УДК 517.91

Е. П. Трофимчук, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики НАН Украины, Киев)
А. В. Коваленко, студ. (Киев. ун-т)

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД А. М. САМОЙЛЕНКО БЕЗ ОПРЕДЕЛЯЮЩЕГО УРАВНЕНИЯ*

We propose a modification of A. M. Samoilenko's numerical-analytic method of solution of the problem $dx/dt = f(t,x)$, $\mathfrak{L}(x) = d$ (here, $\mathfrak{L}\colon C([0,T],R^n) \to R^n$ is a linear continuos operator) in which it is not necessary to solve an additional determining equation.

Запропоновано модифікацію чисельно-аналітичного методу А. М. Самойленка дослідження задачі $dx/dt = f(t,x)$, $\mathfrak{L}(x) = d$ (тут $\mathfrak{L}\colon C([0,T],R^n) \to R^n$ – лінійний неперервний оператор), в якому немає необхідності розв'язувати додаткове визначальне рівняння методу.

1. Обоснованию численно-аналитического метода (ЧАМ) А. М. Самойленко для решения различных краевых задач посвящено много работ (более 150 указано в [1]). Содержание каждой из этих статей условно можно разбить на две приблизительно равнозначные части: первая посвящена изучению итерационного процесса метода и вторая — решению определяющего уравнения.

Известно, что ЧАМ допускает множество модификаций. В [2] рассматривалась задача о поиске оптимальной из них для решения конкретной задачи (схема [2] реализовывалась в [3]).

В [4] для решения дифференциального уравнения с интегральным условием была предложена модификация метода, не требующая решения определяющего уравнения. Это значительно упрощает метод (причем условия сходимости итерационного процесса из [4] даже улучшаются по сравнению с вариантом метода, непосредственно базирующемся на схеме [1] (см. также [4]).

В этой работе, продолжающей исследования [4], предложен ЧАМ исследования задачи

$$dx/dt = f(t,x), \qquad \mathfrak{L}(x) = d \tag{1}$$

(где $\mathfrak{L}\colon C([0,T],R^n) \to R^n$ — линейный непрерывный оператор), в котором нет необходимости решать определяющее уравнение. Эта система, в частности, включает в себя многоточечные краевые задачи, изучавшиеся в [1, 5].

2. Основные предположения и результаты. Пусть правая часть (1) удовлетворяет в компактной области $W = [0,T] \times \Omega$ условиям Каратеодори и (покомпонентно) неравенствам

$$|f(t,x)| \le M(t); \quad |f(t,x) - f(t,y)| \le Q(t)|x-y|;$$

таким образом, $M(t)$ — вектор-функции и $Q(t)$ — матрицы-функции с суммируемыми компонентами, а $|x| = (|x_1|, \ldots, |x_n|)$.

Согласно теореме Риса можно указать такую непрерывную слева матричнозначную функцию $\mathcal{G}(t)$ ограниченной вариации, что

$$\mathfrak{L}(x) = \int_0^T d\,\mathcal{G}(u)x(u).$$

Предположим, что $\mathcal{G}(0) = 0$ и матрица $\mathcal{G} = \mathcal{G}(T)$ невырождена ($\mathcal{G}$ легко найти, учитывая, что $\mathcal{G}a = \mathfrak{L}(a)$, $a \in R^n$).

Введем следующие обозначения (max всюду берется покомпонентно):

$$(\mathfrak{B}x)(t) = \int_0^t |\mathcal{G}^{-1}\mathcal{G}(u)|Q(u)x(u)\,du + \int_t^T |E - \mathcal{G}^{-1}\mathcal{G}(u)|Q(u)x(u)\,du,$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного комитета Украины по вопросам науки и технологий.

$$Q = \max_{[0,T]} \left\{ \int_0^t \left| \mathcal{G}^{-1}\mathcal{G}(u) \right| Q(u)du + \int_t^T \left| E - \mathcal{G}^{-1}\mathcal{G}(u) \right| Q(u)du \right\},$$

$$\beta = \max_{[0,T]} \left\{ \int_0^t \left| \mathcal{G}^{-1}\mathcal{G}(u) \right| M(u)\,du + \int_t^T \left| E - \mathcal{G}^{-1}\mathcal{G}(u) \right| M(u)\,du \right\}.$$

(Очевидно, $\mathfrak{B}$ — непрерывный эндоморфизм $C([0,T], R^n.)$

Согласно общей схеме ЧАМ, изложенной в [2], решение (1) ищется среди решений нелинейного интегрального уравнения Гаммерштейна

$$x(t) = \psi(t) + \int_0^T K(t,s) f(s, x(s))\,ds$$

или в краткой форме

$$x = \psi + \mathfrak{K} x, \tag{2}$$

где ядро и свободное слагаемое подобраны так, чтобы решение (2) удовлетворяло функциональному условию из (1).

Предположим, что $K(t,s)$ имеет следующий вид:

$$K(t,s) = \begin{cases} E - \Lambda(t)\Phi(s) & \text{при } 0 \le s \le t \le T, \\ -\Lambda(t)\Phi(s) & \text{при } 0 \le t \le s \le T \end{cases}$$

с ограниченными суммируемыми матричнозначными функциями $\Lambda(t)$ и $\Phi(t)$.

Подействовав $\mathfrak{L}$ на обе части (2) и применив теорему Фубини, получаем

$$d = \int_0^T d\mathcal{G}(u)\psi(u) + \int_0^T d\mathcal{G}(u) \int_0^T K(u,s) f(s,x(s))ds =$$

$$= \int_0^T d\mathcal{G}(u)\psi(u) + \int_0^T \left\{ \mathcal{G} - \mathcal{G}(s) - \left[\int_0^T \left(d\mathcal{G}(t) \right)\Lambda(t) \right] \Phi(s) \right\} f(s, x(s))ds.$$

Пусть матрица в квадратных скобках невырождена и

$$\Phi(s) \stackrel{\text{def}}{=} \left[\int_0^T d\mathcal{G}(t)\Lambda(t) \right]^{-1} (\mathcal{G} - \mathcal{G}(s)),$$

$$\psi(t) \stackrel{\text{def}}{=} x_0 + \Lambda(t) \left[\int_0^T d\mathcal{G}(t)\Lambda(t) \right]^{-1} (d - \mathcal{G}x_0).$$

Ясно, что такой выбор Φ и ψ обеспечит выполнение функционального условия (1) для решений (2). Пусть, например, $\Lambda(t) = E$. Тогда $\Phi(s) = E - \mathcal{G}^{-1}\mathcal{G}(s)$, $\psi(t) = \psi = \mathcal{G}^{-1}d$, а уравнение (2) примет вид

$$x(t) = \mathcal{G}^{-1}d + \int_0^T \left(\mathcal{G}^{-1}\mathcal{G}(s) - E \right) f(s, x(s))ds + \int_0^t f(s, x(s))\,ds \tag{3}$$

и, очевидно, любое его решение будет решением системы (1). При этом прямые подсчеты показывают, что

$$\left| \left(\mathfrak{K}x \right)(t) - \psi \right| \le \beta, \quad \left| \left(\mathfrak{K}x \right)(t) - \left(\mathfrak{K}y \right)(t) \right| \le \left(\mathfrak{B} \left| x(\circ) - y(\circ) \right| \right)(t)$$

для любых функций $x(t)$, $y(t) \in C([0,T], \Omega)$. Теперь применение теоремы Шаудера на $C\left([0,T], U_\beta\left(\mathcal{G}^{-1}d\right)\right)$ и итерационной теоремы из [2] позволяет получить следующее утверждение.

Теорема. *Пусть выполнены сделанные выше предположения и, кроме того:* 1) $\mathcal{G}^{-1}d$ *лежит в* Ω *вместе со своей* β*-окрестностью;* 2) *наибольшее положительное собственное значение оператора* $\mathfrak{B}$ *(равное спектральному радиусу в силу теоремы Крейна – Рутмана) меньше единицы. Тогда последовательность итераций*

$$x_{n+1}(t) = \psi + \mathfrak{R}x_n(t), \quad x_0(t) = \mathcal{G}^{-1}d \tag{4}$$

равномерно сходится к функции $x^*(t)$, *которая является единственным решением задачи* (1) *в области* Ω. *При этом*

$$|x^*(t) - x_m(t)| \le \left(E - \mathfrak{B}\right)^{-1}\mathfrak{B}^m \nu(t), \quad m \ge 0,$$

где

$$\nu(t) = \int_0^t \left|\mathcal{G}^{-1}\mathcal{G}(u)\right| M(u)\,du + \int_t^T \left|E - \mathcal{G}^{-1}\mathcal{G}(u)\right| M(u)\,du.$$

Более того, лишь одно условие 1 *теоремы гарантирует существование хотя бы одного решения системы* (1).

Замечание. Спектральный радиус $\mathfrak{B}$ не превышает наибольшего положительного собственного значения матрицы Q.

В качестве приложения рассмотрим двухточечную краевую задачу

$$dx/dt = f(t,x), \quad Ax(0) + Bx(T) = d. \tag{5}$$

В этом случае $\mathcal{G} = A + B$ и $\mathcal{G}(u) = A$ при $u \in (0,T)$. Пусть $\mathcal{D} = \max\left\{\left|(A+B)^{-1}A\right|, \left|(A+B)^{-1}B\right|\right\}$ (где max берется покомпонентно).

Следствие. *Пусть в* (5) *матрица* $A+B$ *невырождена и вектор* $x_0 = (A+B)^{-1}d$ *лежит в* Ω *вместе со своей* $\beta = \mathcal{D}\int_0^T M(u)\,du$*-окрестностью. Тогда краевая задача* (5) *имеет не менее одного решения. Если к тому же собственные значения матрицы* $\mathcal{D}\int_0^T Q(u)\,du$ *не превышают по модулю единицу, то задача* (5) *в области* Ω *имеет единственное решение, являющееся пределом последовательности итераций*

$$x_m(t) = x_0 + \int_0^t (A+B)^{-1}Af(s, x_{m-1}(s))\,ds - \int_t^T (A+B)^{-1}Bf(s, x_{m-1}(s))\,ds.$$

Это утверждение можно также применять для нахождения T-периодических решений импульсной системы (или системы с „interface conditions") вида

$$dx/dt = f(t,x), \quad Bx(t_i - 0) + Ax(t_i + 0) = d,$$

где $f(t,x) = f(t+T, x)$ $\forall\, t, t_{i+1} = t_i + T$ $\forall\, i$, так как эта периодическая задача сводится к задаче (5).

1. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1992. – 279 с.
2. *Трофимчук Е. П.* Интегральные операторы метода последовательных периодических приближений // Мат.физика и нелинейн. механика. – 1990. –Вып. 13 (47).– С. 31–36.
3. *Трофимчук Е. П.* Итерационные методы исследования дифференциальных систем с особенностями: Автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1992. – 10 с.
4. *Трофимчук Е. П.* Об улучшении оценок сходимости численно-аналитического метода для задачи с интегральными условиями // Аналитические методы исследования нелинейных дифференциальных систем. – Киев: Ин-т математики АН Украины, 1992. – С. 115–119.
5. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. – Киев: Наук. думка, 1986. – 223 с.

Получено 30.09.93