УДК 517.9

Б. В. Базалий, д-р физ.-мат. наук,
А. Ф. Тедеев, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

МЕТОД СИММЕТРИЗАЦИИ И ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ПРИ НЕОГРАНИЧЕННОМ ВОЗРАСТАНИИ ВРЕМЕНИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ В ОБЛАСТЯХ С НЕКОМПАКТНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Initial boundary-value Neumann problem for the porous medium equation in a domain with noncompact boundary was considered. By using symmetrization method, exact L_p-estimates, $1 \le p \le \le \infty$, for solutions for $t \to \infty$ are obtained.

Розглядається початково-крайова задача Неймана для рівняння пористого середовища в області з некомпактною межею. За допомогою методу симетрування одержані точні L_p-оцінки, $1 \le p \le \le \infty$, розв'язків при $t \to \infty$.

1. Введение. Целью данной работы является исследование поведения при $t \to \to \infty$ решения $u(x,t)$ начально-краевой задачи Неймана для уравнения пористой среды в области $D = \Omega \times (t > 0)$, где Ω — область с некомпактной границей. В случае, когда Ω — ограниченная область, либо совпадает с R^n (задача Коши), подобные исследования проводились многими авторами (см., например, [1]). Если же Ω — неограничена, то для линейных параболических уравнений с измеримыми ограниченными коэффициентами эта задача исследовалась в работах [2 – 4] (см. также имеющуюся там литературу); в случае квазилинейных вырождающихся параболических уравнений — в работах [5 – 7]. В работах [2 – 7] были получены точные оценки $\operatorname{ess\,sup}_{\Omega} |u(x,t)|$ в зависимости от геометрических свойств области и класса начальных функций. Основным аппаратом при получении равномерных оценок $u(x,t)$ в работах [5 – 7] был итеративный метод Мозера и его обобщения. При этом применение этого метода для случая областей, в определенном смысле сужающихся на бесконечности, приводит к существенным техническим трудностям, что видно из работ [4, 7].

В данной работе предлагается другой подход, основанный на методе симметризации, смысл которого состоит в сведении оценки $\operatorname{ess\,sup}_{\Omega} |u(x,t)|$ к оценке $\operatorname{ess\,sup}_{0<s<\infty} \mathcal{U}(s,t)$ решения некоторой вспомогательной одномерной задачи. Методы симметризации в случае эллиптических граничных задач применялись в работах [8 – 10], а в параболическом случае — в [11 – 13]. По методике данная работа примыкает к работам [12, 13].

2. Некоторые вспомогательные определения, предложения и леммы. Пусть $\Omega \subset R^n$, $n \ge 2$, — область с некомпактной границей класса C^2. Рассмотрим в $D = \Omega \times (t > 0)$ следующую задачу:

$$u_t = \Delta u^m, \quad m \ge 1, \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu} u^m \Big|_{\partial\Omega \times (t>0)} = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \ x \in \Omega. \tag{3}$$

Здесь $\partial / \partial\nu$ — производная по внешней к $\partial\Omega$ нормали. Будем предполагать в дальнейшем, что $u_0(x) \ge 0$ и $u_0(x) \in L_1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega) \cap W_2^1(\Omega)$. Под обобщенным решением (о. р.) задачи (1) – (3) в $D_T = \Omega \times (0, T)$ понимается неотрицательная функция $u(x, t)$, принадлежащая пространству $L_1(D_T) \cap L_\infty(D_T)$, имеющая конечный интеграл

$$\int_0^T \int_\Omega u^{m-1} |\nabla u|^2 \, dx dt$$

и удовлетворяющая $\forall \eta \in C^\infty(D_T)$, $\eta(x, T) = 0$, следующему тождеству:

$$\int_0^T \int_\Omega (-u\eta_t + \nabla u^m \nabla \eta) dx\, dt = \int_\Omega u_0(x) \eta(x, 0) dx. \tag{4}$$

Функция $u(x, t)$ — решение задачи (1) – (3) в D, если она является о. р. той же задачи в D_T для всех $T > 0$. Дадим еще одно равносильное опеределение решения задачи (1) – (3). Будем говорить, что $u(x, t)$ — решение задачи (1) – (3) в D, если для произвольных $T > 0$ и $R > 0$ выполняется тождество

$$\int_0^T \int_\Omega (-u\zeta_{Rt} + \nabla u^m \nabla \zeta_R) dx\, dt = \int_\Omega u_0(x) \zeta_R(x, 0) dx \quad \forall \zeta_R(x, t) \in C^\infty(D_T), \tag{5}$$

обращающееся в нуль в $\Omega \backslash \Omega_R$, $\Omega_R = \Omega \cap \{|x| < R\}$ (будем считать, что $0 \in \Omega$), $\zeta_R(x, T) = 0$.

Перейдем к изучению вопроса существования хотя бы одного решения задачи (1) – (3). Рассмотрим в $D_{T,R} = \Omega_R \times (0, T)$ следующее семейство регуляризованных задач $(u_R^\varepsilon(x, t) = v(x, t))$:

$$v_t = \Delta((v^2 + \varepsilon)^{(m-1)/2} v), \quad (x, t) \in D_{T,R}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu}((v^2 + \varepsilon)^{(m-1)/2} v) = 0 \quad \text{в} \quad \partial\Omega_R \backslash \gamma_R, \quad v = 0 \quad \text{на} \quad \bar{\gamma}_R, \tag{7}$$

$$v(x, 0) = v_0(x) = u_{0\varepsilon} \xi_R, \quad \gamma_R = \partial\Omega_R \backslash \partial\Omega, \tag{8}$$

причем $u_{0\varepsilon}(x) \in C^\infty(\Omega)$ и $u_{0\varepsilon} \to u_0$ в $W_2^1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$. Здесь $\xi_R(x)$ — гладкая срезающая функция Ω_R.

Рассмотрим также функцию $w(x, t) = u_R(x, t)$ как решение задачи (6) – (8) при $\varepsilon = 0$:

$$w_t = \Delta w^m, \quad (x, t) \in D_{T,R}, \tag{9}$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu} w^m = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega_R \backslash \gamma_R, \quad w = 0 \quad \text{на} \quad \bar{\gamma}_R, \tag{10}$$

$$w(x, 0) = w_0(x) = u_0(x) \xi_R(x). \tag{11}$$

Для решения задачи (6) – (8) легко получить априорную оценку

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0 < t \le T} \int_{\Omega_R} v^2 dx + 2m \int_0^T \int_{\Omega_R} v^{m-1} |\nabla v|^2 dx dt \le \int_{\Omega_R} (v(x, 0))^2 dx \le \int_\Omega u_0^2 dx. \tag{12}$$

Это позволяет (см. [14, с. 157]) перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$ в интегральном тождестве

$$\int_0^T \int_{\Omega_R} (-v\eta_t + \nabla((v^2 + \varepsilon)^{(m-1)/2} v) \nabla \eta) dx dt = \int_{\Omega_R} v_0(x) \eta(x, 0) dx$$

и получить в пределе решение $w(x,t)$ задачи (9) – (11). Таким образом, справедливо тождество

$$\int_0^T \int_{\Omega_R} (-w\eta_t + \nabla w^m \nabla \eta)\,dx\,dt = \int_{\Omega_R} w_0(x)\eta(x,0)\,dx \tag{13}$$

для любой $\eta(x,t) \in W_2^1(D_{T,R})$, $\eta|_{\gamma_R} = 0$, $\eta(x,T) = 0$.

Пусть $l > k$, k — любое фиксированное число. Рассмотрим последовательность $u_l(x,t)$ как решение задачи (9) – (11) в $D_{T,l}$. Тогда имеем априорную оценку

$$\operatorname{ess\,sup}_{0<t\le T} \int_{\Omega_l} u_l^2(x,t)\,dx + 2m \int_0^T \int_{\Omega_l} u_l^{m-1} |\nabla u_l|^2\,dx\,dt \le \int_{\Omega} u_0^2\,dx. \tag{14}$$

Запишем теперь тождество (13) для $R = k$, $w = u_l$ и $\forall \eta(x,t) \in W_2^1(D_T)$ такой, что $\eta(x,t) = 0$ для $(x,t) \in (\Omega \backslash \Omega_k) \times (0,T)$, $\eta(x,T) = 0$,

$$\int_0^T \int_{\Omega_k} (-u_l\eta_t + \nabla u_l^m \nabla \eta)\,dx\,dt = \int_{\Omega_k} u_{l0}\eta(x,0)\,dx.$$

Устремляя в этом равенстве $l \to \infty$ и пользуясь оценкой (14), получаем

$$\int_0^T \int_{\Omega_k} (-u\eta_t + \nabla u^m \nabla \eta)\,dx\,dt = \int_{\Omega_k} u_0(x)\eta(x,0)\,dx.$$

Кроме того, в силу (14)

$$\int_0^T \int_{\Omega} u^{m-1} |\nabla u|^2\,dx\,dt = \lim_{l\to\infty} \int_0^T \int_{\Omega_l} u^{m-1} |\nabla u|^2\,dx\,dt \le$$

$$\le \varliminf_{l\to\infty} \int_0^T \int_{\Omega_l} u_l^{m-l} |\nabla u_l|^2\,dx\,dt < \infty.$$

Аналогичные рассуждения приводят к существованию $u_\varepsilon(x,t)$-решения регуляризованной задачи в D_T:

$$u_{\varepsilon t} = \Delta((u_\varepsilon^2 + \varepsilon)^{(m-1)/2} u_\varepsilon) \quad \text{в} \quad D_T, \tag{15}$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu}((u_\varepsilon^2 + \varepsilon)^{(m-1)/2} u_\varepsilon)|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0, \tag{16}$$

$$u_\varepsilon(x,0) = u_{0\varepsilon}(x) \quad u_{0\varepsilon} \to u_0 \quad \text{в} \quad W_2^1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega). \tag{17}$$

Оценим величину

$$\int_{\Omega} |u_\varepsilon - u|^{m+1}\,dx = \int_{\Omega_R} |u_\varepsilon - u_R^\varepsilon + u_R^\varepsilon - u|^{m+1}\,dx + \int_{\Omega\backslash\Omega_R} |u_\varepsilon - u|^{m+1}\,dx \le$$

$$\le 2^m \Big(\int_{\Omega_R} |u_\varepsilon - u_R^\varepsilon|^{m+1}\,dx + \int_{\Omega_R} |u_R^\varepsilon - u|^{m+1}\,dx \Big) +$$

$$+ \int_{\Omega\backslash\Omega_R} |u_\varepsilon - u|^{m+1}\,dx = I_1 + I_2 + I_3.$$

Выберем сначала достаточно большое R, тогда $I_3 \le \delta/3$, а затем достаточно малое $\varepsilon > 0$, тогда $I_2 + I_3 \le 2\delta/3$ и, следовательно,

$$\int_\Omega |u_\varepsilon - u|^{m+1} dx \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{18}$$

Свойство (18) нам потребуется в дальнейшем.

Будем говорить, что неотрицательная непрерывная функция $g(v)$ удовлетворяет условию а), если функция $v^{(n-1)/n}/g(v)$ монотонно не убывает для произвольного $v > 0$. Условию а) удовлетворяет, например,

$$g(s) = C\min(s^{(n-1)/n}, s^\alpha), \quad \alpha \in \left(-\infty, \frac{n-1}{n}\right).$$

Обозначим

$$E_p = \int_0^\infty u^p\, ds, \quad J_p = \int_0^\infty (g(s))^p(-u_s)^p\, ds, \quad G_p(s) = \left(\frac{s}{g(s)}\right)^p.$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма. *Пусть $g(s)$ удовлетворяет условию а) и $u(s)$, $0 < s < \infty$, — монотонно невозрастающая неотрицательная функция, для которой при $0 < \beta \le \le 1 < \lambda \le p < n$ конечны величины E_β, J_p. Тогда справедливо следующее неравенство:*

$$E_\lambda \le C E_\beta^{(p-\lambda)/(p-\beta)} J_p^{(\lambda-\beta)/(p-\beta)} \left(G_p\left(E_\beta^{\lambda/(\lambda-\beta)}/E_\lambda^{\beta/(\lambda-\beta)}\right)\right)^{(\lambda-\beta)/(p-\beta)}. \tag{19}$$

Доказательство проведем следуя [15]. Пусть $\mathcal{A}(k) = \{s : u > k\}$, $\mu(k) = = \operatorname{mes} \mathcal{A}(k)$. Тогда

$$\int_0^{\mu(k)} u^p\, ds = \int_0^{\mu(k)} (u - k + k)^p\, ds \le 2^{p-1} \int_0^{\mu(k)} (u-k)^p\, ds + 2^{p-1} k^p \mu(k). \tag{20}$$

Несложно проверить, что

$$\int_0^{\mu(k)} (u-k)^p\, ds \le C \int_0^{\mu(k)} (-u_s)^p s^p\, ds. \tag{21}$$

Действительно,

$$\frac{d}{d\sigma}((u-k)^p \sigma) = p(u-k)^{p-1}\sigma u_\sigma + (u-k)^p.$$

Интегрируя это равенство, имеем

$$\int_0^{\mu(k)} (u-k)^p\, ds = -p \int_0^{\mu(k)} (u-k)^{p-1} s u_s\, ds. \tag{22}$$

Применяя к правой части (22) неравенство Гельдера с показателями $p/(p-1)$ и p, получаем (21). В силу монотонности функции $s^{1-1/n}/g(s)$ из (21) имеем

$$\int_0^{\mu(k)} (u(s) - k)^p\, ds \le C G_p(\mu(k)) \int_0^{\mu(k)} (g(s))^p (-u_s)^p\, ds. \tag{23}$$

Далее, в силу (20) и (23)

$$E_p = \int_0^{\mu(k)} u^p\, ds + \int_{\mu(k)}^\infty u^p\, ds \le C\left(\int_0^{\mu(k)} (g(s))^p(-u_s)^p\, ds\right) G_p(\mu(k)) +$$

$$+ k^p \mu(k) 2^{p-1} + k^{p-1} E_1. \tag{24}$$

Пользуясь монотонностью функции $G_p(v)$ и элементарным неравенством $\mu(k) \le (1/k) E_1$, из (24) получаем

$$E_p \le C\left(G_p\left(\frac{1}{k} E_1\right) J_p + k^{p-1} E_1 \right). \tag{25}$$

Выберем k из условия

$$G_p\left(\frac{1}{k} E_1\right) J_p = k^{p-1} E_1.$$

Легко видеть, что единственным корнем этого уравнения является

$$k = E_1 / \varphi_{-1}(E_1^p / J_p), \quad \varphi(s) = s^{p-1} G_p(s).$$

Подставляя это значение k в (25), имеем

$$E_p \le C E_1^p / (\varphi_{-1}(E_1^p / J_p))^{p-1}.$$

Отсюда после простых преобразований получаем

$$E_p \le C J_p G_p(c E_1^{p/(p-1)} / E_1^{1/(p-1)}). \tag{26}$$

В силу неравенства Гельдера

$$E_1 \le E_p^{(1-\beta)/(p-\beta)} E_\beta^{(p-1)/(p-\beta)}, \quad E_\lambda \le E_p^{(\lambda-\beta)/(p-\beta)} E_\beta^{(p-\lambda)/(p-\beta)}.$$

Следовательно, из (26) окончательно получаем требуемое неравенство. Лемма доказана.

3. Метод симметризации. Прежде чем перейти к симметризации задачи (1) – (3), введем некоторые классы областей с некомпактной границей. Введем функцию объема $l(v)$, $v > 0$ [2 – 4]:

$$l(v) = \inf_{\substack{Q \subset \Omega \\ \mathrm{mes}_n Q = v}} \mathrm{mes}_{n-1}(\partial Q \cap \Omega). \tag{27}$$

Следуя [2], будем говорить, что $\Omega \in \mathcal{U}(g)$, если для произвольного $v > 0$ существует такая монотонно неубывающая функция $g(v)$, что

$$l(v) \ge g(v), \tag{28}$$

и, кроме того, существует v_0 такое, что

$$g(v) \ge c v^{1-1/n}, \quad 0 < v < v_0. \tag{29}$$

В класс $\mathcal{U}(g)$ попадают области, "несужающиеся на бесконечности", для которых, например, выполнено условие

$$l(v) \ge c \min\{v^{1-1/n}, v^{1-\alpha_0}\}, \quad \frac{1}{n} \le \alpha_0 \le 1, \tag{30}$$

для $v \in (0, \infty)$. Классы "сужающихся" на бесконечности областей были рассмотрены в работах [4, 7]. В этих работах были установлены двусторонние точные оценки скорости стабилизации при дополнительном условии конечности момента начальной функции. Будем говорить, что $\Omega \in \mathcal{B}(g)$, если выполнено условие (28) и $g(v)$ удовлетворяет условию а). Очевидно, что если предположить монотонное неубывание функции $g(v)$, то $\mathcal{B}(g) \subset \mathcal{U}(g)$. В общем случае $\mathcal{B}(g)$ шире чем класс $\mathcal{U}(g)$.

Перейдем к симметризации задачи (1) – (3) в D_T для любого $T > 0$, предполагая, что $\Omega \in \mathcal{B}(g)$. Вместо задачи (1) – (3) вначале будем рассматривать решение задачи (15) – (17) в обобщенном смысле, т. е. для любой функции $\eta(x, t) \in W_2^{1,0}(D_T)$

$$\int_0^T \int_\Omega (u_{\varepsilon t}\eta + \nabla((u_\varepsilon^2 + \varepsilon)^{(m-1)/2} u_\varepsilon) \nabla \eta) \, dx dt = 0,$$

$$u_\varepsilon(x, 0) = u_{0\varepsilon}(x), \quad x \in \Omega. \tag{31}$$

Отметим, что для $u_\varepsilon(x, t)$ в отличие от $u(x, t)$ выполняются априорные оценки

$$\int_0^T \int_\Omega u_{\varepsilon t}^2 \, dx dt, \quad \int_0^T \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 \, dx dt \le C(\varepsilon). \tag{32}$$

Следовательно, применима схема рассуждения работ [12, 13]. Введем необходимые понятия. Обозначим $\mu_\varepsilon(\theta, t) = \mathrm{mes}_n\{x \in \Omega : u_\varepsilon(x, t) > \theta\}$. Пусть $u_\varepsilon^*(s, t) = \inf\{\theta : \mu_\varepsilon(\theta, t) < s\}$ — невозрастающая перестановка функции $u_\varepsilon(x, t)$ по пространственным переменным [12]. Возьмем в (31)

$$\eta(x, t) = \begin{cases} \dfrac{1}{h}(u_\varepsilon(x,t) - \theta), & \theta < u_\varepsilon \le \theta + h, \\ 1, & u_\varepsilon(x,t) > \theta + h, \\ 0, & u_\varepsilon \le \theta. \end{cases}$$

Тогда для п. в. $t > 0$ имеем

$$\frac{1}{h} \int_{\{\theta < u_\varepsilon \le \theta + h\}} \nabla((u_\varepsilon^2 + \varepsilon)^{(m-1)/2} u_\varepsilon) \nabla u_\varepsilon dx =$$

$$= - \int_{\{u_\varepsilon > \theta + h\}} u_{\varepsilon t} dx - \frac{1}{h} \int_{\{\theta < u_\varepsilon \le \theta + h\}} u_{\varepsilon t}(u_\varepsilon - \theta) dx.$$

Переходя к пределу при $h \to 0$, получаем

$$-\frac{d}{d\theta} \int_{\{u_\varepsilon > \theta\}} \nabla((u_\varepsilon^2 + \varepsilon)^{(m-1)/2} u_\varepsilon) \nabla u_\varepsilon dx = - \int_{\{u_\varepsilon > \theta\}} u_{\varepsilon t} dx. \tag{33}$$

Согласно формуле Флеминга – Ришеля (см., например, [8])

$$\int_{\{u_\varepsilon > \theta\}} |\nabla u_\varepsilon| \, dx = \int_\theta^\infty P\{x : u_\varepsilon(x, t) \ge \xi\} \, d\xi, \tag{34}$$

P — периметр многообразия $\{u_\varepsilon(x, t) \ge \xi\}$.

С другой стороны, поскольку $\Omega \in B(g)$, то

$$P\{x : u_\varepsilon(x, t) > \theta\} \ge g(\mu_\varepsilon(\theta, t)). \tag{35}$$

Значит, из (34) и (35) имеем

$$-\frac{d}{d\theta} \int_{\{u_\varepsilon > \theta\}} |\nabla u_\varepsilon| \, dx \ge g(\mu_\varepsilon(\theta, t)). \tag{36}$$

В силу неравенства Гельдера

$$\frac{1}{h} \int\limits_{\{\theta < u_\varepsilon \le \theta + h\}} |\nabla u_\varepsilon| \, dx \le \left(\frac{1}{h} \int\limits_{\{\theta < u_\varepsilon \le \theta + h\}} |\nabla u_\varepsilon|^2 \, dx \right)^{1/2} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{h} \operatorname{mes}_n \{ \theta < u_\varepsilon \le \theta + h \} \right)^{1/2}.$$

Устремляя в этом неравенстве $h \to 0$, с учетом (36) получаем

$$g(\mu_\varepsilon(\theta, t)) \le \left(-\frac{d}{d\theta} \int\limits_{\{u_\varepsilon > \theta\}} |\nabla u_\varepsilon|^2 \, dx \right)^{1/2} (-\mu'_\varepsilon(\theta, t))^{1/2}. \tag{37}$$

Из (33) находим

$$(m\theta^2 + \varepsilon)(\theta^2 + \varepsilon)^{(m-1)/2-1} \left(-\frac{d}{d\theta} \int\limits_{\{u_\varepsilon > \theta\}} |\nabla u_\varepsilon|^2 \, dx \right) \le - \int\limits_{\{u_\varepsilon > \theta\}} u_{\varepsilon t} \, dx. \tag{38}$$

Далее, пользуясь равенством [12]

$$\int\limits_{\{u_\varepsilon > \theta\}} u_{\varepsilon t} \, dx = \int\limits_0^{\mu_\varepsilon(\theta, t)} u^*_{\varepsilon t} \, ds,$$

из (37) и (38) получаем

$$(m\theta^2 + \varepsilon)(\theta^2 + \varepsilon)^{(m-1)/2-1} g^2(\mu_\varepsilon(\theta, t))(-\mu'_\varepsilon)^{-1} \le - \int\limits_0^{\mu_\varepsilon(\theta, t)} u^*_{\varepsilon t} \, ds. \tag{39}$$

Сделаем замену переменных $\mu_\varepsilon(\theta, t) = s$, тогда $\theta = u^*_\varepsilon(s, t)$ и (39) примет вид

$$(m(u^*_\varepsilon)^2 + \varepsilon)((u^*_\varepsilon)^2 + \varepsilon)^{(m-1)/2-1} g^2(s)(-u^*_{\varepsilon s}) \le - \int\limits_0^s u^*_{\varepsilon t} \, d\sigma,$$

или

$$-[((u^*_\varepsilon)^2 + \varepsilon)^{(m-1)/2} u^*_\varepsilon]_s \, g^2(s) \le - \int\limits_0^s u^*_{\varepsilon t}(\sigma, t) \, d\sigma. \tag{40}$$

Обозначая

$$k(s, t) = \int\limits_0^s u^*_\varepsilon(\sigma, t) \, d\sigma,$$

перепишем (40) в следующем виде:

$$k_t - g^2(s)[(k_s^2 + \varepsilon)^{(m-1)/2} k_s]_s \le 0. \tag{41}$$

Очевидно, что

$$k(0, t) = k_s(\infty, t) = 0. \tag{42}$$

Пусть

$$K(s, t) = \int\limits_0^s \mathcal{U}_\varepsilon(\sigma, t) d\sigma,$$

где $\mathcal{U}_\varepsilon(s, t)$ — решение задачи

$$\frac{\partial \mathcal{U}_\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial s} \left(g^2(s) \left((\mathcal{U}_\varepsilon^2 + \varepsilon)^{(m-1)/2} \mathcal{U}_\varepsilon \right)_s \right) = 0, \tag{43}$$

$$\mathcal{U}_\varepsilon(\infty, t) = 0, \quad \left(g^2(s) \left((\mathcal{U}_\varepsilon^2 + \varepsilon)^{(m-1)/2} \mathcal{U}_\varepsilon \right)_s \right)(0, t) = 0, \tag{44}$$

$$\mathcal{U}_\varepsilon(s,0) = u^*_{0\varepsilon}(s), \quad s \in (0,\infty).$$

Интегрируя (43) в пределах от 0 до s, получаем

$$\frac{\partial K}{\partial t} - g^2(s)\left(\left(K_s^2+\varepsilon\right)^{(m-1)/2}K_s\right)_s = 0. \tag{45}$$

Очевидно, что

$$K(0,t) = K_s(\infty,t) = 0, \quad K(s,0) = \int\limits_0^s u^*_{\varepsilon 0}(\sigma)\,d\sigma. \tag{46}$$

Рассмотрим $z(s,t) = k(s,t) - K(s,t)$. Вычитая из (41) равенство (45), получаем

$$z_t - g^2(s)\left(\left(\left(k_s^2+\varepsilon\right)^{(m-1)/2}k_s\right)_s - \left(\left(K_s^2+\varepsilon\right)^{(m-1)/2}K_s\right)_s\right) \le 0. \tag{47}$$

Кроме того,

$$z(0,t) = z_s(\infty,t) = 0, \quad z(s,0) = 0. \tag{48}$$

Докажем, что для всех $s>0$, $t>0$ $z(s,t)\le 0$. Предположим противное, умножим обе части (47) на $(z^+)(g(s))^{-2} \equiv \max\{z,0\}(g(s))^{-2}$ и проинтегрируем по множеству $(a,A)\times(0,T)$. В результате получим

$$\int\limits_0^T\int\limits_a^A g^{-2}z_t z^+\,ds\,dt \le \int\limits_0^T\int\limits_a^A \left[\left(k_s^2+\varepsilon\right)^{(m-1)/2}k_s - \left(\left(K_s^2+\varepsilon\right)^{(m-1)/2}K_s\right]_s z^+\,ds\,dt. \tag{49}$$

Проверим, что функции

$$z^+\left[\left(k_s^2+\varepsilon\right)^{(m-1)/2}k_s\right]_s, \quad z^+\left[\left(K_s^2+\varepsilon\right)^{(m-1)/2}K_s\right]_s$$

принадлежат $L_1(0,A)$ при всех $t>0$, $A>0$. Из неравенства (40) имеем оценку

$$-\left(\left(\left(u^*_\varepsilon\right)^2+\varepsilon\right)^{(m-1)/2}u^*_\varepsilon\right)_s \le g^{-2}(s)\left(\int\limits_0^s \left(u^*_{\varepsilon t}\right)^2 ds\right)^{1/2} s^{1/2} \le C(\varepsilon)g^{-2}(s)s^{1/2}. \tag{50}$$

Кроме того,

$$|z| \le \int\limits_0^s u^*_\varepsilon(\sigma,t)\,d\sigma + \int\limits_0^s \mathcal{U}_\varepsilon(\sigma,t)\,d\sigma \le 2M_0 s. \tag{51}$$

Следовательно,

$$z^+\left(\left(k_s^2+\varepsilon\right)^{(m-1)/2}k_s\right)_s \in L_1(0,A).$$

Аналогично рассуждая, получаем

$$z^+\left(\left(K_s^2+\varepsilon\right)^{(m-1)/2}K_s\right)_s \in L_1(0,A).$$

По формуле интегрирования по частям из (49) имеем

$$\frac{1}{2}\int\limits_a^A (z^+)^2\big|_{t=T}\,ds + \int\limits_0^T\int\limits_a^A \left[\left(k_s^2+\varepsilon\right)^{(m-1)/2}k_s - \left(K_s^2+\varepsilon\right)^{(m-1)/2}K_s\right] z_s^+\,ds\,dt \le$$

$$\le \left[\left(k_s^2+\varepsilon\right)^{(m-1)/2}k_s - \left(K_s^2+\varepsilon\right)^{(m-1)/2}K_s\right]\Big|_{s=a}^{s=A} z^+\Big|_{s=a}^{s=A}. \tag{52}$$

Докажем, что правая часть в неравенстве (52) стремится к нулю при $a\to 0$, $A\to\infty$. Действительно из оценок (50) и (51) следует, что правая часть на нижнем пределе равна нулю при $a\to 0$. Далее имеем

$$\lim_{A\to\infty}\left(k_s^2+\varepsilon\right)^{(m-1)/2}k_s z^+\big|_{z=A} \le$$

$$\leq ((u_\varepsilon^*)^2(\infty, t) + \varepsilon)^{(m-1)/2} u_\varepsilon^*(\infty, t) \int_0^\infty u_\varepsilon^*(\sigma, t)\, d\sigma = 0.$$

Здесь мы воспользовались законом сохранения массы

$$\int_0^\infty u_\varepsilon^*(\sigma, t)\, d\sigma = \int_\Omega u_\varepsilon(x, t)\, dx = \int_\Omega u_{0\varepsilon}(x)\, dx$$

и тем, что $u_\varepsilon^*(\infty, t) = 0$. Аналогично проверяется это свойство для слагаемого с $K(s, t)$. Устремляя теперь в (52) вначале $a \to 0$, а затем $A \to \infty$ и используя неравенство

$$[(k_s^2 + \varepsilon)^{(m-1)/2} k_s - (K_s^2 + \varepsilon)^{(m-1)/2} K_s](k_s - K_s) \geq c\,|k_s - K_s|^{m+1},$$

получаем

$$\int_0^\infty (z^+)^2\, ds \leq 0,$$

что противоречит предположению. Следовательно, установлено, что

$$\int_0^s u_\varepsilon^*(\sigma, t)\, d\sigma \leq \int_0^s \mathcal{U}_\varepsilon(\sigma, t)\, d\sigma$$

и, значит [10],

$$\int_0^s (u_\varepsilon^*)^p\, d\sigma \leq \int_0^s \mathcal{U}^p\, d\sigma, \quad 0 < s \leq \infty, \quad \forall p \geq 1.$$

Полагая в последнем неравенстве $s = \infty$, имеем

$$\int_\Omega u_\varepsilon^p\, dx = \int_0^\infty (u_\varepsilon^*)^p\, ds \leq \int_0^\infty (\mathcal{U}_\varepsilon)^p\, ds.$$

Переходя к пределу по $\varepsilon \to 0$ и пользуясь свойством (18), получаем

$$\int_\Omega u^p\, dx = \int_0^\infty (u^*)^p\, ds \leq \int_0^\infty \mathcal{U}^p\, ds.$$

Отсюда следует, что $\operatorname{ess\,sup}_\Omega u(x, t) \leq \operatorname{ess\,sup}_{0<s<\infty} \mathcal{U}(s, t)$, где $\mathcal{U}(s, t)$ — решение задачи (43), (44) с $\varepsilon = 0$.

Таким образом, установлена следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $\Omega \in B(g)$ *и* $u(x, t)$ — *решение задачи* (1) – (3) *в* D. *Тогда для п. в.* $t > 0$ *выполняется оценка*

$$\operatorname{ess\,sup}_\Omega u(x, t) \leq \operatorname{ess\,sup}_{0<s<\infty} \mathcal{U}(s, t), \tag{53}$$

где $\mathcal{U}(s, t)$ — *решение задачи* (43), (44) *с* $\varepsilon = 0$.

4. Оценка $\operatorname{ess\,sup}_\Omega u(x, t)$**.** В этом пункте предполагаем, что область $\Omega \in B(g)$. В силу теоремы 1 для оценки $M(t) = \operatorname{ess\,sup}_\Omega u(x, t)$ достаточно оценить $\operatorname{ess\,sup}_{0<s<\infty} \mathcal{U}(s, t)$. Для этого умножим обе части (43) при $\varepsilon = 0$ на $\mathcal{U}^p$ и результат проинтегрируем от 0 до ∞. С учетом граничных условий получим

$$\frac{d}{dt}\int_0^\infty \mathcal{U}^{p+1}(s,t)\,ds = -c(p,m)\int_0^\infty g^2(s)\,|(\mathcal{U}^{(m+p)/2})_s|^2\,ds, \tag{54}$$

где $c(p,m) = 4(p+1)p/(m+p)^2$.

Введем обозначения $v = U^{(m+p)/2}$, $\lambda = 2(p+1)/(m+p)$, $\beta = 2/(m+p)$ и перепишем (54) в виде

$$\frac{d}{dt}\int_0^\infty v^\lambda\,ds = -c(p,m)\int_0^\infty g^2(s)(-v_s)^2\,ds. \tag{55}$$

Применив лемму при $p = 2$, будем иметь

$$\frac{d}{dt}E_\lambda \le -C\frac{E_\lambda^{(2-\beta)/(\lambda-\beta)}}{E_\beta^{(2-\lambda)/(\lambda-\beta)}\,G_2\left(E_\beta^{\lambda/(\lambda-\beta)}\,E_\lambda^{-\beta/(\lambda-\beta)}\right)}. \tag{56}$$

В силу закона сохранения массы

$$\int_0^\infty v^\beta\,ds = \int_0^\infty U(s,t)\,ds = \int_0^\infty u_0^*(s)\,ds = \text{const}.$$

Поэтому неравенство (56) можно переписать в виде

$$\frac{G_2\left(c\,E_\lambda^{-\beta/(\lambda-\beta)}\right)}{E_\lambda^{(2-\beta)(\lambda-\beta)^{-1}}}\,dE_\lambda \le -C\,dt. \tag{57}$$

Обозначив

$$E_\lambda^{-\beta/(\lambda-\beta)} = w(s,t),$$

перепишем (57) следующим образом:

$$w^{(2-\beta-\lambda)/\beta}G_2(w)\,dw \ge c\,dt,$$

или

$$I(w) = \int_0^w v^{(2-\beta-\lambda)/\beta}G_2(v)\,dv \ge ct.$$

Отсюда следует

$$\left(\int_0^\infty \mathcal{U}^{p+1}(s,t)\,ds\right)^{1/(p+1)} \le C(I_{-1}(ct))^{-1},$$

$$I(\theta) = \int_0^\theta v^{m-2}G_2(v)\,dv, \quad G_2(v) = \frac{v^2}{(g(v))^2}. \tag{58}$$

Предположим теперь, что существует такое $\kappa > 0$, что функция $\theta^\kappa(I_{-1}(\theta))^{-1}$ монотонно не убывает для произвольного $\theta > 0$. Это свойство будем называть условием в). Тогда, пользуясь итерационной техникой [5], можно получить оценку

$$\operatorname*{ess\,sup}_{(0,\infty)} \mathcal{U}(s,t) \le C(I_{-1}(ct))^{-1}. \tag{59}$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $\Omega \in B(g)$ *и выполнено условие в). Тогда для решения* $u(x,t)$ *задачи* (1) – (3) *в* D *для п. в.* $t > 0$ *выполняется оценка*

$$M(t) \leq C(I_{-1}(ct))^{-1}. \tag{60}$$

Рассмотрим пример. Пусть в теореме 2

$$g(v) = c\min\{v^{1-1/n}, v^{1-\alpha_0}\}, \quad \frac{1}{n} \leq \alpha_0 \leq 1,$$

тогда

$$I(\theta) = C\max\{\theta^{2/n+m-1}, \theta^{2\alpha_0+m-1}\},$$

$$I_{-1}(\theta) = C\max\{\theta^{n/(n(m-1)+2)}, \theta^{1/(2\alpha_0+m-1)}\},$$

значит, выполнено условие в) с $\kappa = n/(n(m-1)+2)$ и оценка (60) для $M(t)$ примет вид

$$M(t) \leq C\max\{t^{-n/(n(m-1)+2)}, t^{-1/(m-1+2\alpha_0)}\}.$$

Отметим, что случаю $\alpha_0 = 1/n$ соответствуют области, которые расширяются как все пространство, например конус, и тогда скорость стабилизации такая же, как в случае задачи Коши в R^n. Если же $\alpha_0 = 1$, то Ω — область цилиндрического типа и тогда решение стремится к нулю при $t \to \infty$ как решение одномерной задачи Коши.

Таким образом, число $1/(m-1+2\alpha_0)$ является числом баренблатовского типа, а показатель α_0 характеризует геометрию области.

1. *Калашников А. С.* Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка // Успехи мат. наук. – 1987.– **42**, вып. 2. – С. 135 – 176.
2. *Гущин А. К.* Об оценках решений краевых задач для параболического уравнения второго порядка // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1973.– **126**. – С. 5 – 45.
3. *Гущин А. К.* Об равномерной стабилизации решений второй смешанной задачи для параболического уравнения // Мат. сб. – 1982.– **119**, № 4. – С. 451 – 508.
4. *Гущин А. К.* Стабилизация решений второй краевой задачи для параболического уравнения второго порядка // Там же. – 1976.– **101**, № 4. – С. 459 – 499.
5. *Тедеев А. Ф.* Оценки скорости стабилизации при $t \to \infty$ решения второй смешанной задачи для квазилинейного параболического уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. – 1991.– **27**, № 10. – С. 1795 – 1806.
6. *Тедеев А. Ф.* Оценка скорости стабилизации второй смешанной задачи для квазилинейного параболического уравнения второго порядка с абсорбцией // Нелинейные граничные задачи. – 1991.– № 3. – С. 99 – 103.
7. *Тедеев А. Ф.* Двусторонние оценки скорости стабилизации решения второй смешанной задачи для квазилинейного параболического уравнения второго порядка // Там же. – 1992.– Вып. 4. – С. 101 – 112.
8. *Talenti G.* Elliptic equations and rearrangements // Ann. Scuola norm. sup. Pisa. – 1976. – **4, 3**. – P. 697 – 718.
9. *Talenti G.* Linear elliptic P. D. E′.s: Level sets, rearrangements and a priori estimates of solutions // Boll. Unione. mat. ital. – 1985. – **4B**, № 3. – P. 917 – 949.
10. *Alvino A., Trombetti G., Lions P. L.* Comparison results for elliptic and parabolic equations via Schwarz symmetrization // Ann. Inst. H. Pioncaré. – 1990. – **7**, № 2. – P. 37 – 65.
11. *Vazquez J.* Symmetrization in nonlinear parabolic equations // Port. Mat. – 1982. – **41**, № 1 – 4. – P. 339 – 346.
12. *Mossino J., Rakotoson J.* Isoperimetric inequalities in parabolic equations // Ann. Scuola norm. sup. Pisa. – 1986. – **13**, № 1. – P. 51 – 73.
13. *Базалий Б. В., Тедеев А. Ф.* Симметризация и начально-краевые задачи для некоторых классов нелинейных параболических уравнений второго порядка // Укр. мат. журн. – 1993.– **47**, № 7. – С. 884 – 892.
14. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 587 с.
15. *Тедеев А. Ф.* Качественные свойства решений задачи Неймана для квазилинейного параболического уравнения высокого порядка // Укр. мат. журн. – 1993.– **45**, № 11. – С. 1571 – 1579.

Получено 21.03.94