УДК 517.95

М. А. Бородин, канд. физ.-мат. наук (Донец. ун-т)

ДВУХФАЗНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА СТЕФАНА

We prove that a classic solution of the many-dimensional two-phase Stephan problem exists on any finite time interval if there is a contact of the unknown (free) boundary with the known boundary.

Доведено існування класичного розв'язку в багатовимірній двофазній задачі Стефана на будь-якому скінченному проміжку часу у випадку контакту невідомої (вільної) межі з відомою.

В настоящей работе исследуется разрешимость многомерной двухфазной задачи Стефана. Обзор работ, посвященных этой проблеме см. в [1, 2]. В них доказаны существование и единственность классического решения в целом по времени в однофазной задаче Стефана, существование и единственность классического решения на малом промежутке времени в двухфазной задаче [3–5].

В данной работе предложен метод, который позволил доказать существование классического решения в двухфазной многомерной задаче Стефана на любом конечном промежутке времени в случае наличия контакта неизвестной части границы с известной. Сущность предложенного метода заключается в следующем: сначала строится некоторая последовательность эллиптических дифференциально-разностных задач со свободными границами, устанавливается разрешимость, затем доказываются равномерные оценки и совершается предельный переход. В результате исследования указанных задач удается выяснить поведение решения вблизи свободной границы. Ранее автор изучал задачу Стефана подобным методом в работах [6, 7].

1. Постановка задачи. Построение аппроксимирующих задач. Пусть $D = \{x \in R^3\colon x_1^2 + x_2^2 < b^2,\ 0 < x_3 < d\}$, $D_T = D \times (0, T)$, $\Gamma_1 = \{x \in R^3\colon x_1^2 + x_2^2 = b^2,\ 0 < x_3 < d\}$, $\Gamma_2 = \{x \in R^3\colon x_1^2 + x_2^2 \le b^2,\ x_3 = 0\}$, $\Gamma_3 = \{x \in R^3\colon x_1^2 + x_2^2 \le b^2,\ x_3 = d\}$. Требуется найти тройку $\{u(x,t), \Omega_T, G_T\}$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$\Delta u - a(u)\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \forall\,(x,t) \in \Omega_T \cup G_T,$$
$$\Omega_T = \{(x,t) \in D_T\colon u(x,t) < 1\}, \quad G_T = \{(x,t) \in D_T\colon u(x,t) > 1\}; \tag{1}$$

на известной границе

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \beta u = 0 \quad \forall\,(x,t) \in \Gamma_1 \times (0,T),$$
$$u(x,t) = 0 \quad \forall\,(x,t) \in \Gamma_2 \times (0,T), \quad u(x,t) = \varphi(x,t) \quad \forall\,(x,t) \in \Gamma_3 \times (0,T); \tag{2}$$

на неизвестной границе

$$u(x,t) = 1, \quad \sum_{i=1}^{3}\left[\frac{\partial u}{\partial x_i}\right]\cos(n, x_i) + \lambda\cos(n,t) = 0 \quad \forall\,(x,t) \in \gamma_T,$$
$$\gamma_T = \partial\Omega_T \cap D = \partial G_T \cap D, \quad n \text{ — внешняя нормаль к } \Omega_T; \tag{3}$$

начальные условия таковы:

$$u(x,0) = \psi(x) \quad \forall\, x \in D,$$
$$\Omega_0 = \{x \in D\colon 0 < \psi(x) < 1\}, \quad \gamma_0 = \{x \in D\colon \psi(x) = 1\}. \tag{4}$$

Здесь $a(u)$ — кусочно-постоянная функция, равная a_1 в Ω_T и a_2 в G_T,

© М. А. БОРОДИН, 1995

$\varphi(x,t)$ и $\psi(x)$ — заданные функции, $[u_{x_i}(x,t)]$ — разность между предельными значениями на γ_T, взятыми из областей Ω_T и G_T соответственно, λ, a_1, a_2, b, β, d, T — заданные положительные константы.

Для исследования задачи (1) – (4) построим систему аппроксимирующих задач. В связи с этим разобьем цилиндр D_T плоскостями $t = kh$, $hN = T$, N — некоторое положительное число, $k = 1, 2, \ldots, N$. Для любого $\varepsilon > 0$ определим функцию $X_\varepsilon(x) \in C^\infty(R^1)$ так:

$$X_\varepsilon(x) = 1 \quad \forall x \le 1, \quad X_\varepsilon(x) = 0 \quad \forall x \ge 1+\varepsilon, \quad X'_\varepsilon(x) \le 0.$$

Обозначим $a_\varepsilon(x) = a_2 + (a_1 - a_2)X_\varepsilon(x)$, $\varphi_k(x) = \varphi(x, kh)$. Будем приближать функцию $u(x,t)$ функциями $u_k(x,h,\varepsilon)$, которые определим следующим образом:

$$\Delta u_k - h^{-1}\int_{u_{k-1}}^{u_k} a_\varepsilon(\tau)d\tau = -\lambda h^{-1}[X_\varepsilon(u_k) - X_\varepsilon(u_0)] +$$

$$+ h^{-1}\int_0^{F_{k-1}} a_\varepsilon\left(u_{k-1}-\tau\right)d\tau \quad \forall x \in D, \quad k = 1, 2, \ldots, N, \tag{5}$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial n} + \beta u_k = 0 \quad \forall x \in \Gamma_1, \quad u_k = 0 \quad \forall x \in \Gamma_2,$$

$$u_k = \varphi_k \quad \forall x \in \Gamma_3, \quad u_0(x) = \psi(x). \tag{6}$$

Функции $F_k(x,h,\varepsilon)$ являются решениями задачи

$$\Delta F_k - h^{-1}\int_0^{F_k} a_\varepsilon\left(u_k - \tau\right)d\tau = -\lambda h^{-1}[X_\varepsilon(u_k) - X_\varepsilon(u_0)] \quad \forall x \in D, \tag{7}$$

$$\frac{\partial F_k}{\partial n} + \beta F_k = 0 \quad \forall x \in \Gamma_1, \quad F_k = 0 \quad \forall x \in \Gamma_2 \cup \Gamma_3, \quad F_0 \equiv 0. \tag{8}$$

Задачу (5) – (8) можно изучить последовательно. Сначала найти функцию $F_{k-1}(x,h,\varepsilon)$ $(F_0 \equiv 0)$ при $k = 1$, затем эту функцию подставить в правую часть уравнения (5) и исследовать соответствующую краевую задачу для $u_k(x, h,\varepsilon)$. После чего найти функцию $F_k(x,h,\varepsilon)$ из (7), (8) и повторить эту процедуру.

Вычтем из (5) уравнение (7), предположив, что задача (5) – (8) разрешима, и обозначим

$$w_k(x,h,\varepsilon) = u_k(x,h,\varepsilon) - F_k(x,h,\varepsilon). \tag{9}$$

В результате получим

$$\Delta w_k - h^{-1}\int_{w_{k-1}}^{w_k} a_\varepsilon(\tau)d\tau = 0 \quad \forall x \in D, \quad k = 1, 2, \ldots, N, \tag{10}$$

$$\frac{\partial w_k}{\partial n} + \beta w_k = 0 \quad \forall x \in \Gamma_1, \quad w_k = 0 \quad \forall x \in \Gamma_2,$$

$$w_k = \varphi_k \quad \forall x \in \Gamma_3, \quad w_0(x,h,\varepsilon) = \psi(x) \quad \forall x \in D. \tag{11}$$

2. Изучение свойств решений аппроксимирующих задач. Изучение аппроксимирующих задач начнем с (10), (11). Для этого введем в рассмотрение функционал

$$J(w_k) = \int_D \Phi\left(w_{k-1}, w_k, \frac{\partial w_k}{\partial x}\right) dx + \frac{\beta}{2} \int_{\Gamma_1} w_k^2 \, ds, \tag{12}$$

$$\Phi\left(w_{k-1}, w_k, \frac{\partial w_k}{\partial x}\right) = \frac{1}{2} |\Delta w_k|^2 + h^{-1} \int_{w_{k-1}}^{w_k} dt \int_{w_{k-1}}^{t} a_\varepsilon(\tau) d\tau. \tag{13}$$

Отметим некоторые свойства функционала (12):

1) функция (13) непрерывна вместе со своими частными производными по своим аргументам и неотрицательна;

2) функция (13) выпукла по переменным $\partial w_k / \partial x_i$;

3) справедлива оценка

$$J(w_k) \geq \frac{1}{2} \int_D |\Delta w_k|^2 dx + \frac{\beta}{2} \int_{\Gamma_1} w_k^2 \, ds.$$

Пусть

$$V_k = \{ v_k(x) \in W_2^1(D) \colon v_k = 0 \ \ \forall x \in \Gamma_2, \ v_k = \varphi_k \ \ \forall x \in \Gamma_3 \}.$$

Тогда, как известно [8, с. 397], справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $\psi(x) \in V_0$, $\varphi_k(x) \in W_2^1(D)$. *Тогда для любых* $h > 0$, $\varepsilon > 0$, $k = 1, 2, \ldots, N$ *существуют* $w_k(x, h, \varepsilon) \in V_k$, *доставляющие соответствующим функционалам* (12) *наименьшее значение. Для любой функции* $\eta(x) \in W_2^1(D)$, *равной нулю на* $\Gamma_2 \cup \Gamma_3$, *справедливы интегральные тождества*

$$\int_D \left[\nabla w_k \nabla \eta + h^{-1} \int_{w_{k-1}}^{w_k} a_\varepsilon(\tau) d\tau \cdot \eta \right] dx + \beta \int_{\Gamma_1} w_k \eta \, ds = 0. \tag{14}$$

Докажем теперь ограниченность функций $w_k(x, h, \varepsilon)$, являющихся обобщенными решениями уравнений Эйлера (14).

Теорема 2. *Пусть выполнены условия предыдущей теоремы и существует* $c > 0$ *такое, что*

$$\max_k \left(\operatorname*{vrai\,sup}_{\partial D} |\varphi_k|, \operatorname*{vrai\,sup}_{D} |\psi| \right) \leq c.$$

Тогда для $k = 1, 2, \ldots, N$ *справедлива оценка*

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{D} |w_k| \leq c.$$

Предположим, что $\operatorname*{vrai\,sup}_{D} |w_k| > c$. Рассмотрим функцию

$$v_k(x) = \begin{cases} c, & w_k(x) > c; \\ w_k(x), & |w_k(x)| \leq c; \\ -c, & w_k(x) < -c. \end{cases}$$

Легко проверить, что функция $v_k(x) \in V_k$, а, с другой стороны, $J(v_k) < J(w_k)$, что противоречит утверждению теоремы 1.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1, $\psi(x) \in C^{1+\alpha}(\overline{D})$, *а функции* $\varphi_k(x)$ *таковы, что* $v_k(x)$, *являющиеся решениями краевых задач*

$$\Delta v_k = 0 \quad \forall\, x \in D, \quad \frac{\partial v_k}{\partial n} + \beta v_k = 0 \quad \forall\, x \in \Gamma_1,$$
$$v_k = 0 \quad \forall\, x \in \Gamma_2, \quad v_k = \varphi_k \quad \forall\, x \in \Gamma_3, \tag{15}$$

принадлежат пространству $C^{1+\alpha}(\overline{D})$, $\alpha \in (0,1)$. *Тогда* $\forall\, \varepsilon > 0$, $\forall\, h > 0$, $\forall\, k = 1, 2, \ldots, N$

$$w_k(x) \in C^{1+\alpha}(\overline{D}) \bigcap C^{3+\alpha}(D') \quad \forall\, D' \subset D.$$

Доказательство теоремы следует из известных фактов теории краевых задач для эллиптических уравнений.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия предыдущей теоремы и существуют* $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ *такие, что*

$$-c_1 \le \Delta\psi \le 0, \quad 0 \le \varphi_{k-1}(x) - \varphi_k(x) \le c_2 h.$$

Тогда справедлива оценка

$$\forall\, x \in \overline{D}, \quad \forall\, k = 1, 2, \ldots, N \quad 0 \le w_{k-1} - w_k \le ch, \tag{16}$$

где $c = \max(c_1, c_2)$, *если* $a_1 \ge a_2$.

Из доказанного выше следует

$$\Delta(w_k - w_{k+1}) - h^{-1} \int\limits_{w_{k+1}}^{w_k} a_\varepsilon(\tau)\, d\tau = -h^{-1} \int\limits_{w_k}^{w_{k-1}} a_\varepsilon(\tau)\, d\tau \quad \forall\, x \in D.$$

Из этого уравнения, используя знакоопределенность вторых производных в точках, в которых функция $w_k(x, h, \varepsilon) - w_{k+1}(x, h, \varepsilon)$ принимает свои максимальное или минимальное значения, а также монотонность функции $a_\varepsilon(\tau)$ и граничные условия, получаем нужную оценку.

***Следствие* 1.** *Пусть выполнены условия теоремы* 4. *Тогда существует постоянная* $c > 0$, *которая не зависит ни от* h, *ни от* ε, *ни от* k *и такая, что справедлива оценка*

$$\| w_k(x, h, \varepsilon) \|_{C^{1+\alpha}(\overline{D})} \le c. \tag{17}$$

Это утверждение следует из теорем 3 и 4, если учесть, что каждая из функций $w_k(x, h, \varepsilon)$ удовлетворяет в области D уравнению Пуассона с равномерно ограниченной правой частью в силу оценки (16).

Рассмотрим функционал

$$J(u_k) = \int\limits_D \Phi\left(x, u_k, \frac{\partial u_k}{\partial x}\right) dx + \frac{\beta}{2} \int\limits_{\Gamma_1} u_k^2\, ds.$$
$$\Phi\left(x, u_k, \frac{\partial u_k}{\partial x}\right) = h^{-1} \int\limits_{w_{k-1}}^{w_k} dt \int\limits_{w_{k-1}}^{t} a_\varepsilon(\tau)\, d\tau + \tag{18}$$
$$+ \frac{1}{2} |\nabla u_k|^2 + \lambda h^{-1} \int\limits_{u_k}^{u_0} \left[\mathrm{X}_\varepsilon(\tau) - \mathrm{X}_\varepsilon(u_0) \right] d\tau,$$

$w_k(x, h, \varepsilon)$ — решение задачи (10), (11). Отметим некоторые свойства функционала (18):

1) функция $\Phi(x, u_k, \partial u_k / \partial x)$ неотрицательна и непрерывна вместе с частными производными по своим аргументам;

2) функция $\Phi(x, u_k, \partial u_k/\partial x)$ выпукла по переменным $\partial u_k/\partial x_i$, $i = 1, 2, 3$;
3) выполняется неравенство

$$J(u_k) \geq \frac{1}{2}\int\limits_D |\nabla u_k|^2 dx + \frac{\beta}{2}\int\limits_{\Gamma_1} u_k^2\, ds.$$

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда для любых* $h > 0$, $\varepsilon > 0$, $k = 1, 2, \ldots, N$ *существуют функции* $u_k(x, h, \varepsilon) \in V_k$, *доставляющие функционалу* (18) *наименьшее значение и для функции* $\eta(x) \in W_2^1(D)$, *равной нулю на* $\Gamma_2 \cup \Gamma_3$, *справедливо интегральное тождество*

$$\int\limits_D \Bigg\{ \nabla u_k \nabla \eta - \lambda h^{-1}[\mathrm{X}_\varepsilon(u_k) - \mathrm{X}_\varepsilon(u_0)]\eta +$$

$$+ h^{-1}\int\limits_{w_{k-1}}^{u_k} a_\varepsilon(\tau)d\tau \cdot \eta \Bigg\} dx + \beta \int\limits_{\Gamma_1} u_k \eta\, ds = 0. \tag{19}$$

Теорема 5 доказывается так же, как соответствующее утверждение для функции $w_k(x, h, \varepsilon)$.

Теорема 6. *Пусть для функций* $\varphi_k(x)$ *и* $\psi(x)$ *выполнены условия теорем* 1, 3. *Тогда*

$$u_k(x, h, \varepsilon) \in C^{1+\alpha}(\overline{D}) \cap C^{3+\alpha}(D') \quad \forall D' \subset D.$$

Если, кроме того, для функций $\varphi_k(x)$ *и* $\psi(x)$ *выполнены условия теоремы* 4, *то существует постоянная* $c > 0$ *такая, что выполняется равномерная оценка*

$$0 \leq u_{k-1}(x, h, \varepsilon) - u_k(x, h, \varepsilon) \leq ch, \tag{20}$$

где константа c *не зависит ни от* h, *ни от* ε, *ни от* k.

Первая часть теоремы 6 доказывается так же, как и теорема 3. Из (19) следует

$$\Delta u_k - h^{-1}\int\limits_{w_{k-1}}^{u_k} a_\varepsilon(\tau)d\tau = -\lambda h^{-1}[\mathrm{X}_\varepsilon(u_k) - \mathrm{X}_\varepsilon(u_0)]\eta \quad \forall x \in D. \tag{21}$$

Вычитая одно из другого уравнения (21) для последовательных значений индекса k, получаем

$$\Delta(u_{k-1} - u_k) - h^{-1}\int\limits_{u_k}^{u_{k-1}} a_\varepsilon(\tau)d\tau =$$

$$= -h^{-1}\int\limits_{w_{k-1}}^{w_{k-2}} a_\varepsilon(\tau)d\tau + \lambda h^{-1}[\mathrm{X}_\varepsilon(u_k) - \mathrm{X}_\varepsilon(u_0)].$$

Из этого уравнения, если учесть знакоопределенность вторых производных в точках локального экстремума, граничные условия и оценку (16), следует оценка (20). Заметим, что последнее уравнение справедливо при $k = 2, \ldots, N$. Случай $k = 1$ исследуется аналогично. Для этого нужно составить уравнение, которое может быть получено из (21) при $k = 1$, если из обеих частей вычесть $\Delta\psi$.

3. Оценка $\nabla u_k(x, h, \varepsilon)$. Из результатов предыдущего пункта следует существование функций

$$F_k(x, h, \varepsilon) = u_k(x, h, \varepsilon) - w_k(x, h, \varepsilon),$$

являющихся решениями краевой задачи (7), (8). Продифференцируем уравнение (7) по любой из переменных x_i, $i = 1, 2, 3$, и обозначим соответствующие производные через $F_k'(x, h, \varepsilon)$. В результате получим

$$\Delta F_k' - h^{-1}[a_\varepsilon(w_k) - \lambda \mathrm{X}_\varepsilon'(u_k)]\, F_k' =$$
$$= -\lambda h^{-1} \mathrm{X}_\varepsilon'(u_k)\, w_k' + \lambda h^{-1} \mathrm{X}_\varepsilon'(u_0)\, u_0'. \tag{22}$$

Теорема 7. *Пусть выполнены условия теорем 3, 6, $K_R(x_0)$ — шар радиуса R с центром в точке x_0, причем $K_R(x_0) \subset D$. Тогда справедлива оценка*

$$\left|F_k'(x_0)\right| \le \left(c\sqrt{h}\right)^{-3} \exp\left\{-R\sqrt{h^{-1} a_\varepsilon\left[w_k(x_0)\right]}\right\} \left|\int_{\partial K_R} F\, ds\right| +$$

$$+ \lambda \,|\, \mathrm{X}_\varepsilon'[u_0(x_0)]\,|\,|\nabla u_0(x_0)| + c\sqrt{h}\, \varepsilon^{-2} \max\left\{\max_{K_R} |\nabla u_k|, \max_{K_R} |\nabla w_k|\right\}, \tag{23}$$

где константа c не зависит ни от ε, ни от h, ни от k.

Обозначим

$$b_{k,\varepsilon}(x) = a_\varepsilon[w_k(x, h, \varepsilon)] - \lambda \mathrm{X}_\varepsilon'[u_k(x, h, \varepsilon)],$$

$$\Gamma_R(x-y) = \mathrm{Sh}\, \frac{R - |x-y|}{\sqrt{h}} \sqrt{b_{k,\varepsilon}(x_0)} \left\{4\pi |x-y|\, \mathrm{Sh}\, \frac{R}{\sqrt{h}} \sqrt{b_{k,\varepsilon}(x_0)}\right\}^{-1}.$$

Выбирая $\Gamma_\rho(x-y)$ в качестве функции Грина, получаем интегральное представление

$$F_k'(x_0) = -\int_{\partial K_\rho} F_k' \frac{\partial \Gamma_\rho(x_0 - y)}{\partial n}\, ds +$$

$$+ \int_{K_\rho} \left[b_{k,\varepsilon}(x_0) - b_{k,\varepsilon}(y)\right] F_k' h^{-1} \Gamma_\rho(x_0 - y) dy +$$

$$+ \lambda \int_{K_\rho} \left\{\mathrm{X}_\varepsilon'\left[u_k(y)\right] - \mathrm{X}_\varepsilon'\left[u_k(x_0)\right]\right\} w_k' h^{-1} \Gamma_\rho(x_0 - y) dy +$$

$$+ \lambda \int_{K_\rho} \left\{\mathrm{X}_\varepsilon'\left[u_0(x_0)\right] - \mathrm{X}_\varepsilon'\left[u_0(y)\right]\right\} u_0' h^{-1} \Gamma_\rho(x_0 - y) dy +$$

$$+ \lambda \mathrm{X}_\varepsilon'[u_k(x_0)] \int_{K_\rho} w_k' h^{-1} \Gamma_\rho(x_0 - y) dy -$$

$$- \lambda \mathrm{X}_\varepsilon'[u_0(x_0)] \int_{K_\rho} u_0' h^{-1} \Gamma_\rho(x_0 - y) dy.$$

Учитывая, что $\partial \Gamma_\rho(x_0 - y)/\partial n \quad \forall\, y \in \partial K_\rho(x_0)$ не зависит от переменной интегрирования, разделим обе части предыдущего равенства на эту величину и проинтегрируем по ρ от 0 до R. После очевидных преобразований получим оценку (23).

Оценку типа (23) можно получить и для производных более высокого порядка. Для этого уравнение (22) нужно продифференцировать по любой из переменных x_i, $i = 1, 2, 3$, и провести рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 7. В результате получим такое следствие.

Следствие 2. *Пусть выполнены условия предыдущей теоремы. Тогда справедлива оценка*

$$\left|F_k''(x_0)\right| \le \left(c\sqrt{h}\right)^{-3}\exp\left\{-\frac{R}{\sqrt{h}}\sqrt{a_\varepsilon\left[w_k(x_0)\right]}\right\}\left|\int\limits_{\partial K_\rho} F_k'\,ds\right| +$$

$$+\; c_1\left\{|\,\mathrm{X}_\varepsilon''[u_0(x_0)]\,| + |\,\mathrm{X}_\varepsilon''[u_k(x_0)]\,| + |\,\mathrm{X}_\varepsilon'[w_k(x_0)]\,|\right\} + c_2\sqrt{h}\;\varepsilon^{-3}, \qquad (24)$$

где константы c_1 *и* c_2 *зависят от* ∇u_k, *а также от первых и вторых производных функций* u_0, w_k, *константа* c *такая же, как в* (23).

Преобразуем оценки (23) и (24), использовав известное неравенство

$$x^m e^{-x} \le m^m e^{-m} \quad \forall\, x \ge 0, \quad \forall\, m > 0.$$

Следствие 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 7 *и*

$$R \ge h^\delta, \quad \delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \quad \varepsilon^2 \ge h^\delta, \quad m\left(\frac{1}{2} - \delta\right) > \frac{3}{2}.$$

Тогда справедлива оценка

$$\left|F_k'(x_0)\right| \le c h^{\delta_1}\left|\int\limits_{\partial K_R} F_k\,ds\right| + \lambda\,|\,\mathrm{X}_\varepsilon'[u_0(x_0)]\,|\max_D|\nabla u_0| +$$

$$+\; c\max_{K_R}|\nabla w_k| + c h^{1/2-\delta}\max_{K_R}|\nabla u_k|, \quad \delta_1 = m\left(\frac{1}{2} - \delta\right) - \frac{3}{2}. \qquad (25)$$

Если, кроме того, $\mathrm{X}_\varepsilon'[u_0(x_0)] = 0$, $\mathrm{X}_\varepsilon'[u_k(x_0)] = 0$, *то*

$$\left|F_k'(x_0)\right| \le c h^{\delta_1}\max_{K_R}\left|F_k\right|. \qquad (26)$$

Перейдем теперь к оценке $\nabla u_k(x, h, \varepsilon)$.

Теорема 8. *Пусть* $\varphi_k(x) = 1 + d_0$ *на* Γ_3, $d_0 > 0$,

$$D_h = \left\{x \in D:\ \mathrm{dist}\,(x, \partial D) = h^\delta,\ \delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)\right\},$$

$\varepsilon^3 \ge h^\delta$ *и выполнены условия теоремы* 6. *Тогда справедлива оценка*

$$|\nabla u_k(x, h, \varepsilon)| \le c\left(1 + \lambda\left|\mathrm{X}_\varepsilon'\left[u_0(x_0)\right]\right|\max_D|\nabla u_0|\right), \qquad (27)$$

где константа c *не зависит ни от* h, *ни от* ε, *ни от* k.

Докажем это утверждение. $\nabla u_k(x, h, \varepsilon)$ в окрестности границы $\Gamma_2 \cup \Gamma_3$ ограничен в силу тех же причин, что и $\nabla w_k(x, h, \varepsilon)$. На Γ_1 в силу краевого условия (6) касательные производные функции $u_k(x, h, \varepsilon)$ не могут иметь ни положительного максимума, ни отрицательного минимума, а нормальная производная ограничена. Предположим теперь, что функция

$$u_k'(x, h, \varepsilon) = \frac{\partial u_k(x, h, \varepsilon)}{\partial x_3}, \quad i = 1, 2, 3,$$

принимает максимальное значение в точке $x \in D$. Тогда из уравнения

$$\Delta u_k' - h^{-1}\left[a_\varepsilon(u_k) - \lambda\,\mathrm{X}_\varepsilon'(u_k)\right]u_k' =$$

$$= -h^{-1}\left[a_\varepsilon(w_{k-1})\,w_{k-1}' - \lambda\,\mathrm{X}_\varepsilon'(u_0)\,u_0'\right] \qquad (28)$$

следует

$$a_\varepsilon(u_k)\,u_k' \le a_\varepsilon(w_{k-1})\,w_{k-1}' - \lambda\,\mathrm{X}_\varepsilon'(u_0)\,u_0'.$$

Аналогичное неравенство может быть получено и в точке локального минимума. Поэтому можно утверждать, что

$$|\nabla u_k| \le c\left(\max_D\left|\nabla w_{k-1}\right| + \varepsilon^{-1}\max_D|\nabla u_0|\right) \quad \forall\, x \in \overline{D}. \tag{29}$$

Для завершения доказательства осталось сослаться на оценку (23).

4. Предельный переход.

Теорема 9. *Пусть выполнены условия теорем* 3, 4

$$\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_3} \ge d_0 > 0 \quad \forall\, x \in \Gamma_3, \quad \frac{\partial\varphi_k}{\partial n} + \beta\varphi_k \ge 0 \quad \forall\, x \in \Gamma_1,$$

$$\Delta\varphi_k - h^{-1}\int\limits_{\varphi_{k-1}}^{\varphi_k} a_\varepsilon(\tau)d\tau \le 0 \quad \forall\, x \in D, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x_3} > 0 \quad \forall\, x \in D. \tag{30}$$

Тогда всюду в D *выполнены неравенства*

$$\frac{\partial w_k}{\partial x_3} > 0, \quad \frac{\partial u_k}{\partial x_3} > 0, \quad k = 1, 2, \ldots, N. \tag{31}$$

Из соответствующего краевого условия (11) следует, что функция

$$w_k'(x, h, \varepsilon) = \frac{\partial w_k(x, h, \varepsilon)}{\partial x_3}$$

не может принимать отрицательное минимальное значение на Γ_1. Из (30) с помощью принципа максимума получим

$$w_k - \varphi_k \le 0 \quad \forall\, x \in \overline{D}, \quad w_k' \ge \varphi_k' \ge d_0 > 0 \quad \forall\, x \in \Gamma_3. \tag{32}$$

На Γ_2 $w_k' \ge 0$, так как $w_k > 0$ в D. Предположим теперь, что первое из неравенств (31) доказано для $k = n$. Пусть w_{n+1}' принимает минимальное значение в D. Тогда из (11) получим

$$a_\varepsilon(w_{n+1})\,w_{n+1}' \ge a_\varepsilon(w_n)\,w_n' > 0.$$

С помощью аналогичных рассуждений доказывается и второе неравенство (31), если учесть (26), (28) и (32).

***Следствие* 4.** *Пусть выполнены условия предыдущей теоремы,* $w(x, t, h, \varepsilon)$ — *кусочно-линейные аппроксимации по* t *функций* $w_k(x, h, \varepsilon)$. *Тогда*

$$\exists \lim_{\varepsilon, h \to \infty} w(x, t, h, \varepsilon) = w(x, t) \quad \forall\, (x, t) \in \overline{D}_T,$$

$$w(x, t) \in C^{1+\alpha, 1+\alpha/2}\left(\overline{D}_T\right), \quad \frac{\partial w}{\partial t} < 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x_3} > 0 \quad \forall\, (x, t)\colon\ w(x, t) \ne 1. \tag{33}$$

Доказательство следует из результатов п. 2.

Заметим, что многочисленные достаточные условия, приведенные выше, обеспечивают выполнение (33) для функции $w(x, t)$, являющейся решением следующей начально-краевой задачи:

$$\Delta w - a(w)\frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad \forall\, (x, t) \in D_T\colon\ w(x, t) \ne 1, \tag{34}$$

$$\frac{\partial w}{\partial n} + \beta w = 0 \quad \forall (x, t) \in \Gamma_1 \times (0, T); \quad w = 0 \quad \forall (x, t) \in \Gamma_2 \times (0, T);$$
$$w = \varphi(x, t) \quad \forall (x, t) \in \Gamma_3 \times (0, T), \quad w(x, 0) = \psi(x). \tag{35}$$

Для этого, например, достаточно предполагать, что исходные данные задачи (1) – (4) подчинены требованиям

$$\psi(x) \in C^2(D) \cap C^{1+\alpha}(\overline{D}), \quad \alpha \in (0, 1), \quad \exists M > 0:$$
$$-M \le \Delta\psi \le 0 \quad \forall x \in D, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_3} > 0 \quad \forall x \in D, \quad a_1 \ge a_2; \tag{36}$$

$$\varphi(x, t) \in C^{2,1}(D_T) \cap C^{1+\alpha, 1+\alpha/2}\left(\overline{D}_T\right), \quad \varphi(x, t) > 1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} < 0,$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} > 0 \quad \forall (x, t) \in \Gamma_3 \times (0, T); \tag{37}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} + \beta \varphi \ge 0 \quad \forall (x, t) \in \Gamma_1 \times (0, T),$$
$$\Delta\varphi - a(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \le 0 \quad \forall (x, t) \in D_T: \ \varphi(x, t) \ne 1; \tag{38}$$

выполнены соответствующие условия согласования начальных и краевых условий.

Теорема 10. *Пусть выполнены условия* (36) – (38), $a_1 \ge a_2$. *Тогда существует единственное решение* $u(x, t)$ *задачи* (1) – (4), *причем*

$$u(x, t) \in C^{1+\alpha, 1+\alpha/2}\left(\overline{\Omega}_T\right) \times C^{1+\alpha, 1+\alpha/2}\left(\overline{G}_T\right),$$

свободная граница γ_T *задается уравнением*

$$x_3 = x_3(x_1, x_2, t) \in C^{1+\alpha, 1+\alpha/2}(x_1^2 + x_2^2 < b^2, \ 0 < t < T).$$

Пусть $\eta(x, t) \in C^{2,1}(D_T)$, исчезающая на $\Gamma_2 \times (0, T)$, $\Gamma_3 \times (0, T)$ и при $t = T$. Умножим уравнение (5) на $h\eta_k(x) = h\eta(x, kh)$, проинтегрируем по области D и просуммируем по k от 1 до N. После несложных преобразований получим

$$h \sum_{k=1}^{N} \int_D \left\{ \nabla u_k \nabla \eta_k + h^{-1} \int_{u_{k-1}}^{u_k} a_\varepsilon(\tau) d\tau \cdot \eta_k + \lambda X_\varepsilon(u_k) h^{-1}\left(\eta_{k+1} - \eta_k\right) \right\} dx +$$
$$+ h \sum_{k=1}^{N} \left[\int_D \lambda \Delta\psi_k h^{-1}\left(F_{k-1} - F_k\right) dx + \beta \int_{\Gamma_1} u_k \eta_k \, ds \right] +$$
$$+ \lambda \int_D X_\varepsilon(u_0) \eta(x, h) dx = 0, \tag{39}$$

где $\Delta\psi_k = -h \sum_{m=k}^{N} \Delta\eta_m$.

Рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 7, легко показать, что

$$F_k(x, h, \varepsilon) - F_{k-1}(x, h, \varepsilon) = o(h), \quad h \to 0,$$

за исключением множества, мера которого стремится к нулю, если $h \to 0$ и $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon^3 \geq h^\delta$, $\delta \in (0, 1/2)$. А на указанном множестве

$$|F_{k-1} - F_k| = |u_{k-1} - u_k + w_k - w_{k-1}| \leq 2ch.$$

Поэтому соответствующее слагаемое в (39) исчезнет после перехода к пределу при $h \to 0$, $\varepsilon \to 0$. Отметим также, что ∇u_k равномерно ограничен в D, за исключением множества, мера которого стремится к нулю при $h \to 0$ и $\varepsilon \to 0$. Совершим теперь предельный переход в (39) при $h \to 0$, $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon^3 \geq h^\delta$, $\delta \in$ $\in (0, 1/2)$. В результате получим

$$\int\limits_{D_T} \left[\nabla u \nabla \eta + a(u) u_t \eta + \lambda \mathrm{X}(u) \eta_t \right] dx\,dt + \beta \int\limits_{\Gamma_1 \times (0,T)} u \eta \, ds\,dt +$$

$$+ \lambda \int\limits_D \mathrm{X}(\psi) \eta(x,0)\, dx = 0.$$

Пусть $u(x, t, h, \varepsilon)$ — кусочно-линейные аппроксимации по t функций $u_k(x, h, \varepsilon)$, а

$$\gamma(h, \varepsilon) = \{x \in D:\ u(x, t, \varepsilon, h) = 1 - h^\delta,\ \delta \in (0, 1/2)\}.$$

Если эта поверхность не принадлежит множеству

$$\omega_0(\varepsilon, h) = \{x \in D:\ 1 - h^\delta < u_0(x) < 1 + \varepsilon\},$$

то легко доказать, используя результаты теоремы 7 и следствий из нее, что функции $u(x, t, h, \varepsilon)$ в окрестности $\gamma(h, \varepsilon)$ имеют те же свойства гладкости, что и $w(x, t, h, \varepsilon)$, причем $\nabla u(x, t, h, \varepsilon)$ равномерно оттграничен от нуля. Если же поверхность $\gamma(h, \varepsilon)$ или ее часть попадают в слой $\omega_0(\varepsilon, h)$ при $h \to 0$, $\varepsilon \to 0$, то это означает, что свободная граница частично будет совпадать с начальной поверхностью, и ее гладкость может быть установлена после предельного перехода. Все остальные выводы теоремы являются следствиями известных фактов.

Отметим, что существование классического решения двухфазной контактной задачи Стефана в малом по времени в случае условий Дирихле на фиксированной границе доказано в [9]. Нам удалось другим методом получить классическое решение в случае краевых условий третьего рода на фиксированной границе на любом конечном промежутке времени.

1. *Фридман А.* Вариационные принципы и задачи со свободными границами. – М.: Наука, 1990. – 536 с.
2. *Данилюк И. И.* О задаче Стефана // Успехи мат. наук. – 1985. – **40**, № 5. – С. 133 – 185.
3. *Базалий Б. В.* Задача Стефана // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1986. – № 11. –С. 3 – 7.
4. *Мейрманов А. М.* Задача Стефана. – Новосибирск: Наука, 1986. – 239 с.
5. *Радкевич Е. В., Меликулов А. К.* Краевые задачи со свободной границей. – Ташкент: Фан, 1988. – 240 с.
6. *Бородин М. А.* О разрешимости двухфазной нестационарной задачи Стефана // Докл. АН СССР. – 1982. – **263**, № 5. – С. 1040 – 1042.
7. *Borodin M. A.* Existense of the classic solution of a two phase multidimensional Stefan problem on any finite time interval // Intern. Ser. Numer. Math. – 1992. – **106**. – P. 97 – 103.
8. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М.: Наука, 1973. – 576 с.
9. *Радкевич Е. В.* О спектре пучка двухфазной задачи Стефана // Докл. АН СССР. – 1990. – **314**, № 6. – С. 1322 – 1327.

Получено 22.10.92