УДК 517.54

В. И. Рязанов, д-р физ.-мат. наук
(Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

О ТЕОРЕМАХ СХОДИМОСТИ ДЛЯ ГОМЕОМОРФИЗМОВ КЛАССА СОБОЛЕВА

A new convergence theorem for Sobolev class homeomorphisms with a locally summable upper bound for deformations has been proved. Generalizations of the known Strebel and Bers – Boyarsky convergence theorems have been obtained as corollaries.

Доведена нова теорема збіжності для гомеоморфізмів класу Соболєва з локально сумовною верхньою межею деформацій. Як висновки одержані узагальнення відомих теорем збіжності Штребеля та Берса – Боярського.

В статье продолжены исследования гомеоморфизмов плоскости с обобщенными производными, начатые в работе [1], где была установлена полунепрерывность дилатации в среднем. Исходным пунктом этих исследований послужила знаменитая лемма Геринга – Лехто о топологических отображениях с частными производными [2, 3]. Эти исследования были стимулированы также достижениями последнего времени (см., например, [4, 5]).

В настоящей работе рассмотрены гомеоморфизмы f класса Соболева $W^1_{1,\,\mathrm{loc}}$ с границей дилатации $Q(z)\in L^1_{\mathrm{loc}}$. Аналогично [6] будем называть такие гомеоморфизмы $Q(z)$-квазиконформными отображениями, хотя первоначально М. Шиффер и Г. Шобер ввели это понятие для случая, когда $f\in W^1_{2,\,\mathrm{loc}}$ и $Q(z)\in L^\infty$. На экстремальные проблемы в классах подобного рода обратил внимание еще О. Тейхмюллер (1939). Подобные классы изучались в работах К. Андриян-Казаку, Р. Кюнау, С. Л. Крушкаля и многих других авторов (см., например, библиографию [7]).

В п. 1 приведены элементы теории инвариантно-выпуклых множеств, в терминах которых формулируются основные результаты. В п. 2 сформулирована теорема 1 и следствия из нее о замкнутости $Q(z)$-квазиконформных отображений, об области значений и множестве хорошей аппроксимации предельной комплексной характеристики. В частности, следствие 1 усиливает и обобщает теорему сходимости К. Штребеля [8], следствия 2 и 3 — теорему Берса – Боярского (см., например, [9, 10]). Наконец, в п. 3 доказана первая часть теоремы 1, а в п. 5 после лемм п. 4 — вторая ее часть.

1. Об инвариантно-выпуклых множествах. Пусть $\Delta=\{\zeta\in\mathbb{C}:|\zeta|<1\}$ — единичный круг и G — группа всех дробно-линейных отображений Δ на себя. Как известно, G совпадает с группой всех конформных автоморфизмов Δ (см., например, [11, с. 342]). Множество M из Δ назовем *инвариантно-выпуклым,* если все множества $g(M)$, $g\in G$, являются выпуклыми.

Приведем геометрический критерий инвариантной выпуклости. Для этого заметим, что через каждые три точки $\mu_1,\mu_2\in\Delta$ и $\eta\in\partial\Delta$ проходит единственная окружность. Замкнутую дугу этой окружности, соединяющую μ_1 и μ_2 внутри Δ, обозначим через $[\mu_1,\mu_2](\eta)$. В силу кругового свойства дробно-линейных отображений [11, с. 111] очевидно следующее утверждение.

Предложение 1. *Замкнутое множество M из Δ инвариантно-выпукло тогда и только тогда, когда вместе с каждой парой точек $\mu_1,\mu_2\in M$ этому множеству принадлежит и вся совокупность дуг $[\mu_1,\mu_2](\eta)$, $|\eta|=1$.*

В соответствии с этим *инвариантно-выпуклой оболочкой* $\operatorname{inv\,co} M$ замкнутого множества M из Δ назовем минимальное по включению замкнутое инвариантно-выпуклое множество, содержащее M.

© В. И. РЯЗАНОВ, 1995

Дадим конструктивное описание $\operatorname{inv\,co} M$. Замкнутый круг D из $\overline{\Delta}$, касающийся $\partial\Delta$, назовем опорным к замкнутому множеству M из Δ, если $M \subseteq D$ и $\partial\Delta \cap \partial M \neq \varnothing$. Обозначим через $D_\mu(\eta)$ единственный опорный к M круг, касающийся $\partial\Delta$ в точке η, $|\eta| = 1$.

Предложение 2 [12, с. 637]. *Для любого замкнутого множества M из Δ*

$$\operatorname{inv\,co} M = \bigcap_{|\eta|=1} D_\mu(\eta). \tag{1}$$

Далее через $\operatorname{inv\,ext} M$ обозначается совокупность всех *инвариантно-крайних точек* множества M. Так мы называем любую точку $\mu_0 \in \partial M$, которая является ближайшей к точке η по или против часовой стрелки на некоторой опорной окружности $\partial D_\mu(\eta)$, $|\eta| = 1$.

2. Теоремы сходимости. Сохраняющий ориентацию гомеоморфизм f класса Соболева $W^1_{1,\,\mathrm{loc}}$ будем называть *$Q(z)$-квазиконформным* ($Q(z)$-*к. к.*) отображением, если он удовлетворяет уравнению Бельтрами

$$f_{\bar z} = \mu(z) f_z \tag{2}$$

с дилатацией

$$p(z) = (1 + |\mu(z)|)/(1 - |\mu(z)|) \leq Q(z) \tag{3}$$

почти всюду (п. в.), где $Q(z)\colon \mathbb{C} \to I = [1, \infty]$ — произвольная функция. Коэффициент $\mu(z)$ принято называть *комплексной характеристикой* отображения f. При этом для определенности полагаем $\mu(z) = 0$, когда $f_z = f_{\bar z} = 0$.

Теорема 1. *Пусть f_n, $n = 1, 2, \ldots$, — последовательность $Q(z)$-к. к. отображений с локально суммируемой $Q(z)$ и пусть f_n сходится локально равномерно к некоторому гомеоморфизму f.*

Тогда f является $Q(z)$-к. к. отображением $(f_n)_z \to f_z$, $(f_n)_{\bar z} \to f_{\bar z}$ слабо в L^1_{loc}. Кроме того, п. в. на E^*

$$\mu(z) \in \operatorname{inv\,co} M(z) \tag{4}$$

и $\mu_n(z) \to \mu(z)$ по мере на множестве

$$E_0 = \{ z \in E^*\colon \mu(z) \in \operatorname{inv\,ext} M(z) \}, \tag{5}$$

где E^* — множество всех регулярных точек отображения f и

$$M(z) = \operatorname*{Ls}_{n\to\infty} \{\mu_n(z)\}. \tag{6}$$

Здесь, как обычно, через $\operatorname{Ls}\{\mu_n(z)\}$ обозначен *верхний топологический предел* одноточечных множеств $\{\mu_n(z)\}$, т. е. множество всех точек накопления последовательности $\mu_n(z)$ [13, с. 344]. Точка z называется *регулярной точкой* отображения f, если f дифференцируемо в этой точке и якобиан $J(z) = |f_z|^2 - |f_{\bar z}|^2 \neq 0$ [9, с. 10].

Из теоремы 1, в частности, получаем следующее усиление теоремы сходимости К. Штребеля [8].

***Следствие* 1.** *В условиях теоремы 1 п. в.*

$$|\mu(z)| \leq \limsup_{n\to\infty} |\mu_n(z)| \tag{7}$$

и $\mu_n(z) \to \mu(z)$ по мере на множестве

$$\mathcal{E}_0 = \left\{ z \colon |\mu(z)| = \limsup_{n\to\infty} |\mu_n(z)| \right\}. \tag{8}$$

Из этой теоремы также следует обобщение теоремы сходимости Берса – Боярского (см., например, [9, 10]).

Следствие 2. *Пусть в условиях теоремы* 1 $\mu_n(z) \to \kappa(z)$ *п. в. при* $n \to \infty$. *Тогда* $\mu(z) = \kappa(z)$ *п. в. на* E^*.

Однако теорема 1 позволяет также проводить более тонкий, поточечный анализ.

Следствие 3. *Пусть в условиях теоремы* 1 $\mu_n(z) \to \kappa(z)$ *при* $n \to \infty$ *на некотором измеримом множестве* $E \subseteq E^*$ *по норме* L^p, $1 \le p \le \infty$, *просто по мере или п. в. Тогда* $\mu(z) = \kappa(z)$ *п. в. на* E.

Здесь, как обычно, если $\operatorname{mes} E = \infty$, под сходимостью по мере на множестве E понимается таковая на любом подмножестве $\mathcal{E} \subseteq E$ с $\operatorname{mes} \mathcal{E} < \infty$ (см., например, [14, с. 57]).

3. Доказательство первой части теоремы 1. Здесь мы легко докажем первую часть теоремы 1, включая соотношение (4).

Действительно, по предложению 1 работы [1] предельное отображение $f \in W^1_{1,\mathrm{loc}}$ и $(f_n)_z \to f_z$, $(f_n)_{\bar z} \to f_{\bar z}$ при $n \to \infty$ слабо в L^1_{loc}, а по следствию 5 той же работы дилатация этого отображения $p(z) \le Q(z)$ п. в. Остается доказать (4).

В силу предложения 2 п. в.

$$\operatorname{inv}\operatorname{co} M(z) = \bigcap_{m \in N(z)} K_m, \tag{9}$$

где K_m, $m = 1, 2, \ldots$, — некоторая перенумерация всех замкнутых кругов из Δ, координаты центров и радиусы которых являются рациональными числами, а $N(z)$ — множество всех натуральных чисел $m = 1, 2, \ldots$, для которых $M(z) \subseteq K_m$. Поэтому достаточно показать, что $\mu(z) \in K_m$ при всех $m \in N(z)$ для почти всех $z \in E^*$.

Пусть c_m и k_m — центр и радиус круга K_m в гиперболической метрике Δ (см., например, [11, с. 128–129]). Тогда при помощи дробно-линейного отображения Δ на себя

$$\gamma_m(\mu) = \frac{\mu - c_m}{1 - \mu \bar{c}_m} \tag{10}$$

круг K_m преобразуется в некоторый круг с центром в нуле. Евклидов радиус этого круга обозначим через r_m.

По следствию 5 работы [1] при каждом $m = 1, 2, \ldots$

$$|\gamma_m(\mu(z))| \le r_m \tag{11}$$

для всех $z \in E_m \setminus e_m$, где E_m — множество всех точек $z \in E^*$, для которых $M(z) \subseteq K_m$, а e_m — множество нулевой меры. Однако (11) эквивалентно включению $\mu(z) \in K_m$ при $z \in E^*$, и потому включение (4) доказано для $z \in E^* \setminus E$, где $E = \bigcup e_m$ — множество нулевой меры.

4. Основные леммы.

Лемма 1. *В условиях теоремы* 1 *для всех* $z \in E^*$ *выполняется неравенство*

$$\beta(\mu(z)) \le \liminf_{h\to 0} \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{h^2} \iint\limits_{K(z,h)} \beta(\mu_n(\zeta))\, d\xi\, d\eta, \tag{12}$$

где

$$\beta(\nu) = \frac{|\nu|^2 - \operatorname{Re}\nu}{1-|\nu|^2}, \tag{13}$$

а $K(z, h)$ *— осепараллельный квадрат с центром в точке* z *и длиной стороны* h.

Лемма 2. *В условиях теоремы* 1

$$\iint\limits_{E} \beta(\gamma(\mu(z)))\, dx\, dy \le \liminf_{n\to\infty} \iint\limits_{E_n^*} \beta(\gamma(\mu_n(z)))\, dx\, dy, \tag{14}$$

где $\gamma(\kappa): \Delta \to \Delta$ *— произвольное дробно-линейное отображение единичного круга* Δ *на себя,* $E \subseteq E^*$ *— произвольное ограниченное измеримое множество, а* E_n^* *— подмножества* E *всех регулярных точек отображений* f_n.

Лемма 3. *В условиях теоремы* 1 *пусть* $E \subseteq E^*$ *— произвольное ограниченное измеримое множество, на котором* $Q(z) \le Q_0 < \infty$. *Тогда для любой измеримой функции* $\theta(z): \mathbb{C} \to \mathbb{R}$

$$\liminf_{n\to\infty} \iint\limits_{E} \beta(\gamma_n(z)\, e^{-i\theta(z)})\, dx\, dy \ge 0, \tag{15}$$

где

$$\gamma_n(z) = \chi_n(z)\, \gamma(z, \mu(z)), \tag{16}$$

χ_n *— характеристические функции множеств* E_n^* *из предыдущей леммы, а*

$$\gamma(z, \kappa) = \frac{\kappa - \mu(z)}{1 - \kappa\overline{\mu(z)}} \tag{17}$$

— семейство дробно-линейных отображений Δ *на себя, зависящее от* z *как от параметра.*

Лемма 4. *Пусть в условиях и обозначениях предыдущей леммы* $E \subseteq \mathcal{E}$, *где*

$$\mathcal{E} = \{z : N(z) \subseteq K(z)\}, \tag{18}$$

$$N(z) = \operatorname*{Ls}_{n\to\infty} \{\gamma_n(z)\}, \tag{19}$$

$$K(z) = \{\kappa \in \mathbb{C} : |\kappa - e^{i\theta(z)}/2| \le 1/2\}. \tag{20}$$

Тогда существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{E} \beta(\gamma_n(z)\, e^{-i\theta(z)})\, dx\, dy = 0. \tag{21}$$

В силу ограниченности в (21) подынтегральных функций отсюда имеем [15, с. 316] такое следствие.

***Следствие* 4.** *Подынтегральные функции в* (21) *сходятся к нулю слабо в пространстве* L^1_{loc}.

Поэтому [12, с. 644] получаем такое утверждение.

***Следствие* 5.** *В условиях теоремы* 1

$$\alpha_n(z) = |\gamma_n(z)|^2 - \operatorname{Re}\gamma_n(z)\, e^{-i\theta(z)} \to 0 \tag{22}$$

при $n \to \infty$ *по мере на множестве* E. *В частности, найдется подпоследовательность* $\alpha_{n_k}(z) \to 0$ *при* $k \to \infty$ *п. в. на* E.

Наконец, при доказательстве второй части теоремы 1 нам потребуется следующее утверждение.

Предложение 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и* X_n *— характеристические функции* $E^*\setminus E_n^*$, *где* E^* *и* E_n^* *— множества всех регулярных точек отображений* f *и* f_n, $n = 1, 2, \ldots$, *соответственно. Тогда* $X_n \to 0$ *при* $n \to \infty$ *по мере.*

Это предложение базируется на следующем важном дополнении к теореме 1 из работы [1].

Предложение 4. *В условиях теоремы* 1

$$\iint\limits_E p(z)\,dx\,dy \le \liminf_{n\to\infty} \iint\limits_E p_n(z)\,dx\,dy \tag{23}$$

для любого ограниченного измеримого множества $E \subseteq \mathbb{C}$.

Замечание **1.** Пусть

$$p^{\nu}(\mu) = \frac{1+|d(\mu,\nu)|}{1-|d(\mu,\nu)|}, \tag{24}$$

где

$$d(\mu,\nu) = \frac{\mu-\nu}{1-\mu\overline{\nu}}. \tag{25}$$

Тогда предел

$$\lim_{|\nu|\to 1} \frac{p^{\nu}(\mu)}{p^{\nu}(0)} = 1 \tag{26}$$

является локально равномерным относительно $\mu \in \Delta$.

Действительно, как легко видеть,

$$p^{\nu}(0) = N = \frac{1+|\nu|}{1-|\nu|}, \tag{27}$$

а $\max$ и $\min p^{\nu}(\mu)$ по $\mu \in \Delta_q = \{\kappa \in \mathbb{C} : |\kappa| \le q\}$, $0 \le q < 1$, достигается для $\pm q\nu/|\nu|$ соответственно, как это явствует из кругового свойства дробно-линейных отображений при $N \ge Q = (1+q)/(1-q)$. Непосредственным вычислением проверяется, что $p^{\nu}(\mu) \sim N$ при $N \to \infty$ для указанных экстремальных значений μ.

Доказательство леммы **1.** Итак, пусть $\varphi(z; dz) = f_z\,dz + f_{\overline{z}}\,d\overline{z}$ и $\varphi_n(z; dz) = (f_n)_z\,dz + (f_n)_{\overline{z}}\,d\overline{z}$ во всех точках дифференцируемости отображений f и f_n, $n = 1, 2, \ldots$, соответственно.

По определению дифференциала в каждой точке $z \in E^*$ для любого $\varepsilon > 0$ при $h < \delta = \delta(\varepsilon, z)$ и всех $\zeta \in K(z; h)$

$$|f(\zeta) - f(z) - \varphi(z; \zeta - z)| < h\varepsilon \tag{28}$$

и, следовательно, при $n > N = N(h, \varepsilon, z)$

$$|f_n(\zeta) - f(z) - \varphi(z; \zeta - z)| < h\varepsilon. \tag{29}$$

Последнее означает, что точка $f_n(\zeta)/h$ находится в ε-окрестности параллелограмма, являющегося образом квадрата $K(z; h)$ при аффинном (по переменной ζ) отображении $(f(z) + \varphi(z; \zeta - z))/h$. Отметим, что площадь указанного параллелограмма не зависит от h и равна якобиану $J(z)$ отображения f в точке z. Площадь его ε-окрестности равна $J(z) + \alpha(z; \varepsilon)$, где $\alpha > 0$ — бесконечно малая величина по переменной ε. В силу известного неравенства (см., например, [9, с. 137])

$$\iint\limits_{K(z;h)} J_n(\zeta)\,d\xi\,d\eta \le (J(z)+\alpha(z;\varepsilon))h^2. \tag{30}$$

Обозначим через $l_n(u)$, $-h/2 \le u \le h/2$, длину образа вертикального отрезка из квадрата $K(z;h)$ при отображении f_n, заданного параметрически $z + (u+iv)$, $-h/2 \le v \le h/2$. Поскольку $f_n \in ACL$, $n = 1, 2, \ldots$, то для почти всех $u \in [-h/2, h/2]$ и всех $n = 1, 2, \ldots$

$$l_n(u) = \int\limits_{-h/2}^{h/2} |\varphi_n(z+(u+iv); i)|\,dv. \tag{31}$$

В силу неравенства (29) имеем оценку этой длины снизу

$$l_n(u) \ge \{|\varphi(z;i)| - 2\varepsilon\}h. \tag{32}$$

Интегрируя последнее неравенство по u и учитывая теорему Фубини [16, с. 120], получаем

$$\iint\limits_{K(z;h)} |\varphi_n(\zeta;i)|\,d\xi\,d\eta \ge \{|f_z - f_{\bar z}| - 2\varepsilon\}h^2. \tag{33}$$

Отсюда и из (30) по неравенству Шварца находим

$$\frac{|f_z - f_{\bar z}| - 2\varepsilon}{(J(z)+\alpha(z;\varepsilon))^{1/2}} \le \frac{1}{h}\left\{\iint\limits_{K(z;h)} \frac{|1-\mu_n(\zeta)|^2}{1-|\mu_n(\zeta)|^2}\,d\xi\,d\eta\right\}^{1/2}.$$

Переходя здесь к пределу сначала по $n \to \infty$, затем по $h \to 0$ и, наконец, по $\varepsilon \to 0$, после элементарных преобразований получаем неравенство (12).

Доказательство леммы 2. Как известно, дробно-линейное отображение Δ на себя имеет вид

$$\gamma(\kappa) = \frac{\kappa - \nu}{1 - \kappa\bar\nu}\,e^{i\Theta}, \tag{34}$$

где $\nu \in \Delta \subseteq \mathbb{C}$ и $\Theta \in \mathbb{R}$ — произвольные числа.

Пусть $w = A(z) = e^{i\theta}z + \nu e^{-i\theta}z$ — аффинное N-к. к. отображение, где $N = (1+|\nu|)/(1-|\nu|)$, $\theta = \Theta/2$. Далее, пусть $g = f \circ A^{-1}$ и $g_n = f_n \circ A^{-1}$, $n = 1, 2, \ldots$. Как легко видеть, g и g_n, $n = 1, 2, \ldots$, являются $B(w)$-к. к. отображениями с локально суммируемой $B(w) = NQ(A^{-1}(w))$ и $g_n \to g$ л. р. При этом их комплексные характеристики имеют следующий вид: $\omega = (\chi\gamma)\circ\mu$ и $\omega_n = (\chi_n\gamma)\circ\mu_n$, где χ и χ_n — характеристические функции множеств E^* и E_n^*.

Согласно лемме 1 для любой точки $w \in A(E)$

$$\beta(\omega(w)) \le \liminf_{h\to 0}\ \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{h^2} \iint\limits_{K(w;h)} \beta(\omega_n(\zeta))\,d\xi\,d\eta. \tag{35}$$

Поскольку $|\beta(\omega(w))| \le B(w) \in L^1_{\mathrm{loc}}$, то по теореме о дифференцируемости неопределенного интеграла [16, с. 180] п. в.

$$\beta(\omega(w)) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2} \iint\limits_{K(w;h)} \beta(\omega(\zeta))\,d\xi\,d\eta. \tag{36}$$

Таким образом, для почти всех $w \in A(E)$ для любого $\varepsilon > 0$ при $h < \delta = \delta(w, \varepsilon)$

$$\iint\limits_{K(w;h)} \beta(\omega(\zeta))\,d\xi\,d\eta \le \liminf_{n\to\infty} \iint\limits_{K(w;h)} \beta(\omega_n(\zeta))\,d\xi\,d\eta + \varepsilon h^2.$$

В силу регулярности меры Лебега [16, с. 108] $\mathcal{E} = A(E)$ можно погрузить в открытое ограниченное множество Ω с $\operatorname{mes}(\Omega \setminus \mathcal{E}) < \varepsilon$. Система квадратов $K(w; h) \subseteq \Omega$, $w \in \mathcal{E}$, $h < \min(\delta(w, \varepsilon), \rho(w, \partial\Omega)/\sqrt{2})$, образует покрытие множества $\mathcal{E}$ в смысле Витали и по теореме Витали [16, с. 167] найдется не более чем счетная последовательность непересекающихся квадратов $\mathcal{E}_m = K(w_m; h_m)$ из указанной системы такая, что $\operatorname{mes}(\mathcal{E} \setminus \bigcup \mathcal{E}_m) = 0$.

Поскольку $|\beta(\omega_n(\zeta))| \le B(w) \in L^1_{\mathrm{loc}}$, то согласно лемме 6 работы [12], примененной к последовательности

$$a_{mn} = \iint\limits_{\mathcal{E}_m} \beta(\omega_n(\zeta))\,d\xi\,d\eta, \quad m, n = 1, 2, \ldots,$$

а также в силу счетной аддитивности интеграла [16, с. 49]

$$\iint\limits_{\mathcal{E}} \beta(\omega(\zeta))\,d\xi\,d\eta \le \liminf_{n\to\infty} \iint\limits_{\mathcal{E}} \beta(\omega_n(\zeta))\,d\xi\,d\eta + \varepsilon \operatorname{mes}\mathcal{E} + \sigma(\varepsilon), \tag{37}$$

где

$$\sigma(\varepsilon) = 2 \iint\limits_{\Omega\setminus\mathcal{E}} B(\zeta)\,d\xi\,d\eta.$$

Ввиду абсолютной непрерывности интеграла величина $\sigma(\varepsilon)$ является бесконечно малой. Поэтому в силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем неравенство

$$\iint\limits_{\mathcal{E}} \beta(\omega(\zeta))\,d\xi\,d\eta \le \liminf_{n\to\infty} \iint\limits_{\mathcal{E}} \beta(\omega_n(\zeta))\,d\xi\,d\eta.$$

Наконец, после замены переменной получаем (14).

Доказательство леммы 3. Пусть $\mu(z) = \rho(z)e^{i\alpha(z)}$. Рассмотрим последовательность покрытий множества E непересекающимися множествами

$$E_m^{klr} = \{z \in E : \rho(z) \in T_m^k, \theta(z) \in T_m^l, \alpha(z) \in T_m^r\},$$
$$k, l, r = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \quad m = 1, 2, \ldots;$$
$$T_m^l = \{t \in \mathbb{R} : l\,2^{-m} \le t < (l+1)\,2^{-m}\},$$

$l = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, $m = 1, 2, \ldots$, — последовательность сетей, покрывающих $\mathbb{R}$. Полагаем на каждом из множеств E_m^{klr}: $\rho_m(z) = k\,2^{-m}$, $\theta_m(z) = l\,2^{-m}$, $\alpha_m(z) = r\,2^{-m}$, и соответственно на всем E: $\mu^{(m)}(z) = \rho_m(z)e^{i\alpha_m(z)}$. По построению $|\mu^{|m|}(z)| \le |\mu(z)|$ и, кроме того, $\mu^{(m)}(z) \to \mu(z)$ и $\theta_m(z) \to \theta(z)$ равномерно на множестве E.

Перенумеруем множество упорядоченных троек (k, l, r), $k, l, r = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, рядом натуральных чисел $p = 1, 2, \ldots$ и обозначим через $\mathcal{E}_m^p$, $p, m = 1, 2, \ldots$, соответствующие множества E_m^{klr}. По построению при каждом фиксированном $m = 1, 2, \ldots$ множества $\mathcal{E}_m^p$, $p = 1, 2, \ldots$, образуют дизъюнктное покрытие множества E. На каждом из множеств $\mathcal{E}_m^p$, $p = 1, 2, \ldots$, функции $\mu^{(m)}(z)$ и $\theta_m(z)$ являются постоянными.

Применяя лемму 6 из работы [12] и лемму 2, а также используя счетную аддитивность интеграла, имеем

$$\iint\limits_E \beta^{(m)}(z)\,dx\,dy \le \liminf_{n\to\infty} \iint\limits_E \beta_n^{(m)}(z)\,dx\,dy, \tag{38}$$

где

$$\beta^{(m)}(z) = \beta(\gamma^{(m)}(z)\,e^{-i\theta_m(z)}), \qquad \beta_n^{(m)}(z) = \beta(\gamma_n^{(m)}(z)\,e^{-i\theta_m(z)}),$$

$$\gamma^{(m)}(z) = \frac{\mu(z)-\mu^{(m)}(z)}{1-\mu(z)\overline{\mu^{(m)}(z)}}, \qquad \gamma_n^{(m)}(z) = \frac{\mu_n(z)-\mu^{(m)}(z)}{1-\mu_n(z)\overline{\mu^{(m)}(z)}}\,\chi_n(z).$$

Применение леммы 6 из [12] здесь корректно, поскольку $|\beta^{(m)}(z)|$ и $|\beta_n^{(m)}(z)| \le Q_0^2 < \infty$ п. в. на E.

Далее, функции $\beta(\gamma)$ и $e^{i\theta}(\kappa-\nu)/(1-\kappa\overline{\nu})$ бесконечно дифференцируемы по совокупности своих переменных и их производные равномерно ограничены для $\gamma \in \Delta_{k'}$, $(\kappa, \nu, \theta) \in \Delta_k \times \Delta_k \times \mathbb{R}$ при любых k и $k' < 1$, где $\Delta_k = \{\nu \in \mathbb{C} : |\nu| \le k\}$. Поэтому $|\beta^{(m)}(z) - \beta_0(z)| \le c2^{-m}$ и $|\beta_n^{(m)}(z) - \beta_n(z)| \le c2^{-m}$, где $\beta_0(z) \equiv 0$, $\beta_n(z) = \beta(\gamma_n(z)\,e^{-i\theta(z)})$. Следовательно, из (38) следует (15).

***Доказательство леммы* 4.** Согласно теореме Лебега о почленном интегрировании [16, с. 50]

$$\limsup_{n\to\infty} \iint\limits_E \beta_n(z)\,dx\,dy \le \iint\limits_E \limsup_{n\to\infty} \beta_n(z)\,dx\,dy. \tag{39}$$

Принадлежность $z \in \mathcal{E}$ равносильна неравенству

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha_n(z) \le 0, \tag{40}$$

где α_n — функции из (22). Поэтому из (39) имеем

$$\limsup_{n\to\infty} \iint\limits_E \beta_n(z)\,dx\,dy \le 0. \tag{41}$$

Сопоставляя последнее неравенство с (15), получаем (21).

***Доказательство предложения* 4.** Поскольку $Q(z) \in L^1_{\mathrm{loc}}$, согласно теореме о дифференцировании неопределенного интеграла [16, с. 180]

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2} \iint\limits_{K(z;h)} p(\zeta)\,d\xi\,d\eta = p(z) \tag{42}$$

и лемме 1 работы [1]

$$p(z) \le \liminf_{h\to\infty} \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{h^2} \iint\limits_{K(z;h)} p_n(\zeta)\,d\xi\,d\eta \tag{43}$$

п. в., где $K(z;h)$ — квадрат с центром в точке z и длиной стороны h, одна из сторон которого повернута под углом $\theta(z) = (\arg\mu(z))/2 + \pi/2$ — второй характеристики Лаврентьева. Таким образом, п. в. для любого $\varepsilon > 0$ при $h < \delta = \delta(\varepsilon, z)$

$$\iint\limits_{K(z;h)} p(\zeta)\,d\xi\,d\eta \le \liminf_{n\to\infty} \iint\limits_{K(z;h)} p_n(\zeta)\,d\xi\,d\eta + \varepsilon h^2. \tag{44}$$

В силу регулярности меры Лебега E можно погрузить в ограниченное открытое множество Ω с $\operatorname{mes}\Omega\setminus E<\varepsilon$ [16, с. 108]. Система квадратов $K(z; h)\subseteq\Omega$, $z\in\Omega\setminus E_0$, $h<\delta=\delta(\varepsilon, z)$, образует покрытие множества $\Omega\setminus E_0$, где $\operatorname{mes}E_0=0$, в смысле Витали и по теореме Витали [16, с. 167] найдется дизъюнктная система квадратов $E_m=K(z_m; h_m)$, $m=1, 2, \ldots$, из указанного покрытия с $\operatorname{mes}\Omega\setminus\bigcup E_m=0$.

Из счетной аддитивности интеграла, а также леммы 6 из [12], примененной к

$$a_{mn} = \iint\limits_{E_m} p_n(\zeta)\,d\xi\,d\eta, \quad m, n=1, 2, \ldots,$$

получаем

$$\iint\limits_{\Omega} p(\zeta)\,d\xi\,d\eta \le \liminf_{n\to\infty} \iint\limits_{\Omega} p_n(\zeta)\,d\xi\,d\eta + \varepsilon\operatorname{mes}\Omega.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_{E} p(\zeta)\,d\xi\,d\eta \le \liminf_{n\to\infty} \iint\limits_{E} p_n(\zeta)\,d\xi\,d\eta + \varepsilon\operatorname{mes}\Omega + \iint\limits_{\Omega\setminus\mathcal{E}} Q(\zeta)\,d\xi\,d\eta.$$

Наконец, в силу произвольности $\varepsilon>0$ и абсолютной непрерывности интеграла приходим к заключению о справедливости предложения 4.

Доказательство предложения 3. Рассмотрим отображения $g^{\nu}=f\circ h_{\nu}^{-1}$, $g_n^{\nu}=f_n\circ h_{\nu}^{-1}$, $n=1, 2, \ldots$, где

$$w = h_{\nu}(z) = z + \nu\bar{z}, \quad \nu\in\Delta,$$

— аффинное N-к. к. отображение с $\mathrm{N} = (1+|\nu|)/(1-|\nu|)$. Они являются $B(w)$-к. к. отображениями с $B(w) = \mathrm{N}Q(h_{\nu}^{-1}(w))\in L^1_{\mathrm{loc}}$. Пусть $E^{(m)} = E^*\cap\cap\,\mathcal{E}_m$, $E_n^{(m)} = E_n^*\cap E^{(m)}$, где $\mathcal{E}_m=\{z\colon |z|\le m, Q(z)\le m\}$, $m=1, 2, \ldots$.

Согласно предложению 4 в обозначениях замечания 1

$$\iint\limits_{E^{(m)}} \frac{p^{\nu}(\mu(\zeta))}{p^{\nu}(0)}\,d\xi\,d\eta \le \liminf_{n\to\infty} \frac{\operatorname{mes}E^{(m)}\setminus E_n^{(m)}}{p^{\nu}(0)} + \iint\limits_{E_n^{(m)}} \frac{p^{\nu}(\mu_n(\zeta))}{p^{\nu}(0)}\,d\xi\,d\eta, \quad \nu\in\Delta.$$

В силу указанного замечания

$$\operatorname{mes}E^{(m)} \le \liminf_{n\to\infty}\operatorname{mes}E_n^{(m)}. \tag{45}$$

С другой стороны, поскольку $E_n^{(m)}\subseteq E^{(m)}$, то $\operatorname{mes}E_n^{(m)}\le\operatorname{mes}E^{(m)}$. Поэтому

$$\operatorname{mes}E^{(m)} = \lim_{n\to\infty}\operatorname{mes}E_n^{(m)}, \quad m=1, 2, \ldots.$$

Последнее и означает, что $\mathrm{X}_n\to 0$ по мере [14, с. 63–64].

5. Доказательство второй части теоремы 1. Нам оставалось доказать, что $\mu_n\to\mu$ по мере на множестве E_0 из (5).

Последовательность множеств

$$E_m=\{z\in E_0\colon |z|\le m, Q(z)\le m\}, \quad m=1, 2, \ldots,$$

образует исчерпание множества E_0 по мере, т. е. $\operatorname{mes}(E_0\setminus\bigcup E_m)=0$. В силу аксиомы Урысона (см., например, [12, с. 644]), достаточно убедиться, что последовательность функций $\mu_n(z)$ компактна относительно сходимости по мере и что функция $\mu(z)$ является единственной точкой накопления этой последовательности на каждом из множеств E_m, $m = 1, 2, \ldots$. В силу же предложения 3 для этого, в свою очередь, достаточно показать, что последовательность функций $\gamma_n(z)$ из леммы 3 компактна относительно сходимости по мере и что тождественно нулевая функция $\gamma_0(z) \equiv 0$ является единственной точкой накопления этой последовательности на каждом из множеств $E = E_m$, $m = 1, 2, \ldots$. Это видно из неравенства $|\mu_n(z) - \mu(z)| \le 2|\gamma_n(z)|$, справедливого на каждом из множеств $E_m \cap E_n^*$, где E_n^* — множества всех регулярных точек отображений f_n.

Рассмотрим последовательность функций

$$\nu_n(z) = \frac{\gamma_n(z)}{1 - |\gamma_n(z)|^2}, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{46}$$

Поскольку $|\nu_n(z)| \le m^2$ на E_m, то ν_n слабо компактна в $L^1(E_m)$ [15, с. 317]. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $\nu_n \to \nu \in L^1(E_m)$ слабо в $L^1(E_m)$.

По следствию 6 из [12] найдется измеримая функция $\Theta(z)\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ такая, что $N(z) \subseteq K(z)$ п. в. на E_m, где $N(z)$ и $K(z)$ заданы соотношениями (19) и (20) соответственно. Из лемм 3 и 4 получаем, что для любой измеримой функции $\theta(z)\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$

$$\liminf_{n\to\infty} \iint_E \operatorname{Re} \nu_n(z)[e^{-i\Theta(z)} - e^{-i\theta(z)}]\, dx\, dy \ge 0 \tag{47}$$

на любом измеримом множестве $E \subseteq E_m$. Следовательно,

$$\iint_E (\mathrm{pr}_\Theta \nu - \mathrm{pr}_\theta \nu)\, dx\, dy \ge 0, \tag{48}$$

где через $\mathrm{pr}_\theta \nu$ обозначена проекция вектора ν на направление θ. В силу произвольности $E \subseteq E_m$ согласно теореме Лебега о дифференцировании неопределенного интеграла [16, с. 180]

$$\mathrm{pr}_{\Theta(z)} \nu(z) \ge \mathrm{pr}_{\theta(z)} \nu(z) \tag{49}$$

п. в. на E_m. В частности, полагая последовательно $\theta(z) \equiv \theta_l$, где θ_l, $l = 1, 2, \ldots$, — некоторая перенумерация всех рациональных чисел, получаем равенство

$$\mathrm{pr}_{\Theta(z)} \nu(z) = \max_{\theta \in \mathbb{R}} \mathrm{pr}_{\theta(z)} \nu(z) \tag{50}$$

п. в. на E_m. Это означает, что п. в. на E_m

$$\nu(z) = |\nu(z)|\, e^{i\Theta(z)}. \tag{51}$$

С другой стороны, по следствию 5 из последовательности γ_n можно выделить подпоследовательность γ_{n_k}, для которой $\alpha_{n_k} = |\gamma_{n_k}|^2 - \operatorname{Re} \gamma_{n_k} e^{-i\Theta}$ будет сходиться к нулю п. в. на E_m. Последнее означает, что точки накопления этой подпоследовательности $\gamma_n(z)$ сосредоточены на окружностях

$$c(z) = \{ \kappa \in \mathbb{C} : |\kappa - e^{i\theta(z)}/2| = 1/2 \} \tag{52}$$

для почти всех $z \in E_m$.

Далее, $E_m = E_m^+ \cup E_m^- \cup E_m^0$, где E_m^+, E_m^- и E_m^0 — измеримые дизъюнктные множества, определенные в лемме 2 работы [12] и отвечающие функциям $\gamma_0(z) \equiv 0$, $\eta(z) = e^{i\Theta(z)}$, $z \in E_m$. При этом $\gamma_{n_k}(z)$ может накапливаться только к 0 для $z \in E_m^0$ и только к одной дуге окружности $c(z)$, расположенной внутри $\Delta_{q_m} = \{\kappa \in \mathbb{C} : |\kappa| \le q_m\}$, $q_m = (m-1)/(m+1) < 1$, по или против часовой стрелки от 0 на $c(z)$ для $z \in E_m^+$ или E_m^- соответственно. Эти дуги лежат внутри острых углов с вершиной в нуле между направлениями $\{\Theta(z) + \pi/2\}$ и $\{\Theta(z) + \arccos q_m\}$ при $z \in E_m^+$, а также между $\{\Theta(z) - \pi/2\}$ и $\{\Theta(z) - \arccos q_m\}$ при $z \in E_m^-$ соответственно. Отметим, что точки накопления $\nu_{n_k}(z)$ лежат внутри тех же углов.

Согласно следствию 8 из работы [12], примененной к соответствующим последовательностям $\varphi_k(z) = \operatorname{Re} \nu_{n_k}(z)$ и $\psi_k(z) = \operatorname{Im} \nu_{n_k}(z)$, $z \in E_m^0$, $k = 1, 2, \ldots$, получаем, что $\nu(z) = 0$ п. в. на E_m^0 и $\nu_{n_k} \to 0$ по мере на E_m^0.

Аналогично, применяя первую часть следствия 8 [12] к последовательности $\varphi_k(z) = \operatorname{Re} \nu_{n_k} e^{-i\theta}$, $k = 1, 2, \ldots$, где $\theta(z) = \Theta(z) + \pi/2 + \arccos q_m$ на E_m^+, имеем $\operatorname{Re} \nu e^{-i\theta} \ge 0$. Это совместимо с (51) только при $\nu(z) = 0$ п. в. на E_m^+. Но тогда, применяя вторую часть следствия 8 [12] к последовательностям функций φ_k и $\psi_k(z) = \operatorname{Im} \nu_{n_k} e^{-i\theta} = -\operatorname{Re} \nu_{n_k} e^{-i(\theta - \pi/2)}$, получаем, что $\nu_{n_k} \to 0$ по мере на E_m^+.

Точно так же это доказывается и для множества E_m^-. Таким образом, $\gamma_{n_k} \to 0$ по мере на E_m, и тем самым теорема полностью доказана.

Более детальное обсуждение теорий инвариантно-выпуклых множеств и семейств множеств, измеримых по параметру, можно найти в работах [12, 17].

1. *Рязанов В. И.* О квазиконформных отображениях с ограничениями по мере // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 7. – С. 1009–1019.
2. *Альфорс Л.* Лекции по квазиконформным отображениям. – М.: Мир, 1969. – 133 с.
3. *Gehring F. W., Lehto O.* On total differentiability of functions of a complex variable // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. 1 Math. – 1959. – **272**. – P. 1–9.
4. *David G.* Solutions de l'equation de Beltrami avec $\|\mu\|_\infty = 1$ // Ibid. – 1988. – **13**. – P. 25–70.
5. *Tukia P.* Compactness properties of μ-homeomorphisms // Ibid. – 1991. – **16**. – P. 47–69.
6. *Schiffer M., Schober G.* Representation of fundamental solutions for generalized Cauchy–Riemann equations by quasiconformal mappings // Ibid. – 1976. – **2**. – P. 501–531.
7. *Крушкаль С. Л., Кюнау Р.* Квазиконформные отображения — новые методы и приложения. – Новосибирск: Наука, 1984. – 216 с.
8. *Strebel K.* Ein Konvergenzsatz für Folgen quasikonformer Abbildungen // Comment. math. Helv. – 1969. – **44**, № 4. – S. 469–475.
9. *Lehto O., Virtanen K. J.* Quasikonforme Abbildungen. – Berlin etc.: Springer, 1965. – 263 S.
10. *Боярский Б. В.* Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами // Мат. сб. – 1957. – **43**. – С. 451–503.
11. *Привалов И. И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1977. – 444 с.
12. *Рязанов В. И.* Об усилении теоремы сходимости К. Штребеля // Изв. АН России. Сер. мат. – 1992. – **56**, № 3. – С. 636–653.
13. *Куратовский К.* Топология: В 2-х т. – М.: Мир, 1966. – Т. 1. – 594 с.
14. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1984. – 752 с.
15. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 896 с.
16. *Сакс С.* Теория интеграла. – М.: Изд-во иностр. лит., 1949. – 494 с.
17. *Ryazanov V. I.* Some questions of convergence and compactness for quasiconformal mappings // Amer. Math. Soc. Transl. – 1986. – **131**, № 2. – P. 7–19.

Получено 26.04.93