{G}(\rho) \le C\tilde{f}(\rho)$, где $\tilde{f}(\rho)$ определена в формулировке теоремы 2. Таким образом, $\tilde{\Phi}(\rho) = O(\tilde{\psi}(\rho))$. Из этой оценки, формул (42), (40) и (39), используя замену $t = \tilde{\eta}(x)$ и не учитывая отличную от нуля константу $1/q(a)$, получаем асимптотические формулы (9). Теорема 2 доказана.

1. *Birkhoff G. D.* On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter // Trans. Amer. Math. Soc. – 1908. – **9**. – P. 219–231.
2. *Tamarkine J. D.* Sur quelques points de la théory des équations differentielles linéaires ordinaires et sur la généralisation de la série de Fourier // Rend. Circ. Mat. Palermo. – 1912. – **34**. – P. 345–382.
3. *Stone M. H.* A comparison of the series of Fourier and Birkhoff // Trans. Amer. Math. Soc. – 1926. – **28**. – P. 695–761.
4. *Наймарк М. Н.* Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 528 с.
5. *Тамаркин Я. Д.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и разложении произвольных функций в ряды. – Петроград, 1917. – 308 с.
6. *Tamarkin J. D.* Some general problems of the theory of ordinary linear differential equations and expansion of an arbitrary function in series of fundamental functions // Math. Z. – 1927. – **27**. – P. 1–54.
7. *Расулов М. Л.* Метод контурного интеграла и его применение к исследованию задач для дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1964. – 464 с.
8. *Шин Д.* О квазидифференциальных операторах в гильбертовом пространстве // Докл. АН СССР. – 1938. – **18**. – С. 523–526.
9. *Хрыптун В. Г.* Разложение в равномерно сходящиеся ряды по собственным функциям // Обратные задачи для дифференциальных уравнений. – Новосибирск, 1972. – С. 132–140.
10. *Рыхлов В. С.* Теоремы равносходимости для дифференциальных операторов с ненулевым коэффициентом при $(n-1)$-й производной // Дифференц. уравнения и теория функций: Межвуз. науч. сб. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1980. – Вып. 2. – С. 57–75.
11. *Рыхлов В. С., Хромов А. П.* О порождающих функциях вольтерровых операторов с весом // Там же. – Вып. 3. – С. 32–49.
12. *Вагабов А. И.* Об уточнении асимптотической теоремы Тамаркина // Дифференц. уравнения. – 1993. – **29**, № 1. – С. 41–49.
13. *Рыхлов В. С.* Асимптотика системы решений квазидифференциального уравнения // Дифференц. уравнения и теория функций. Разложение и сходимость: Межвуз. науч. сб. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1983. – Вып. 5. – С. 51–59.
14. *Гомилко А. М., Радзиевский Г. В.* Асимптотика по параметру решений линейных функционально-дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 11. – С. 1460–1469.
15. *Гомилко А. М., Радзиевский Г. В.* Базисные свойства собственных функций регулярной краевой задачи для векторного функционально-дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. – 1991. – **27**, № 3. – С. 384–396.
16. *Радзиевский Г. В.* О свойствах решений линейных функционально-дифференциальных уравнений, зависящих от параметра // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 9. – С. 1213–1231.

Получено 24.06.94