УДК 517.938

І. М. Грод (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО ГЛАДКІСТЬ ОБМЕЖЕНИХ ІНВАРІАНТНИХ МНОГОВИДІВ ЛІНІЙНИХ НЕОДНОРІДНИХ РОЗШИРЕНЬ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Sufficient conditions of existence of smooth bounded invariant manifolds of dynamical systems is found.

Знайдено достатні умови існування гладких обмежених інваріантних многовидів динамічних систем.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega(\psi), \quad \frac{dx}{dt} = H(\psi)x + f(\psi), \tag{1}$$

де $\psi \in R^m$, $x \in R^n$, $\omega(\psi)$, $H(\psi)$, $f(\psi) \in C^1(R^m)$, $C^1(R^m)$ — простір неперервно диференційовних і обмежених на R^m функцій. Система (1) має функцію Гріна задачі про обмежені інваріантні многовиди [1–3]

$$G_0(\tau, \psi) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(\psi)\, C(\psi_\tau(\psi)), & \tau \le 0, \\ \Omega_\tau^0(\psi)\left[C(\psi_\tau(\psi)) - I_n\right], & \tau > 0, \end{cases} \tag{2}$$

якщо існує деяка функція $C(\psi)$ з простору $C^0(R^m)$ така, що

$$\| G_0(\tau, \psi) \| \le K e^{-\gamma|\tau|}, \quad K, \gamma = \text{const} > 0. \tag{3}$$

При існуванні такої функції $G_0(\tau, \psi)$ система (1) для кожної вектор-функції $f(\psi) \in C^1(R^m)$ має єдиний обмежений інваріантний многовид

$$x = u_0(\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau, \psi)\, f(\psi_\tau(\psi))\, d\tau. \tag{4}$$

Істотні відмінності виникають при вивченні гладкості функції Гріна системи (1) у порівнянні з випадком, коли $H(\psi)$ є 2π-періодичною відносно ψ_j, $j = \overline{1, m}$, оскільки функція $H(\psi)$ задана не на компактному многовиді і тому похідна $\partial H(\psi)/\partial \psi_i$ може бути необмеженою в R^n.

Відносно системи припустимо, що вектор-функція $\omega(\psi) \in C^1(R^m)$ задовольняє оцінки

$$\| \omega(\psi) \| \le \alpha_1, \quad \sup_{\psi \in R^m} \left\| \frac{\partial}{\partial \psi_i} \omega(\psi) \right\| < \infty, \tag{5}$$

де $\alpha_1 = \text{const} < \infty$. А для матричної функції $H(\psi) \in C^1(R^m)$ припустимо існування неперервних частинних похідних першого порядку $\partial H(\psi)/\partial \psi_i$, $i = \overline{1, m}$, та виконання нерівностей

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \psi_i} H(\psi) \right\| \le \alpha_2 \exp\{\nu \|\psi\|\} + \alpha_3, \tag{6}$$

$\alpha_2, \alpha_3, \gamma = \text{const} > 0$. Простір таких функцій позначимо через $C_\nu^1(R^m)$.

Справедливе наступне твердження.

Теорема. *Нехай система рівнянь* (1), *для якої справедливі оцінки* (5) *і* (6), *має єдину функцію Гріна задачі про обмежені інваріантні многовиди* (2). *Тоді для того щоб обмежений інваріантний многовид* (4) *при кожній фіксованій вектор-функції* $f(\psi) \in C^1_\nu(R^m)$ *належав простору* $C^1_\nu(R^m)$, *достатньо виконання нерівності*

$$\alpha_1 \nu + \alpha_0 < \gamma,$$

де

$$\alpha_0 = \sup_{\psi \in R^m} \left(\max_{\|\eta\| = 1} \left| \left\langle \frac{\partial}{\partial \psi} \omega(\psi) \eta, \eta \right\rangle \right| \right). \tag{7}$$

Доведення. Зауважимо, що різницю $G_t(\tau, \psi) - G_t(\tau, \overline{\psi})$ завдяки єдиності функції Гріна $G_0(\tau, \psi)$ можна зобразити у вигляді

$$G_t(\tau, \psi) - G_t(\tau, \overline{\psi}) = \int_{-\infty}^{\infty} G_t(\sigma, \psi) \left[H(\psi_\sigma(\psi)) - H(\psi_\sigma(\overline{\psi})) \right] G_\sigma(\tau, \overline{\psi})\, d\sigma. \tag{8}$$

Дійсно, розглянувши різницю $R_t = G_t(\tau, \psi) - G_t(\tau, \overline{\psi})$ як функцію від змінної $t \in R$ при фіксованих значеннях $t \in R$, $\psi \in R^m$, бачимо, що при $\tau \neq t$ виконується рівність

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} R_t &= H(\psi_t(\psi))\, G_t(\tau, \psi) - H(\psi_t(\overline{\psi}))\, G_t(\tau, \overline{\psi}) = \\ &= H(\psi_t(\psi))\, R_t + \left[H(\psi_t(\psi)) - H(\psi_t(\overline{\psi})) \right] G_t(\tau, \psi). \end{aligned} \tag{9}$$

Значить, функція R_t є обмеженим на всій осі R розв'язком лінійної неоднорідної системи рівнянь

$$\frac{dR}{dt} = H(\psi_t(\psi)) R + F_t, \tag{10}$$

де F_t — обмежена на всій осі R функція, що має єдину точку розриву першого роду при $t = \tau$. А тому, враховуючи єдиність функції Гріна $G_t(\tau, \psi)$ задачі про обмежені розв'язки для системи (10), маємо

$$R_t = \int_{-\infty}^{\infty} G_t(\sigma, \psi)\, F_\sigma\, d\sigma. \tag{11}$$

Покладаючи в останній рівності $t = 0$, одержуємо тотожність для функції Гріна $G_0(\tau, \psi)$ задачі про інваріантні тори.

$$\begin{aligned} &G_0(\tau, \psi) - G_0(\tau, \overline{\psi}) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\sigma, \psi) \left[H(\psi_\sigma(\psi)) - H(\psi_\sigma(\overline{\psi})) \right] G_\sigma(\tau, \overline{\psi})\, d\sigma. \end{aligned} \tag{12}$$

Далі, поділимо ліву та праву частини на $\psi_i - \overline{\psi}_i$, де $\overline{\psi}$ таке, що відрізняється від ψ тільки за i-ю координатою:

$$\frac{G_0(\tau, \psi) - G_0(\tau, \overline{\psi})}{\psi_i - \overline{\psi}_i} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\sigma, \psi) \frac{H(\psi_\sigma(\psi)) - H(\psi_\sigma(\overline{\psi}))}{\psi_i - \overline{\psi}_i} G_0(\tau, \overline{\psi})\, d\sigma . \tag{13}$$

Формально перейшовши до границі при $\psi \to \overline{\psi}$, дістанемо

$$\frac{d}{d\psi_i} G_0(\tau, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} N_i(\sigma, \psi, \tau)\, d\sigma =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\sigma, \psi) \left[\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial H(\psi_\sigma(\psi))}{\partial \psi_{\sigma j}} \frac{\partial \psi_{\sigma j}(\psi)}{\partial \psi_i} \right] G_0(\tau, \psi)\, d\sigma . \tag{14}$$

Оцінимо підінтегральний вираз в (13). Враховуючи те, що при всіх $\psi \in R^m$ $\psi_t(\psi)$ — розв'язок системи, $\partial\psi/\partial t = \omega(\psi)$ такий, що $\psi_0(\psi) = \psi$, маємо рівність

$$\psi_t(\psi) = \psi + \int_0^t \omega(\psi_\sigma(\psi))\, d\sigma , \tag{15}$$

або з першої з нерівностей (5)

$$\| \psi_t(\psi) \| \le \| \psi \| + \alpha_1 |t|. \tag{16}$$

Для похідної $\partial\psi_t(\psi)/\partial\psi_i$ легко дістати оцінку

$$\left\| \frac{\partial \psi_t(\psi)}{\partial \psi_i} \right\| \le K_0 \exp\{\alpha_0 |t|\}, \tag{17}$$

де стала α_0 визначена рівністю (7).

Нерівності (5), (16) дають змогу одержати оцінку

$$\left\| \frac{\partial H(\psi_t(\psi))}{\partial \psi_{\sigma j}} \right\| \le \alpha_2 \exp\{\nu \| \psi_t(\psi) \|\} + \alpha_3 \le$$

$$\le \alpha_2 \exp\{\nu (\| \psi \| + \alpha_1 |t|)\} + \alpha_3. \tag{18}$$

Далі, враховуючи нерівності (17), (18), оцінимо вираз (15):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \| N_i(\sigma, \psi, \tau) \|\, d\sigma \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{\infty} \| G_0(\sigma, \psi) \| \left[\sum_{j=1}^{m} \left\| \frac{\partial H(\psi_\sigma(\psi))}{\partial \psi_{\sigma j}} \right\| \left\| \frac{\partial \psi_{\sigma j}(\psi)}{\partial \psi_i} \right\| \right] \| G_0(\tau, \psi) \|\, d\sigma \le$$

$$\le K^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\gamma(|\sigma| + |\sigma - \tau|\} \sum_{j=1}^{m} \left\| \frac{\partial}{\partial \psi_j} H(\psi_\sigma(\psi)) \right\| \left\| \frac{\partial \psi_{\sigma j}(\psi)}{\partial \psi_i} \right\| d\sigma .$$

Звідси, використовуючи справедливість нерівності

$$\left| \left(\sum_{i=1}^{m} a_i \right) \right| m^{-1/2} \le \| a \|,$$

для довільного $a \in R^m$ маємо

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|N_i(\sigma, \psi, \tau)\| \, d\sigma \le$$

$$\le K_1 \exp\{\nu \|\psi\|\} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\gamma(|\sigma| + |\sigma - \tau|) + (\nu\alpha_1 + \alpha_0)|\sigma|\} \, d\sigma \; +$$

$$+ \; K_2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\gamma(|\sigma| + |\sigma - \tau|) + \alpha_0 |\sigma|\} \, d\sigma, \tag{19}$$

де

$$K_1 = K^3 \alpha_2 K_0 m^{1/2}, \quad K_2 = K^2 K_0 \alpha_3.$$

З останньої нерівності видно, що нерівність $\alpha_1 \nu + \alpha_0 < \gamma$ забезпечує рівномірну збіжність інтеграла в правій частині (14), а значить, визначає функцію $\partial G_0(\tau, \psi)/\partial \psi_i$. Покажемо, що функція $u_0(\psi)$, визначена рівністю (6), належить простору $C^1_\nu(R^m)$. Для цього продиференціюємо підінтегральний вираз в (6) відносно ψ_i:

$$\frac{\partial u_0(\psi)}{\partial \psi_i} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G_0(\tau, \psi)}{\partial \psi_i} \left(f(\psi_\tau(\psi)) + G_0(\tau, \psi) \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(\psi_\tau(\psi))}{\partial \psi_{\tau j}} \frac{\partial \psi_{\tau j}(\psi)}{\partial \psi_i} \right) d\tau. \tag{20}$$

Враховуючи, що $f(\psi)$ належить простору $C^1_\nu(R^m)$, і оцінки (19), (17), (5), оцінимо вираз (20):

$$\left\| \frac{\partial u_0(\psi)}{\partial \psi_i} \right\| \le \int_{-\infty}^{\infty} \|f\|_0 \Big((2K_1(\nu\alpha_1 + \alpha_0)^{-1} \exp\{\nu \|\psi\|\} + 2K_2 \alpha_0^{-1}) \times$$

$$\times \exp\{-(\gamma - \nu\alpha_1 - \alpha_0)|\tau|\} + KK_0\sqrt{m} \exp\{-\gamma|\tau| + \alpha_0|\tau|\} \times$$

$$\times \alpha_2 \exp\{\nu(\|\psi\| + \nu\alpha_1)|\tau|\} + \alpha_3 \Big) d\tau \le$$

$$\le \overline{\alpha}_2 \exp\{\nu \|\psi\|\} + \overline{\alpha}_3.$$

Тобто, $u(\psi) \in C^1_\nu(R^m)$. Теорему доведено.

1. *Митропольский Ю. А., Кулик В. Л.* Дифференцируемые инвариантные многообразия динамических систем // Дифференц. уравнения. – 1986. – **22**, № 9. – С. 1523–1532.
2. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
3. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследования дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. – Киев: Наук. думка, 1990. – 272 с.

Одержано 04.04.94