УДК 519.21

Ю. С. Мишура, д-р физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

СУЩЕСТВОВАНИЕ И СВОЙСТВА ЛОКАЛЬНЫХ ВРЕМЕН ДЛЯ МАРКОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

Random fields that have a "coordinatewise" Markov property are considered. Concepts of an excessive function, potential, and a continuous additive functional (CAF) are introduced. Sufficient conditions for existence of local time as a special form of CAF are formulated and its uniqueness to within a multiplicative constant is proved.

Розглянуто випадкові поля, які мають „покоординатну" марковську властивість. Введено поняття ексцесивної функції, потенціалу та неперервного адитивного функціоналу (НАФ). Сформульовано достатні умови існування та доведено єдиність з точністю до мультиплікативної сталої локального часу як НАФ спеціального вигляду.

В настоящей статье рассматриваются случайные поля, т. е. случайные функции, индексированные параметром $t = (t_1, t_2) \in R_+^2$, причем на R_+^2 задано обычное отношение частичного порядка.

Пусть $(E, \mathcal{E})$ — измеримое пространство, $\Delta \overline{\in} E$, $E_\Delta = E \cup \{\Delta\}$, $\mathcal{E}_\Delta$ — σ-алгебра на E_Δ, порожденная $\mathcal{E}$ и $\{\Delta\}$. Рассмотрим семейство вероятностных мер P^x, $x \in E$, на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F})$, а также семейство σ-алгебр $\{\mathfrak{F}_t,\ t \in R_+^2\}$, удовлетворяющих условиям Каироли и Уолша $(F1)-(F4)$ [1]. Пусть также $\{\theta_t, t \in R_+^2\}$ — семейство сдвигов, $\theta_t \colon \Omega \to \Omega$, $\theta_t = \theta_{t_1}^1 * \theta_{t_2}^2 = \theta_{t_2}^2 * \theta_{t_1}^1$, причем $\theta_\infty^i(\omega) = \omega_\Delta$, где ω_Δ — исключительная точка Ω. Введем в рассмотрение случайное поле $x_t \colon \Omega \to E_\Delta$, согласованное с потоком $\mathfrak{F}_t$, постоянное на осях и такое, что $\{x_s = \Delta \Rightarrow x_t = \Delta$ для всех $t \geq s\}$, $x_t(\omega) = \Delta$, если $\max(t_1, t_2) = \infty$, $x_0(\omega_\Delta) = \Delta$, где $0 = (0, 0)$. Далее предполагаем, что поле x_t удовлетворяет следующим условиям:

A1) для всех $t \in R_+^2$, $B \in \mathcal{E}$ функция $P^x\{x_t \in B\} \colon E \to [0, 1]$ $\mathcal{E}$-измерима;

A2) $P^\Delta\{x_t \in \Delta,\ t \in \partial R_+^2\} = 1$;

A3) для всех $s, t \in R_+^2$ $x_t \circ \theta_{s_1}^1 = x_{t_1+s_1 t_2}$, $x_t \circ \theta_{s_2}^2 = x_{t_1 t_2+s_2}$;

A4) для всех $x \in E_\Delta$, $B \in \mathcal{E}_\Delta$, $s, t \in R_+^2$

$$P^x\{x_{t_1+s_1 t_2} \in B / \mathfrak{F}_{t_1}^1\} = P^{x_t}\{x_{s_1 t_2} \in B\},$$

$$P^x\{x_{t_1 t_2+s_2} \in B / \mathfrak{F}_{t_2}^2\} = P^{x_t}\{x_{t_1 s_2} \in B\}.$$

Из условия A3 следует $x_t \circ \theta_s = x_{t+s}$.

***Определение* 1.** *Семейство* $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_t, x_t, \theta_t, P^x)$, *удовлетворяющее условиям* A1 – A4, *называется марковским полем.*

Пусть теперь $N_t(x, A) = P^x\{x_t \in A\}$ для $t \in R_+^2$, $x \in E$ и $A \in \mathcal{E}_\Delta$, $P_t(x, A)$ — сужение $N_t(x, A)$ на $(E, \mathcal{E})$. Имеет место двупараметрический вариант уравнений Колмогорова – Чепмена

$$P_{t_1+s_1 t_2}(x, A) = \int_E P_{s_1 t_2}(x, dy) P_t(y, A),$$
$$P_{t_1 t_2+s_2}(x, A) = \int_E P_{t_1 s_2}(x, dy) P_t(y, A). \tag{1}$$

Далее рассматриваются стандартные марковские поля, для которых $P_t(x, E) = 1$, $x \in E$, $t \in R_+^2$.

Теорема 1. *Пусть E — полное метрическое сепарабельное пространство, $\mathcal{E}$ — борелевская σ-алгебра на E, семейство $\{P_t(x, A),\ x \in E,\ t \in R_+^2,\ A \in \mathcal{E}\}$ удовлетворяет условиям:*

A5) *для любых $t \in R_+^2$, $A \in \mathcal{E}$ $P_t(x, A)$ $\mathcal{E}$-измерима по x;*

A6) *для любых $t \in R_+^2$, $x \in E$ $P_t(x, A)$ — вероятностная мера на $(E, \mathcal{E})$;*

A7) *для любых $s, t \in R_+^2$, $x \in E$, $A \in \mathcal{E}$ справедливы уравнения* (1).

Тогда существует стандартное марковское поле x_t на $(E, \mathcal{E})$, переходной вероятностью которого является $P_t(x, A)$, т. е.

$$P^x\{x_t \in A\} = P_t(x, A) \pmod P.$$

Доказательство. Положим $\Omega = (E)^{R_+^2}$, $\mathfrak{F} = (\mathcal{E})^{R_+^2}$; зафиксируем $n \in N$, рассмотрим множество $B(n, n) \in (R)^{n^2}$ и совокупность точек $\{(s_i, t_j),\ i, j = \overline{1, n}\}$ такую, что $0 \le s_1 \le \ldots \le s_n$, $0 \le t_1 \le \ldots \le t_n$.

Пусть теперь

$$P_x((s_i, t_j),\ i, j = \overline{1, n} \mid B(n, n)) =$$

$$= \int\limits_{E^{n^2}} I_{B(n,n)}(x_{11}, \ldots, x_{nn}) P_{s_1 t_1}(x, dx_{11}) \prod_{i=1}^{n-1} P_{s_{i+1} - s_i t_1}(x_{i1}, dx_{i+11}) \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{n-1} P_{s_1 t_{j+1} - t_j}(x_{nj}, dx_{1j+1}) \prod_{i,j=1}^{n-1} P_{s_{i+1} - s_i t_{j+1} - t_j}(x_{ij+1}, dx_{i+1j+1}). \tag{2}$$

Заметим, что в силу уравнений (1)

$$P_x((s_i, t_j),\ i, j = \overline{1, n} \mid B(n, n)) =$$

$$= \int\limits_{E^{n^2}} I_{B(n,n)}(x_{11}, \ldots, x_{nn}) P_{s_1 t_1}(x, dx_{11}) \prod_{j=1}^{n-1} P_{s_1 t_{j+1} - t_j}(x_{1j}, dx_{1j+1}) \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{n-1} P_{t_1 s_{i+1} - s_i}(x_{in}, dx_{i+11}) \prod_{i,j=1}^{n-1} P_{s_{i+1} - s_i t_{j+1} - t_j}(x_{i+1j}, dx_{i+1j+1}). \tag{3}$$

Пусть $\tilde{B}(n, n+1) = B(n, n) \times E^n$. Тогда, используя соотношение (2), получаем

$$P_x((s_i, t_j),\ i = \overline{1, n},\ j = \overline{1, n+1} \mid \tilde{B}(n, n+1)) =$$

$$= \int\limits_{E^{n^2}} I_{B(n,n)}(x_{11}, \ldots, x_{nn}) P_{s_1 t_1}(x, dx_{11}) \prod_{i=1}^{n-1} P_{s_{i+1} - s_i t_1}(x_{i1}, dx_{i+11}) \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{n-1} P_{s_1 t_{j+1} - t_j}(x_{nj}, dx_{1j+1}) \prod_{i,j=1}^{n-1} P_{s_{i+1} - s_i t_{j+1} - t_j}(x_{ij+1}, dx_{i+1j+1}) \times$$

$$\times \int\limits_{E^n} P_{s_1 t_{n+1} - t_n}(x_{nn}, dx_{1n+1}) \prod_{i=1}^{n-1} P_{s_{i+1} - s_i t_{n+1} - t_n}(x_{in+1}, dx_{i+1n+1}) =$$

$$= P_x((s_i, t_j),\ i, j = \overline{1, n} \mid B(n, n)).$$

Аналогично, используя (3), находим

$$P_x((s_i, t_j),\ i = \overline{1, n+1},\ j = \overline{1, n} \mid \tilde{B}(n, n+1)) =$$
$$= P_x((s_i, t_j),\ i, j = \overline{1, n} \mid B(n, n)),$$

т. е. выполняется первое условие согласованности. Если $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_1 \times \mathfrak{J}_2$ — некоторая инверсия параметров s_i и t_j, $\mathfrak{J}B(n, n)$ — соответствующая инверсия компонент $B(n, n)$, то полагаем

$$P_x(\mathfrak{J}(s_i, t_j),\ i, j = \overline{1, n} \mid \mathfrak{J}B(n, n)) = P_x((s_i, t_j),\ i, j = \overline{1, n} \mid B(n, n)).$$

Тогда выполняется второе условие согласованности. В силу теоремы Колмогорова семейство $\{P_x((s_i, t_j),\ i, j = \overline{1,n})\}$ допускает представление $\{x_t,\ t \in \in R_+^2\}$ на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F})$. Полагая в (2) $B(n, n) = = B(n, 1) \times E^{n^2 - n}$, получаем

$$P_x((s_i, t_1),\ i = \overline{1, n} \mid B(n, 1)) =$$
$$= \int\limits_{E^n} I_{B(n,1)}(x_{11}, \ldots, x_{n1}) P_{s_1 t_1}(x, dx_{11}) \prod_{i=1}^{n-1} P_{s_{i+1} - s_i t_1}(x_{i1}, dx_{i+11}). \tag{4}$$

Аналогично,

$$P_x((s_1, t_j),\ j = \overline{1, n} \mid B(1, n)) =$$
$$= \int\limits_{E^n} I_{B(1,n)}(x_{11}, \ldots, x_{1n}) P_{s_1 t_1}(x, dx_{11}) \prod_{j=1}^{n-1} P_{s_1 t_{j+1} - t_j}(x_{1j}, dx_{1j+1}). \tag{5}$$

В силу (1) и (4) поле x_t при фиксированном t_2 как процесс по t_1 имеет семейство распределений, построенное по марковскому семейству стохастических ядер $P_{\cdot t_1}(x, A)$. В силу, например, теоремы 5 § 3 гл. 1 [2], x_t — марковский процесс по t_1. Аналогично, в силу (1) и (5) x_t — марковский процесс по t_2 при фиксированном t_1. Очевидно, $P_t(x, A)$ — переходная вероятность x_t.

Рассмотрим полугруппу операторов, связанную с марковским полем. Обозначим через $\mathfrak{B}$ пространство ограниченных борелевских функций $f\colon E \to R$. Для $f \in \mathfrak{B}$ положим

$$T_t f(x) = \int\limits_E f(y) P_t(x, dy) = E^x f(x_t). \tag{6}$$

Тогда в силу условия А4

$$T_{t_1 + s_1 t_2} f(x) = T_t T_{s_1 t_2} f(x),$$
$$T_{t_1 t_2 + s_2} f(x) = T_t T_{t_1 s_2} f(x).$$

Аналогично однопараметрическим полугруппам можно показать, что в случае, когда $(E, \mathcal{E})$ — компакт с σ-алгеброй борелевских множеств, существует семейство функций $\{P_t(x, A),\ t \in R_+^2,\ x \in E,\ A \in \mathcal{E}\}$, удовлетворяющее условиям А5 – А7, причем выполняются соотношения (6).

Определение 2. *Неотрицательная функция* $f \in \mathfrak{B}$ *называется* α*-эксцессивной для* $\alpha \geq 0$, *если* $\forall\, t \in R_+^2,\ x \in E$ $\ e^{-\alpha t_1 - \alpha t_2} T_t f(x) \leq f(x)$.

Определение 3. *Случайное поле* $\{B_t,\ t \in R_+^2\}$ *называется неубывающим, если*

$$B\,]\,s,t\,] = B_t - B_{s_1 t_2} - B_{t_1 s_2} + B_s \geq 0$$

п. н. для всех $s, t \in R_+^2$, $s \leq t$.

Далее рассматриваются такие неубывающие поля, что $B_t = \lim_{s \downarrow t} B_s$ п. н. Согласно [3] такое поле допускает модификацию, траектории которой п. н. являются неубывающими функциями, имеющими пределы во всех четырех квадрантах и непрерывными „сверху".

Если поле B неубывающее, то интеграл $\int_{R_+^2} e^{-\alpha t_1 - \alpha t_2} dB_t \in \overline{R}$ определен для любого $\alpha \geq 0$.

Определение 4. *Функция*

$$u_B^\alpha(x) = E^x \int\limits_{R_+^2} e^{-\alpha t_1 - \alpha t_2} dB_t$$

называется α*-потенциалом неубывающего поля* B.

Определение 5. *Непрерывным аддитивным функционалом* (*НАФ*), *связанным с полем* x, *называется такое непрерывное неубывающее поле* $A = \{A_t, \mathfrak{F}_t, t \in R_+^2\}$, *что*

$$A_{0 t_2} = A_{t_1 0} = 0 \quad \forall\ t_1, t_2 \geq 0,$$

и

$$A_{t+s} = A_t + A_s \circ \theta_t + A_{t_1 s_2} \circ \theta_{t_2}^2 + A_{s_1 t_2} \circ \theta_{t_1}^1.$$

Лемма 1. *Пусть* Y *— ограниченная случайная величина,* $\varphi(x) = E^x Y$. *Тогда для любого* $t \in R_+^2$ $T_t \varphi(x) = \varphi(x)$.

Доказательство. Справедливы следующие соотношения: $T_t \varphi(x) = E^x \varphi(x_t) = E^x E^{x_t} Y$. При этом из условий А3 и А4 для любого $x \in E$

$$E^{x_t} Y = E^x \{ Y \circ \theta_{t_1}^1 \mid \mathfrak{F}_t \} = E^x \{ Y \circ \theta_{t_2}^2 \mid \mathfrak{F}_t \}.$$

Поэтому

$$E^x E^{x_t} Y = E^x \{ Y \circ \theta_{t_1}^1 \} = E^x \{ Y \circ \theta_{t_2}^2 \}.$$

Последнее равенство означает, что $T_t \varphi(x)$ не зависит ни от t_1, ни от t_2. Поэтому в правой части равенства $T_t \varphi(x) = E^x \{ Y \circ \theta_{t_1}^1 \}$ можно перейти к пределу при $t_1 \downarrow 0$. В результате получим $T_t \varphi(x) = E^x \{ Y \circ \theta_{t_1}^1 \}$.

Теорема 2. *Пусть* $Y \geq 0$ *— ограниченная случайная величина,* $\varphi(x) = E^x Y$. *Тогда*:

1) *функция* $\varphi(x)$ α*-эксцессивна для любого* $\alpha \geq 0$;

2) *для любого* $\alpha \geq 0$ *существует НАФ* B^α *такой, что* $\varphi(x) = u_{B^\alpha}^\alpha(x)$.

Доказательство. 1. α-эксцессивность непосредственно следует из леммы 1:

$$e^{-\alpha t_1 - \alpha t_2} T_t \varphi(x) \leq e^{-\alpha t_1 - \alpha t_2} \varphi(x) \leq \varphi(x)$$

для любых $\alpha \geq 0$, $t \in R_+^2$, $x \in E$.

2. Используя лемму 1, представим $\varphi(x)$ в виде

$$\varphi(x) = \alpha^2 E^x \int\limits_{R_+^2} e^{-\alpha s_1 - \alpha s_2} E^{x_v} Y \, ds. \tag{7}$$

Полагая $B_t^\alpha = \alpha^2 \int_{[0,t]} e^{x_v} Y dv = \int_{[0,t]} g_\alpha(x_v) dv$, где $g_\alpha(x_v) = \alpha^2 E^{x_v} Y$, получаем

$$B_{t+s}^\alpha = \int\limits_{[0,t+s]} g_\alpha(x_v)\,dv = \int\limits_{[0,t]} g_\alpha(x_v)\,dv +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t_1+s_1}\int\limits_0^{t_2} g_\alpha(x_v)\,dv + \int\limits_0^{t_1}\int\limits_{t_2}^{t_2+s_2} g_\alpha(x_v)\,dv + \int\limits_{t_1}^{t_1+s_1}\int\limits_{t_2}^{t_2+s_2} g_\alpha(x_v)\,dv =$$

$$= B_t^\alpha + \int\limits_0^{s_1}\int\limits_0^{t_2} g_\alpha(x_v\circ\theta_{t_1}^1)\,dv + \int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^{s_2} g_\alpha(x_v\circ\theta_{t_2}^2)\,dv + \int\limits_{[0,s]} g_\alpha(x_v\circ\theta_t)dv =$$

$$= B_t^\alpha + B_{s_1 t_2}^\alpha\circ\theta_{t_1}^1 + B_{t_1 s_2}^\alpha\circ\theta_{t_2}^2 + B_s^\alpha\circ\theta_t.$$

Очевидно, $B_{0t_2}^\alpha = B_{t_1 0}^\alpha = 0$, $B^\alpha\,]s,t] \ge 0$, B^α — непрерывное неубывающее поле. Следовательно, B^α — НАФ, и из (7) $\varphi(x) = u_{B^\alpha}^\alpha(x)$.

Определение 6. *Марковское поле x называется нормальным, если для любого $x\in E$ $\{x\}\in \mathcal{E}$ и $P^x\{x_t = x,\ t\in\partial R_+^2\} = 1$.*

Далее рассматриваются нормальные марковские поля. Для них справедлив закон „нуля и единицы", т. е. для любого события $A\in \mathfrak{F}_0^*$ $P^x(A)$ равно либо 0, либо 1, где

$$\mathfrak{F}_0^* = \Big(\bigvee_{t_1\ge 0}\mathfrak{F}_{t_1 0}\Big) \vee \Big(\bigvee_{t_2\ge 0}\mathfrak{F}_{0 t_2}\Big).$$

Определение 7. *Марковское поле x называется строго марковским, если $\{x_{t_1\cdot},\ t_1\ge 0\}$ и $\{x_{\cdot t_2},\ t_2\ge 0\}$ — строго марковские процессы для любого $t_2\ge 0$ и $t_1\ge 0$ соответственно.*

Пусть A — НАФ, связанный с марковским полем x. Зафиксируем $t_2\ge 0$ и рассмотрим однопараметрический НАФ $\tilde{A}_{t_1} = A_{t_1(t_2)}$. Обозначим $T_1(t_2) = \inf\{t_1:\ \tilde{A}_{t_1} = 1\}$, $(\operatorname{supp} A)_{t_2} = \{x\in E:\ E^x\exp\{-T_1(t_2)\} = 1\}$. Аналогично можно ввести множество $(\operatorname{supp} A)_{t_1}$. Положим

$$i\text{-}\operatorname{supp} A = \bigcup_{t_j>0}(\operatorname{supp} A)_{t_j},\quad i = 1, 2.$$

Пусть множество $B\in\mathcal{E}$,

$$(B)_{t_2}^r = \{x\in E:\ P^x\{\inf\{t_1>0:\ x_t\in B\} = 0\} = 1\};$$

$$(B)_{t_1}^r = \{x\in E:\ P^x\{\inf\{t_2>0:\ x_t\in B\} = 0\} = 1\},$$

$$i\text{-}B^r = \bigcup_{t_j>0}(B)_{t_j}^r,\quad i = 1, 2.$$

Лемма 2. *Пусть x — строго марковское поле. Тогда $i\text{-}\operatorname{supp} A\subset i\text{-}(i\text{-}\operatorname{supp} A)$, $i = 1, 2$.*

Доказательство. Пусть $i = 1$, $x\in 1\text{-}\operatorname{supp} A$. Тогда существует t_2^0 такое, что $x\in(\operatorname{supp} A)_{t_2^0}$. Согласно теореме 3.5 гл. 5 [4],

$$(\operatorname{supp} A)_{t_2^0} \subset \left((\operatorname{supp} A)_{t_2^0} \right)^r,$$

т. е.

$$P^x \left\{ \inf \left\{ t_1 > 0 : x_{t_1 t_2^0} \in (\operatorname{supp} A)_{t_2^0} \right\} = 0 \right\} = 1.$$

Тем более,

$$P^x \left\{ \inf \left\{ t_1 > 0 : x_{t_1 t_2^0} \in 1\text{-}\operatorname{supp} A \right\} = 0 \right\} = 1,$$

и, значит, $x \in (1\text{-}\operatorname{supp} A)^r_{t_2^0}$, следовательно, $x \in 1\text{-}(1\text{-}\operatorname{supp} A)^r$. Случай $i = 2$ рассматривается аналогично.

Лемма 3. *Пусть* A — *НАФ*, $i\text{-}\operatorname{supp} A = \varnothing$, $i = 1$ *либо* $i = 2$. *Тогда* $A = 0$.

Доказательство. Если, например, $1\text{-}\operatorname{supp} A = \varnothing$, то для любого $t_2 > 0$ $(\operatorname{supp} A)_{t_2} = \varnothing$. В этом случае из теоремы 3.5 гл. 5 [4] $A_{t_1(t_2)} = 0$ для всех $t_1 \geq 0$. Но поскольку поле A неубывающее, то $A = 0$.

Определение 8. *Локальным временем марковского поля* x_t *в точке* $\{x_0\}$ *называется такой НАФ* A^{x_0}, *что* $i\text{-}\operatorname{supp} A^{x_0} = \{x_0\}$, $i = 1, 2$.

Теорема 3. *Локальное время строго марковского поля* x_t *в точке* $\{x_0\}$ *существует тогда и только тогда, когда* $\{x_0\} \subset i\text{-}\{x_0\}^r$, $i = 1, 2$.

Доказательство. *Необходимость.* Если существует НАФ A^{x_0} такой, что $i\text{-}\operatorname{supp} A^{x_0} = \{x_0\}$, $i = 1, 2$, то согласно лемме 2 $\{x_0\} \subset i\text{-}\{x_0\}^r$, $i = 1, 2$.

Достаточность. Пусть $\{x_0\} \subset i\text{-}\{x_0\}^r$, $i = 1, 2$. Тогда существуют t_1^0 и t_2^0 такие, что $\{x_0\} \subset \{x_0\}^r_{t_i^0}$, $i = 1, 2$, т. е.

$$P^{x_0} \{ \inf \{ t_1 > 0 : x_{t_1 t_2^0} = x_0 \} = 0 \} = 1$$

и

$$P^{x_0} \{ \inf \{ t_2 > 0 : x_{t_1^0 t_2} = x_0 \} = 0 \} = 1.$$

Обозначим

$$T_1(t_2^0) = \inf \{ t_1 > 0 : x_{t_1 t_2^0} = x_0 \},$$

$$T_2(t_1^0) = \inf \{ t_2 > 0 : x_{t_1^0 t_2} = x_0 \}.$$

Тогда

$$E^{x_0} \exp \left\{ -T_1(t_2^0) - T_2(t_1^0) \right\} = 1.$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = E^x \exp \left\{ -T_1(t_2^0) - T_2(t_1^0) \right\}.$$

Согласно теореме 2 существует НАФ A такой, что $\varphi(x) = E^x \int_{R_+^2} e^{-s_1 - s_2} dA_s$, причем $\varphi(x_0) = 1$. Кроме того, $x_{T_1(t_2^0) t_2^0} = x_0$ на множестве $\left\{ T_1(t_2^0) < \infty \right\}$. Поэтому, а также в силу строго марковского свойства x_t при

$$Q = E^x \int_{T_1(t_0^2)}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-s_1 - s_2} dA_s$$

справедливы равенства

$$E^x \int_{R_+^2} e^{-s_1-s_2} dA_s = \varphi(x) = \varphi(x)\,\varphi(x_0) =$$

$$= E^x \exp\left\{-T_1\left(t_2^0\right) - T_2\left(t_1^0\right)\right\} e^{x_{T_1(t_2^0)t_2^0}} \int_{R_+^2} e^{-s_1-s_2} dA_s =$$

$$= E^x \exp\left\{-T_1\left(t_2^0\right) - T_2\left(t_1^0\right)\right\} E^x \left\{ \int_{R_+^2} e^{-s_1-s_2} dA_s \circ \theta^1_{T_1(t_2^0)} \mid \mathfrak{F}_{T_1(t_2^0)t_2^0} \right\} =$$

$$= E^x \exp\left\{-T_1\left(t_2^0\right) - T_2\left(t_1^0\right)\right\} \exp\left\{T_1\left(t_2^0\right)\right\} \times$$

$$\times E^x \left\{ \int_{T_1(t_2^0)}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-s_1-s_2} dA_s \mid \mathfrak{F}_{T_1(t_2^0)t_2^0} \right\} \le Q. \qquad (8)$$

Пусть $x \neq x_0$. Тогда для любого $t_2 > 0$ $P^x\left\{T_1\left(t_2^0\right) > 0\right\} = 1$. Из (8) следует

$$P^x \left\{ \int_0^{T_1(t_2^0)} \int_0^{\infty} e^{-s_1-s_2} dA_s = 0 \right\} = 1,$$

т. е.

$$P^x\left\{A_{T_1(t_2^0)\infty} = 0\right\} = 1.$$

Аналогично,

$$P^x\left\{A_{\infty T_2(t_1^0)} = 0\right\} = 1.$$

Таким образом, $x \,\overline{\in}\, i\text{-supp}\,A$, $i = 1, 2$. Но $A \neq 0$, поскольку $E^{x_0} \int_{R_+^2} e^{s_1-s_2} dA_s = 1$, и, значит, в силу леммы 3 $i\text{-supp}\,A \neq 0$, $i = 1, 2$. Итак $i\text{-supp}\,A = \{x_0\}$, $i = 1, 2$. Теорема доказана.

Пусть A — НАФ. Обозначим $u_A^1(f)(x) = E^x \int_{R_+^2} e^{-s_1-s_2} f(x_s)\,dA_s$, $(fA)_t = \int_{[0,t]} f(x_s)\,dA_s$.

Лемма 4. *Пусть* $A_t = \int_{[0,t]} a(x_s)\,ds$ *и* $B_t = \int_{[0,t]} b(x_s)\,ds$ *— НАФ, причем соотношение* $u_B^1(f)(x) = 0$ *влечет* $u_A^1(f)(x) = 0$ *для любой* $\mathcal{E}$*-измеримой неотрицательной функции* $f \in \mathfrak{B}$.

Тогда существует функция $g \ge 0$ *такая, что* $A = gB$.

Доказательство. Пусть $I_s = I\{b(x_s) = 0\}$. Тогда

$$E^x \int_{R_+^2} e^{-s_1-s_2} I_s\, b(x_s)\,ds = 0,$$

и согласно условию леммы $E^x \int_{R_+^2} e^{-s_1-s_2} I_s\, a(x_s)\,ds = 0$, откуда $I_s\, a(x_s) = 0$.

Положим $g(x_s) = a(x_s) b^{-1}(x_s) I\{b(x_s) \neq 0\}$. Тогда, очевидно, $A_t = \int_{[0,t]} g(x_s)\,dB_s$, и лемма доказана.

Теорема 4. *Пусть* B *— любое локальное время строго марковского поля* x *в точке* $\{x_0\}$, $B_t = \int_{[0,t]} b(x_s)\,ds$.

Тогда существует $k > 0$ *такое, что* $B = kA^{x_0}$.

Доказательство. Пусть g — такая неотрицательная $\mathcal{E}$-измеримая функция, что

$$E^x \int_{R_+^2} e^{-s_1-s_2} g(x_s)dA_s = 0.$$

Поскольку

$$A_t^{x_0} = \int_{[0,t]} E^{x_s} e^{-T_1(t_2^0)-T_2(t_1^0)}\, ds$$

и

$$E^x \exp\left\{-T_1\left(t_2^0\right) - T_2\left(t_1^0\right)\right\} = 1,$$

то

$$g(x_0)E^x \int_{R_+^2} e^{-s_1-s_2} I\{x_s = x_0\}\, ds = 0.$$

Согласно условию $i\text{-supp}\, B = \{x_0\}$, $i = 1, 2$. Рассмотрим однопараметрический НАФ (при фиксированном $t_2 > 0$)

$$\tilde{B}_{t_1} = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} b(x_s)ds.$$

Согласно определению $1\text{-supp}\, B$, $(\text{supp}\, \tilde{B})_{t_1}$ либо пуст, либо равен $\{x_0\}$. В первом случае $\tilde{B} = 0$, во втором, согласно предложению 3.7 гл. 5 [4], существует $\varepsilon = \varepsilon(\omega, t_1) > 0$ такое, что

$$\int_{t_1}^{t_1+\varepsilon}\int_0^{t_2} b(x_s)ds\, I\{x_t \neq x_0\} = 0,$$

откуда

$$\int_{t_1}^{t_1'}\int_0^{t_2} b(x_s)I\{x_s \neq x_0\}\, ds = 0, \quad t_1' > t_1.$$

Следовательно,

$$E^x \int_{R_+^2} e^{-s_1-s_2} g(x_s)dB_s = E^x \int_{R_+^2} e^{-s_1-s_2} g(x_s)b(x_s)I\{x_s \neq x_0\}\, ds = 0.$$

В силу леммы 4 $B = hA$, т. е.

$$B_t = \int_{[0,t]} h(x_s)dA_s = \int_{[0,t]} h(x_s)a(x_s)I\{x_s = x_0\}\, ds =$$

$$= h(x_0) \int_{[0,t]} a(x_s)I\{x_s = x_0\}\, ds = h(x_0)A_t.$$

Полагая $k = h(x_0)$, завершаем доказательство.

1. *Cairoli R., Walsh J. B.* Stochastic integrals in the plane // Acta math. – 1975. – **134**, № 1 – 2. – P. 111 – 183.
2. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов: В 3-х т. – М.: Наука, 1973. – Т. 2. – 640 с.
3. *Mazziotto G., Merzbach E., Szpirglas J.* Discontinuités des processus croissants et martingales à variation intégrable // Lect. Notes Math. – 1981. – **863**. – P. 59 – 83.
4. *Blumental R. M., Getoor R. K.* Markov processes and potential theory. – New York: Acad. press, 1968. – 312 p.

Получено 29.01.93