УДК 517.98

Ю. В. Томилов, студ. (Киев. ун-т)

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ НЕКОТОРЫХ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ РЕКУРРЕНТНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Under certain conditions imposed on an operator B, we obtain criteria of boundedness of sequences $x_{n+1} = Ax_n + Bb_n$, $n \geq 0$, for any x_0 and bounded $\{b_n, n \geq 0\}$ in infinite-dimensional spaces. The results are given in terms of spectral properties of the operator A.

При деяких умовах на оператор B одержані критерії обмеженості послідовностей вигляду $x_{n+1} = Ax_n + Bb_n$, $n \geq 0$, для будь-яких x_0 і обмеженої $\{b_n, n \geq 0\}$ у нескінченновимірних просторах. Результати формулюються в термінах спектральних властивостей оператора A.

Настоящая статья посвящена исследованию асимптотического поведения рекуррентных последовательностей вида

$$x_{n+1} = Ax_n + Bb_n, \quad n \geq 0, \tag{1}$$

A и B — фиксированные линейные ограниченные операторы, в абстрактных бесконечномерных пространствах. Последовательности вида (1) являются классическим объектом изучения математической теории управления, современные задачи которой предполагают рассмотрение бесконечномерного случая. Предложенный в работе метод — переход в алгебру Калкина — позволяет при некоторых, достаточно общих, предположениях относительно оператора B полностью описать в терминах геометрической структуры спектра A такой тип поведения $\{x_n, n \geq 0\}$, как ограниченность для любых x_0 и ограниченной последовательности $\{b_n, n \geq 0\}$. Метод плодотворен и при изучении соответствующих (1) бесконечномерных дифференциальных уравнений. Случай $B = I$ рассмотрен, например, в [1].

1. Пусть H — комплексное бесконечномерное гильбертово пространство, E — комплексное банахово пространство, $\mathcal{L}(E)$ — банахово пространство линейных ограниченных операторов из E в E, $K(E)$ — идеал компактных операторов в $\mathcal{L}(E)$. Для некоторого линейного ограниченного оператора T: $\sigma(T)$ — его спектр, $\sigma_p(T)$ и $\sigma_F(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda I$ не есть фредгольмов$\}$ — точечный и фредгольмов спектры соответственно, $r(T)$, $r_F(T)$ — спектральный и фредгольмов спектральный радиусы, $R(T)$ — образ.

Докажем предварительно несколько лемм. Будем предполагать в леммах 1–4, что последовательность $\{x_n, n \geq 0\} \subset E$, заданная (1), ограничена при любых x_0 и ограниченной последовательности $\{b_n, n \geq 0\}$ из E.

Лемма 1. *Для любых y_0 и ограниченной последовательности $\{c_n, n \geq 0\}$ из E последовательность $\{y_n, n \geq 0\} \subset E$, определенная соотношением*

$$y_{n+1} = \lambda A y_n + Bc_n, \quad n \geq 0, \quad |\lambda| = 1,$$

ограничена в E.

Доказательство следует из равенства $y_n = \lambda^n x_n$, $n \geq 0$ для $\{x_n, n \geq 0\}$ с $x_0 = y_0$, $b_n = \overline{\lambda^n} Bc_n$ в (1).

Лемма 2. *Для любых $X_0 \in \mathcal{L}(E)$ и ограниченной последовательности*

$\{B_n, n \geq 0\} \subset \mathcal{L}(E)$ последовательность $\{X_n, n \geq 0\} \subset \mathcal{L}(E)$, определенная соотношением

$$X_{n+1} = AX_n + BB_n, \quad n \geq 0, \tag{2}$$

ограничена в $\mathcal{L}(E)$.

Доказательство. Пусть X_0 и $\{B_n, n \geq 0\}$ в (2) фиксированы. Для любого α из E рассмотрим последовательность $\{x_n = X_n\alpha, n \geq 0\}$. Она удовлетворяет (1) для $\{b_n = B_n\alpha, n \geq 0\}$ и $x_0 = X_0\alpha$. В соответствии с предположением $\{x_n, n \geq 0\}$ ограничена при любых $\alpha \in E$. Тогда по принципу равномерной ограниченности $\sup\limits_{n \geq 0} \| X_n \| < +\infty$.

Лемма 3. *Пусть $R(B) = E$. Тогда $r(A) < 1$.*

Доказательство. Отметим, прежде всего, что $r(A) \leq 1$. Действительно, положив в (1) $b_n = 0$, $n \geq 0$, $x_0 = x$ — произвольный элемент, и применив принцип равномерной ограниченности к семейству операторов $\{A^n, n \geq 0\}$, получим, что

$$\sup_{n \geq 0} \| A^n \| < +\infty,$$

откуда $r(A) \leq 1$.

Пусть теперь $r(A) = 1$. Согласно лемме 1, не ограничивая общности рассуждений, будем считать $1 \in \sigma(A)$. Тогда, с одной стороны, положив $x_0 = 0$, $b_n = b$, $n \geq 0$, b — произвольный элемент, с учетом $R(B) = E$ и принципа равномерной ограниченности, имеем

$$\sup_{n \geq 0} \left\| \sum_{k=0}^{n} A^k \right\| < +\infty,$$

а с другой —

$$\sup_{n \geq 0} \left\| \sum_{k=0}^{n} A^k \right\| \geq \sup_{n \geq 0} \sup_{\lambda \in \sigma(A)} \left| \sum_{k=0}^{n} \lambda^k \right| = +\infty;$$

получено противоречие.

Лемма 4. *Пусть $AB = BA$. Для любых y_0 и ограниченной последовательности $\{c_n, n \geq 0\}$ из E^* последовательность $\{y_n, n \geq 0\} \subset E^*$, определенная соотношением*

$$y_{n+1} = A^* y_n + B^{*2} c_n, \quad n \geq 0, \tag{3}$$

ограничена в E^*.

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 3 получаем

$$\sup_{n \geq 0} \| A^n \| = \sup_{n \geq 0} \| A^{*n} \| < +\infty.$$

Тогда, положив в (1) $x_0 = 0$, $b_n = A^n x$, $n \geq 0$, x — произвольный элемент из X, получим, что последовательность

$$X_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} A^k B\, b_{n-k} = (n+1) A^n B x, \quad n \geq 0,$$

ограничена в E. В этом случае, положив в (1) $x_0 = 0$, $b_n = (n+1)A^n Bx$, $n \geq 0$, x — произвольный элемент из X, заключаем, что последовательность

$$X_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} A^n B^2, \quad n \geq 0,$$

также ограничена в E. По принципу равномерной ограниченности, примененному к семейству операторов $\{((n+1)(n+2)/2)A^n B^2\}$, $\exists\ C \geq 0$: $\|((n+1)(n+2)/2)A^n B^2\| \leq C$, $n \geq 0$, откуда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|A^n B^2\| < +\infty,$$

или, так как A и B коммутируют,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|A^{*n} B^{*2}\| < +\infty.$$

Таким образом, для последовательности $\{y_n, n \geq 0\}$, заданной (3), будем иметь

$$\|y_n\| = \|A^{*n} y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} A^{*k} B^{*2} c_{n-1-k}\| \leq$$

$$\leq \sup_{n \geq 0} \|A^{*n}\| \|y_0\| + \sum_{n=0}^{\infty} \|A^{*n} B^{*2}\| \sup_{n \geq 0} \|c_n\|, \quad n \geq 1.$$

Лемма 5. *Для* $T \in \mathcal{L}(E)$ *с* $r_F(T) < r(T)$ *существуют подпространства* E_0, E_1, *инвариантные относительно* T, *такие, что:*

1) $E = E_0 \oplus E_1$, E_1 *конечномерно;*

2) $r(T|_{E_0}) < r(T)$ *и* $\sigma(T|_{E_1}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = r(T)\}$.

Доказательство леммы 5 следует из доказательства теоремы в [2, с. 64].

2. Перейдем к доказательству основного утверждения.

Теорема 1. *Пусть* $\operatorname{codim} R(B) < +\infty$. *Для того чтобы последовательность* $\{x_n, n \geq 0\} \subset H$ *определяемая* (1), *была ограниченной для любых* $x_0 \in H$ *и ограниченной последовательности* $\{b_n, n \geq 0\} \subset H$, *необходимо и достаточно, чтобы существовали подпространства* $\{H_0, H_1\} \subset H$, *инвариантные относительно* A, *такие, что:*

1. $H = H_0 \oplus H_1$, H_1 *конечномерно;*

2. *а)* $r(A|_{H_0}) < 1$; *б)* $R(B) \subset H_0$;

3. *если* $H_1 \neq \{0\}$, *то* $\sigma(A|_{H_1}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$, *причем оператор* $A|_{H_1}$ *имеет диагональную жорданову форму.*

Если дополнительно $AB = BA$, *то условия* 1–3 *необходимы и достаточны и в случае, когда* $R(B)$ *замкнуто,* $\dim \operatorname{Ker}(B) < +\infty$.

Доказательство. *Необходимость.* Так же, как и в доказательстве леммы 3, получаем, что $r(A) \leq 1$. Далее, согласно лемме 2 последовательность $\{X_n, n \geq 0\} \subset \mathcal{L}(H)$, заданная соотношением (2), ограничена в $\mathcal{L}(H)$ для любых $X_0 \in \mathcal{L}(H)$ и ограниченной последовательности $\{B_n, n \geq 0\} \subset \mathcal{L}(H)$. Запишем теперь соотношение (2) следующим образом:

$$X_{n+1} = U_A(X_n) + U_B(B_n), \quad n \geq 0, \tag{4}$$

где $\{U_A, U_B\} \subset \mathcal{L}(\mathcal{L}(H))$ определены как

$$U_A(X) := AX, \quad U_B(X) := BX, \quad X \in \mathcal{L}(H).$$

Рассмотрим C^* — алгебру Калкина $\mathcal{A} = \mathcal{L}(H)/K(H)$ с естественной фактор-нормой $\|\hat{X}\|_{\mathcal{A}} = \inf_{K \in K(H)} \|X - K\|$ и единицей $\mathbb{1}$. Так как $K(H)$ инвариантно относительно U_A, U_B, то эти операторы индуцируют в $\mathcal{A}$ фактор-операторы $U_{\hat{A}}: \hat{X} \to \hat{A}\hat{X}$, $U_{\hat{B}}: \hat{X} \to \hat{B}\hat{X}$ соответственно. При этом (4) будет иметь вид

$$\hat{X}_{n+1} = U_{\hat{A}}(\hat{X}_n) + U_{\hat{B}}(\hat{B}_n), \quad n \geq 0. \tag{5}$$

Поскольку фактор-норма в $\mathcal{A}$ мажорируется операторной нормой в $\mathcal{L}(H)$, то последовательность, заданная (5), будет ограничена в $\mathcal{A}$ для любых $\hat{X}_0 \in \mathcal{A}$ и ограниченной последовательности $\{\hat{B}_n, n \geq 0\} \subset \mathcal{A}$. Известно, (см. например, [3, с.150]), что $\sigma_F(A) = \sigma(\hat{A})$, а так как $U_{\hat{A}}$ — оператор умножения в $\mathcal{A}$, то $\sigma(U_{\hat{A}}) = \sigma(\hat{A})$ и потому $\sigma(U_{\hat{A}}) = \sigma_F(A)$. В силу условия, наложенного на B, $\hat{B}$ обратим справа в $\mathcal{A}$, т. е. существует $\hat{C} \in \mathcal{A}$ такой, что $\mathbb{1} = \hat{B}\hat{C}$ [3, с. 50, 200] (здесь используется предположение о пространстве H). Тогда и оператор $U_{\hat{B}}$ имеет правый обратный $U_{\hat{C}}$. Из обратимости $U_{\hat{B}}$ справа следует, что $R(U_{\hat{B}}) = \mathcal{A}$. Отсюда вытекает $r(U_{\hat{A}}) = r_F(A) < 1$ вследствие леммы 3. Будем далее предполагать, что $r_F(A) < r(A)$ (случай $r_F(A) = r(A)$ отвечает варианту $H_1 = \{0\}$). Применив лемму 5 к оператору $\hat{A}$, получим разложение на инвариантные относительно A подпространства: $H = H_0 \oplus H_1$. При этом, так как $r(A) \leq 1$, $r(A|_{H_0}) < 1$,

$$\sigma(A|_{H_1}) = \sigma_p(A|_{H_1}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, |\lambda| = 1\}.$$

Тогда имеем

$$x_n = x_{n0} + x_{n1}, \quad n \geq 0, \tag{6}$$

$$x_{n0} = (A|_{H_0})^n x_{00} + \sum_{k=0}^{n-1} (A|_{H_0})^k B b_{n-1-k}, \tag{7}$$

$$x_{n1} = (A|_{H_1})^n x_{01} + \sum_{k=0}^{n-1} (A|_{H_1})^k B b_{n-1-k}. \tag{8}$$

Поскольку $r(A|_{H_0}) < 1$, то в силу оценки

$$\|(A|_{H_0})^n\| \leq (r(A|_{H_0}) + \varepsilon)^n, \quad r(A|_{H_0}) + \varepsilon < 1, \quad \varepsilon > 0, \tag{9}$$

для достаточно больших n $\{x_{n0}, n \geq 0\}$ ограничена в H для любых x_{00} и ограниченной последовательности $\{b_n, n \geq 0\} \subset H$. Тогда вследствие предположения $\{x_{n1}, n \geq 0\}$ ограничена в H для любых x_{01} и ограниченной последовательности $\{b_n, n \geq 0\}$ из H. Пусть $\sigma(A|_{H_1}) = \{\lambda_i \,|\, 1 \leq i \leq m\}$, $\{P_i \,|\, 1 \leq i \leq m\}$ — проекторы на соответствующие собственные подпространства. Согласно лемме 1 можно считать, что $1 \in \sigma(A|_{H_1})$ и для наперед заданного i_0, $1 \leq i_0 \leq m$: $\operatorname{Ker}(A - I) = \operatorname{Ker}(A - \lambda_{i_0} I)$. Поскольку

$$\sup_{n\geq 0} \| (A|_{H_1})^n \| \leq \sup_{n\geq 0} \| A^n \| < +\infty,$$

то оператор $A|_{H_1}$ имеет диагональную жорданову форму. Отсюда при $x_{01} = 0$, $b_{n1} = b$, $n \geq 1$:

$$x_{n1} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_i^k (Bb)_i = n(Bb)_{i_0} + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq i_0}}^{m} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_i^k \right) (Bb)_i,$$

где $(Bb)_i = P_i B b$. Так как $\lambda_i \neq 1$, $i \neq i_0$, то

$$\exists\, C_i \geq 0: \left| \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_i^k \right| \leq C_i, \quad n \geq 1,$$

и потому

$$\sup_{n\geq 0} \left\| \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_i^k \right) (Bb)_i \right\| \leq \left(\sum_{i=1}^{m} C_i \right) \| Bb \|.$$

Таким образом, необходимо $(Bb)_{i_0} = 0$. В силу произвольности в выборе индекса i_0 и обратимости $A|_{H_1}$ в H_1 получаем $R(B) \subset H_0$.

Рассмотрим теперь случай $AB = BA$ при условии, что $R(B)$ замкнуто, $\dim \operatorname{Ker}(B) < +\infty$. Воспользовавшись леммами 4 и 2, получаем, что последовательность $\{X_n, n \geq 0\} \subset \mathcal{L}(H)$, определенная соотношением

$$X_{n+1} = A^* X_n + B^{*2} B_n, \quad n \geq 0,$$

ограничена в $\mathcal{L}(H)$ для любых X_0 и ограниченной последовательности $\{B_n, n \geq 0\}$ из $\mathcal{L}(H)$, причем $\widehat{B^{*2}}$ имеет правый обратный в $\mathcal{A}$. Дальнейшие рассуждения аналогичны приведенным выше.

Достаточность. Воспользуемся равенствами (6) – (8). Согласно условию 2 а) и оценке (9), как отмечено в доказательстве необходимости, последовательность $\{x_{n0}, n \geq 0\}$ ограничена в H для любых x_{00} и ограниченной последовательности $\{b_n, n \geq 0\}$ из H. Вследствие условия 3 $\sup_{n\geq 0} \| (A|_{H_1})^n \| < +\infty$, а в силу условия 2 б) $A|_{H_1} B = 0$. Таким образом, последовательность $\{x_{n1}, n \geq 0\}$ также ограничена для любых $x_{01} \in H$ и ограниченной последовательности $\{b_n, n \geq 0\} \subset H$.

1. *Бойков И. В., Жечев И. И.* Об устойчивости уравнений в конечных разностях // Исслед. по прикл. математике. – 1975. – № 3. – С. 36 – 53.
2. *Меры* некомпактности и уплотняющие операторы / Р. Р. Ахмеров, М. И. Каменский, А. С. Потапов и др. – Новосибирск: Наука, 1986. – 264 с.
3. *Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. – Кишинев: Штиинца, 1973. – 425 с.

Получено 31.05.93