УДК 517.956

Е. А. Калита, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

ТОЧНОСТЬ УСЛОВИЯ КОРДЕСА ГЕЛЬДЕРОВОСТИ ГРАДИЕНТА ДЛЯ НЕДИВЕРГЕНТНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

We give an example of a nondivergent elliptic system showing that the Cordes condition for Hölder continuity of the gradient of a solution of a nondivergent elliptic equation is accurate if extended correspondingly over systems.

Наведено приклад недивергентної еліптичної системи, який свідчить про те, що класична умова Кордеса гельдеровості градієнта розв'язку недивергентного еліптичного рівняння при відповідному розповсюдженні на системи є точною.

В работе Кордеса [1] изучались недивергентные эллиптические уравнения

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,u,Du)D_iD_j u = a_0(x,u,Du) \tag{1}$$

в пространстве размерности $n \geq 3$, функции a_{ij} ограничены, измеримы по x, непрерывны по u, Du и удовлетворяют условию Кордеса

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\right)^2 \geq (n-1+\delta)\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2, \quad \delta \in (0,1). \tag{2}$$

В [1] установлено, что если $\delta > (n-2)/(2n-1)$, то задача Дирихле для уравнения (1) разрешима в пространстве $C^{1+\varepsilon}$. При произвольном $\delta > 0$ условие (2) обеспечивает разрешимость в пространстве Соболева W_2^2 [2]. Уравнениям типа Кордеса посвящено большое количество работ, однако не известно, является ли точным условие гельдеровости градиента решения $\delta > (n-2)/(2n-1)$. Отметим, что для недивергентного эллиптического уравнения, не удовлетворяющего условию Кордеса, показатель гельдеровости решения может быть сколь угодно малым [3].

В [4] подход Кордеса распространялся на нелинейные эллиптические системы, имеющие структуру Дуглиса – Ниренберга. В частности, рассматривались недивергентные системы второго порядка

$$A(x,u,Du,D^2u) = f(x,u,Du) \tag{3}$$

(u, A — вектор-функции размерности $N \geq 1$) при условии

$$\sum_{l=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{n}\eta_{ii}^l - \kappa A^l(x,u,\xi,\eta)\right)^2 \leq (1-\delta)|\eta|^2, \quad \delta \in (0,1), \tag{4}$$

где κ — нормирующий множитель, $|\eta|^2 = \sum_{l=1}^{N}\sum_{i,j=1}^{n}(\eta_{ii}^l)^2$. В случае уравнения (1) в условии (4) имеем

$$1-\delta = \inf_{\kappa}\sup_{|\eta|=1}\left(\sum_i \eta_{ii} - \kappa\sum_{i,j} a_{ij}\eta_{ij}\right)^2 = \inf_{\kappa}\sum_{i,j}(\delta_{ij} - \kappa a_{ij})^2 =$$

$$= \inf_{\kappa}\left(n - 2\kappa\sum_i a_{ii} + \kappa^2\sum_{i,j} a_{ij}^2\right) = n - \left(\sum_i a_{ii}\right)^2 \Big/ \sum_{i,j} a_{ij}^2,$$

что показывает совпадение (2) и (4). Из [4] следует, что если $\gamma \in (2/3; 2)$, δ в условии (4) удовлетворяет неравенству

$$\frac{1}{1-\delta} > M(\gamma) \equiv 1 + (n-4+2\gamma)\,\frac{2n(2\gamma-1)-(n-1)\gamma^2}{(2-\gamma)^2(n+\gamma)^2},$$

то решения (3) класса W_2^2 принадлежат C^{γ}. В частности, если $\delta > (n-2)/(2n-1)$, то можно выбрать $\gamma > 1$.

Следующее утверждение показывает точность этих результатов, в частности, точность условия Кордеса гельдеровости градиента в классе недивергентных эллиптических систем.

Теорема. *Существует система вида* (3), *удовлетворяющая* (4) *с* $\delta = (n-2)/(2n-1)$, *которая имеет решение из класса* W_2^2, *не принадлежащее* C^1.

При любом $\gamma \in (2/3; 2) \cup (1; 2)$ *существует система вида* (3), *удовлетворяющая* (4) с $\delta = 1 - 1/M(\gamma)$, *которая имеет решение из класса* W_2^2, *не принадлежащее* C^{α} *при* $\alpha > \gamma$.

Доказательство. Рассмотрим вектор-функцию u с компонентами

$$u^{kl}(x) = (x_k x_l r^{-2} - \frac{1}{n}\delta_{kl})r^{\gamma}, \qquad k, l = 1, \ldots, n,$$

где $r = |x|$, δ_{kl} — символ Кронекера. Очевидно, эта функция удовлетворяет утверждениям теоремы (первому — при $\gamma = 1$). Функция u удовлетворяет равенству

$$\frac{|D^2 u(x)|^2}{|\Delta u(x)|^2} = M(\gamma). \tag{5}$$

Действительно,

$$r^{2-\gamma} D_i D_j u^{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} - \frac{\gamma}{n}\delta_{ij}\delta_{kl} +$$

$$+ (\gamma-2)r^{-2}(\delta_{ik}x_j x_l + \delta_{jk}x_i x_l + \delta_{il}x_j x_k + \delta_{jl}x_i x_k + \delta_{ij}x_k x_l - \frac{\gamma}{n}\delta_{kl}x_i x_j) +$$

$$+ (\gamma-2)(\gamma-4)x_i x_j x_k x_l r^{-4},$$

$$\Delta u^{kl} = (\gamma-2)(\gamma+n)r^{-2}u^{kl}.$$

Непосредственными вычислениями получаем равенства

$$|D^2 u|^2 \equiv \sum_{i,j,k,l=1}^{n} (D_i D_j u^{kl})^2 = [(\gamma-2)^2(\gamma+n)^2 +$$

$$+ (n-4+2\gamma)(2n(2\gamma-1) - (n-1)\gamma^2)]\,\frac{n-1}{n}\,r^{2\gamma-4},$$

$$|\Delta u|^2 \equiv \sum_{k,l=1}^{n} (\Delta u^{kl})^2 = (\gamma-2)^2(n+\gamma)^2\,\frac{n-1}{n}\,r^{2\gamma-4},$$

откуда следует (5).

Вектор-функция u является решением системы

$$\Delta u^{kl} - b^{kl}(x)|D^2 u| = 0$$

при $b^{kl} = \Delta u^{kl}(x)/|D^2 u(x)|$. Полагая $\kappa = 1$, для показателя δ в (4) находим

$$1 - \delta \le \sup_x \sum_{k,l=1}^{n} (b^{kl}(x))^2 = \sup_x \frac{|\Delta u(x)|^2}{|D^2 u(x)|^2} = \frac{1}{M(\gamma)}.$$

Следовательно, $\delta \ge 1 - 1/M(\gamma)$, и теорема доказана.

Отметим, что легко построить линейную систему, решением которой является указанная функция u:

$$\Delta u^{kl} - \sum_{i,j,s,t=1}^{n} b_{ij}^{klst}(x) D_i D_j u^{st} = 0,$$

где $b_{ij}^{klst} = \Delta u^{kl}(x) D_i D_j u^{st}(x) / |D^2 u(x)|^2$. Как и выше, имеем

$$1 - \delta \le \sup_x \sum_{i,j,k,l,s,t=1}^{n} (b_{ij}^{klst}(x))^2 = \sup_x \frac{|\Delta u(x)|^2}{|D^2 u(x)|^2} = \frac{1}{M(\gamma)},$$

откуда следует

$$\delta \ge 1 - \frac{1}{M(\gamma)}.$$

1. *Cordes H. O.* Uber die erste Randvertaufgabe bei quasilinear Differentialgleichungen zweiter Ordnung in mehr als zwei Variablen // Mat. Ann. – 1956. – **131**. – S. 287 – 312.
2. *Talenti G.* Sopra una classe di equazioni ellittiche a coefficienti misurabili // Ann. Mat. Pura Appl. – 1965. – **69**. – P. 285 – 304.
3. *Сафонов М. В.* Неулучшаемость оценок постоянных Гельдера для решений линейных эллиптических уравнений с измеримыми коэффициентами // Мат. сб. – 1987. – **132**, № 2. – С. 275 – 288.
4. *Калита Е. А.* Регулярность решений эллиптических систем типа Кордеса произвольного порядка // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1989. – № 5. – С. 12 – 15.

Получено 21.03.94