УДК 519.21

Н. Н. Леоненко, д-р физ.-мат. наук (Киев. ун-т),
Ли Чжань-бин, д-р физ.-мат. наук (Пекин. пед. ун-т, КНР),
К. В. Рыбасов, канд. физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

НЕГАУССОВСКИЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА СО СЛУЧАЙНЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ

Limit distributions of solutions of the multidimensional Burgers equation are found in the case where an initial condition is a random field of type χ^2 of degree k with a long-range dependence.

Знайдено граничні розподіли розв'язків багатовимірного рівняння Бюргерса з початковою умовою, що є випадковим полем типу χ^2 з k степенями свободи та з сильною залежністю.

1. Введение. Среди нелинейных дифференциальных уравнений в математической физике уравнение Бюргерса имеет много приложений (см., например, [1]). Розенблатт [2] впервые исследовал уравнение Бюргерса со случайными начальными данными. За последнее время эта задача со случайными условиями с сильной и слабой зависимостью решалась многими математиками. В частности, в работах [3, 4] изучались решения уравнения Бюргерса в случае, когда начальное условие представляет собой случайный процесс или поле типа дробного эффекта. В работе [5] в качестве начального условия используется случайный процесс типа χ^2 степени 1. В работе [6] рассматривается гауссовское однородное изотропное случайное поле и поле типа χ^2 со слабым убыванием корреляции в качестве начального условия.

В данной работе получены многомерные обобщения результатов работы [6] для поля типа χ^2 степени k $(k \geq 1)$.

Настоящая работа также основана на результатах работ [7–11], в которых авторы анализируют процессы и поля со слабым убыванием корреляции.

2. Основные результаты. Рассмотрим задачу Коши для n-мерного уравнения Бюргерса

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left(\vec{u}, \vec{\nabla}\right)\vec{u} = \mu \Delta \vec{u}, \\ \vec{u}(\vec{x}, 0) = \vec{u}_0(\vec{x}) = \vec{\nabla} v(\vec{x}), \end{cases} \tag{1}$$

где $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, — векторное поле, $v(\vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, — скалярное поле, $\vec{\nabla}$ — градиент, Δ — лаплассиан.

Решение задачи Коши (1) в классе потенциальных полей можно представить в следующем виде [12, 1]:

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \frac{\int_{\mathbb{R}^n} ((\vec{x} - \vec{y})/t)\, g(\vec{x} - \vec{y}, t) \exp\{-v(\vec{y})/2\mu\}\, d\vec{y}}{\int_{\mathbb{R}^n} g(\vec{x} - \vec{y}, t) \exp\{-v(\vec{y})/2\mu\}\, d\vec{y}} = \frac{\vec{I}(\vec{x}, t)}{J(\vec{x}, t)}, \tag{2}$$

где $g(\vec{x}, t) = (4\pi\mu t)^{-n/2} \exp\left\{-|\vec{x}|^2 / 4\mu t\right\}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$.

В дальнейшем $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — полное вероятностное пространство, $\varphi_n(\vec{w}) = (2\pi)^{-n/2} \exp\left\{-|\vec{w}|^2/2\right\}$, $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$, — n-мерная гауссовская плотность.

А. Пусть

$$v(\vec{x}) = \xi(\vec{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{k} \eta_i^2(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n,$$

где $\eta_1(\vec{x}), \ldots, \eta_k(\vec{x})$ — независимые копии измеримого действительного дифференцируемого в среднем квадратическом однородного изотропного гауссовского случайного поля $\eta(\omega,\vec{x}) = \eta(\vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\omega \in \Omega$, с $M\eta(\vec{x}) = 0$, $M\eta^2(\vec{x}) = 1$ и корреляционной функцией $B(|\vec{x}|) = M\eta(\vec{0})\eta(\vec{x}) \to 0$ монотонно при $|\vec{x}| \to \infty$, причем $B(|\vec{x}|) = L(|\vec{x}|)/|\vec{x}|^\alpha$, $0 < \alpha < n/2$, при $|\vec{x}| \to \to \infty$, где $L(t)$, $t \in (0,\infty)$, — медленно меняющаяся на бесконечности функция, ограниченная в каждом ограниченном интервале.

В соответствии с условием А будем рассматривать слабую сходимость при $t \to \infty$ нормированных конечномерных распределений случайных полей

$$\vec{u}(\vec{a}\sqrt{t},t) = \frac{\vec{I}(\vec{a}\sqrt{t},t)}{J(\vec{a}\sqrt{t},t)}, \tag{3}$$

где $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Замена $\vec{x} = \vec{a}\sqrt{t}$ является естественной из физических соображений.

При условии А корреляционная функция $B(\vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, поля $\eta(\vec{x})$, $\vec{x} \in \in \mathbb{R}^n$, допускает спектральное разложение

$$B(|\vec{x}|) = \int_{\mathbb{R}^n} \cos(\vec{\lambda},\vec{x}) F(d\vec{\lambda}) = 2^{(n-2)/2}\, \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \int_0^\infty \frac{J_{(n-2)/2}(ur)}{(ur)^{(n-2)/2}}\, dG(u),$$

где $r = |\vec{x}|$, $F(\cdot)$ — спектральная мера поля $\eta(\vec{x})$, $J_q(z)$ — функция Бесселя первого рода порядка q, а

$$G(u) = \int_{\{\vec{\lambda}:\, |\vec{\lambda}| < u\}} F(d\vec{\lambda}), \quad u \in [0,\infty),$$

— ограниченная неубывающая функция.

Б. Предположим, что поле $\eta(\vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющее условию А, имеет спектральную плотность $f(|\vec{\lambda}|)$, $\vec{\lambda} \in \mathbb{R}^n$, которая при $|\vec{\lambda}| \to \infty$ монотонно стремится к нулю при $|\lambda| \geq A > 0$. Используя теорему тауберова типа из работы [13] (доказательство, содержащее медленно меняющуюся функцию L, приведено в [14]), получаем, что при условии Б

$$B(|\vec{x}|) = \int_{\mathbb{R}^n} \cos(\vec{\lambda},\vec{x}) f(\vec{\lambda})\, d\vec{\lambda}, \quad G'(u) = |s(1)|\, u^{n-1} f(u), \quad u \geq 0,$$

где $|s(1)| = 2\pi^{n/2}/n\,\Gamma(n/2)$ — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$, причем асимптотическую формулу для $G(u)$ при $u \to 0$ можно продифференцировать.

Таким образом, при условиях А, Б и $|\vec{\lambda}| \to 0+$ из тауберовой теоремы следует

$$f(|\vec{\lambda}|) \sim \alpha\, L\left(\frac{1}{|\vec{\lambda}|}\right) \frac{|\vec{\lambda}|^{\alpha-n}}{c_1(n,\alpha)|s(1)|}, \tag{4}$$

где

$$c_1(n,\alpha) = 2^\alpha \frac{\Gamma(1+\alpha/2)\,\Gamma(n/2)}{\Gamma((n-\alpha)/2)}.$$

При условии Б поле допускает спектральное разложение

$$\eta(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\{i(\vec{\lambda},\vec{x})\} \left(f(|\vec{\lambda}|)\right)^{1/2} W(d\vec{\lambda}), \tag{5}$$

где $W(\cdot)$ — комплексный гауссовский белый шум в $\mathbb{R}^n$ (подробнее см. [8]).

Теорема 1. *Пусть* $u(\vec{x},t)$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, *является решением задачи Коши* (1) *в классе потенциальных полей и выполнены условия* А *и* Б. *Тогда конечномерные распределения случайных полей*

$$\vec{X}_t(\vec{a}) = L^{-1}\left(\sqrt{t}\right) t^{(1+\alpha)/2}\, \vec{u}\left(\vec{a}\sqrt{t}, t\right), \quad \vec{a} \in \mathbb{R}^n, \quad 0 < \alpha < n/2,$$

при $t \to \infty$ *слабо сходятся к конечномерным распределениям поля* $\vec{X}(\vec{a})$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, *которое можно представить в следующем виде*:

$$\vec{X}(\vec{a}) = \frac{\mu\alpha}{(1+2\mu)c_1(n,\alpha)|s(1)|} \sum_{i=0}^{k} \vec{Y}_i(\vec{a}), \quad \vec{a} \in \mathbb{R}^n, \tag{6}$$

где $\vec{Y}_1(\vec{a}), \ldots, \vec{Y}_k(\vec{a})$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, — *независимые копии поля*

$$\vec{Y}(\vec{a}) = -\int_{\mathbb{R}^{2n}}' \frac{\exp\left\{i(\vec{a}, \vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2) - \mu|\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2|^2\right\}}{i} \frac{\left(\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2\right) W\left(d\vec{\lambda}_1\right) W\left(d\vec{\lambda}_2\right)}{|\vec{\lambda}_1|^{(n-\alpha)/2} |\vec{\lambda}_2|^{(n-\alpha)/2}}, \tag{7}$$

под символом $\int' \ldots$ *обозначен кратный стохастический интеграл по комплексному гауссовскому белому шуму в* $\mathbb{R}^n$ (*интегрирование по гиперплоскостям* $\vec{\lambda}_i = \pm\vec{\lambda}_j$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$, *исключается*).

Подробное изложение теории кратных стохастических интегралов можно найти в [7, 9, 11].

Заметим, что поле $\vec{Z}(\vec{a})$ не является гауссовским.

При доказательстве теоремы 1 понадобится лемма Слуцкого (многомерный вариант).

В дальнейшем символом $\xrightarrow{D}$ обозначена слабая сходимость случайных векторов, а символом $\xrightarrow{P}$ — сходимость по вероятности.

Лемма 1. *Пусть* $\{\vec{u}_t\}$ *и* $\{\vec{v}_t\}$ — *семейства случайных векторов из* $\mathbb{R}^n$, *а* $\{w_t\}$ — *семейство случайных величин и пусть* $\vec{u}_t$ *по распределению сходится к* $\vec{u}$ *при* $t \to \infty$, $\vec{v}_t$ *по вероятности сходится к* $\vec{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, *где* $c_i = \text{const}$, $i = \overline{1,n}$, *и* w_t *по вероятности сходится к* $d = \text{const}$. *Тогда при* $t \to \infty$ $\vec{u}_t + \vec{v}_t \xrightarrow{D} \vec{u} + \vec{c}$, $w_t \vec{u}_t \xrightarrow{D} d\vec{u}$ *и, если* $d \neq 0$, *то* $\vec{u}_t / w_t \xrightarrow{D} \vec{u}/d$.

Доказательство леммы 1 стандартно, поэтому мы его опускаем.

3. Доказательство теоремы 1. Рассмотрим стандартную плотность гамма-распределения

$$p(u) = p_\beta(u) = u^{\beta-1} \frac{e^{-u}}{\Gamma(\beta)}, \quad u > 0, \quad \beta > 0. \tag{8}$$

Пусть $L_j^{(\beta)}(u)$ — обобщенные полиномы Лагерра индекса β, $j \geq 0$ [15] и

$$e_j(u) = e_j^{(\beta)}(u) = L_j^{(\beta-1)}(u) \left(\frac{j!\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta + j)} \right)^{1/2}. \tag{9}$$

Семейство функций $\left\{e_j^{(\beta)}(u)\right\}_{j \geq 0}$ образует ортонормированную систему при $u > 0$ с весовой функцией $p_\beta(u)$, определенной формулой (8).

Пусть

$$I_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_{-1}^{1} \left(1-t^2\right)^{\nu-1/2} e^{zt}\, dt,$$

— модифицированная функция Бесселя порядка ν [10]. Определим

$$p_\beta(u, w; \gamma) = \left(\frac{uw}{\gamma}\right)^{(\beta-1)/2} \exp\left\{-\frac{u+w}{1-\gamma}\right\} \frac{I_{\beta-1}\left(2\sqrt{uw\gamma}/(1-\gamma)\right)}{\Gamma(\beta)(1-\gamma)} \qquad (10)$$

для $u>0$, $w>0$ и $0 \le \gamma < 1$.

Функция (10) допускает разложение

$$p_\beta(u, w; \gamma) = p_\beta(u) p_\beta(w) \left[1 + \sum_{j=0}^{\infty} \gamma^j e_j^{(\beta)}(u)\, e_j^{(\beta)}(w)\right]. \qquad (11)$$

Диагональное разложение (11) двумерной плотности (10) было дано Миллером и Лебедевой в 1907 г. (см., например, [15–17]).

Совместной характеристической функцией, соответствующей плотности (10), является

$$\Psi_\beta(t, s; \gamma) = \left[1 - it - is - ts(1-\gamma)\right]^{-\beta}. \qquad (12)$$

Характеристическая функция (12) была введена в работах [1, 18].

Пусть $(X_1, Y_1), \ldots, (X_k, Y_k)$ — независимые случайные векторы, имеющие совместное стандартное нормальное двумерное распределение с коэффициентом корреляции ρ. Тогда легко показать, что вектор $\left(X_1^2, Y_1^2\right)/2$ имеет характеристическую функцию (12) с $\gamma = \rho^2$ и $\beta = 1/2$, и функция (12) является характеристической функцией для вектора $\left(X_1^2 + \ldots + X_k^2,\ Y_1^2 + \ldots + Y_1^2\right)/2$.

Пусть однородное изотропное поле $\xi(\vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, имеет двумерную плотность, определяемую формулой

$$p(u, w) = \frac{\partial^2}{\partial u \partial w} P\left\{\xi(\vec{0}) < u, \xi(\vec{x}) < w\right\} = p_\beta(u, w; \gamma), \qquad (13)$$

где $p_\beta(u, w; \gamma)$ задано формулами (10) и (12). Тогда $\xi(\vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, при $\beta = k/2$ может быть представлено как $\xi(\vec{x}) = \left(\eta_1^2 + \ldots + \eta_k^2\right)/2$, где $\eta_1^2, \ldots, \eta_k^2$ — независимые копии стандартного однородного гауссовского случайного поля с корреляционной функцией $B(|\vec{x}|)$ и $\gamma = \gamma(|\vec{x}|) = B^2(|\vec{x}|)$ (см. условие А). Из формулы (11) следует

$$\int_{\mathbb{R}^n} p_\beta(u, w; \gamma)\, e_i^{(\beta)}(u)\, e_j^{(\beta)}(w)\, du\, dw = \delta_j^i \gamma^m, \qquad (14)$$

где δ_j^i — символ Кронекера.

Далее, из условия А вытекает, что поле $\xi(\vec{x})$ имеет мартингальную плотность (8) с $\beta = k/2$ и двумерную плотность, определяемую формулой (13) [16, 5] с $\beta = k/2$, $\gamma = \gamma(|\vec{x}|) = B^2(|\vec{x}|)$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Используя (14), получаем

$$M e_j^{(\beta)}(\xi(\vec{x})) = 0, \quad j \ge 1,$$
$$M e_j^{(\beta)}(\xi(\vec{x}))\, e_j^{(\beta)}(\xi(\vec{x})) = \delta_j^i \gamma^m(|\vec{x} - \vec{y}|) = \delta_j^i B^{2m}(|\vec{x} - \vec{y}|), \quad i, j \ge 1. \qquad (15)$$

Представим $\vec{I}\left(\vec{a}\sqrt{t},t\right)$ (см. (3)) в виде суммы

$$\vec{I}\left(\vec{a}\sqrt{t},t\right) = \vec{I}_1+\vec{I}_2 = \int\limits_{\mathbb{D}_t} \frac{\vec{a}\sqrt{t}-\vec{y}}{t}\,\frac{\exp\left\{-|\vec{a}\sqrt{t}-\vec{y}|^2/4\mu t\right\}}{(4\pi\mu t)^{n/2}}\exp\left\{-\frac{\xi(\vec{y})}{2\mu}\right\}d\vec{y}\,+$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus\mathbb{D}_t} \frac{\vec{a}\sqrt{t}-\vec{y}}{t}\,\frac{\exp\left\{-|\vec{a}\sqrt{t}-\vec{y}|^2/4\mu t\right\}}{(4\pi\mu t)^{n/2}}\exp\left\{-\frac{\xi(\vec{y})}{2\mu}\right\}d\vec{y}\,,$$

где $\mathbb{D}_t = \left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n:\,|\vec{x}|\le t\right\}$.

Доказательство основано на разложении функций из гильбертова пространства $L_2(\mathbb{R}^1, p(u)\,du)$, где $p(u) = p_\beta(u)$ из (8), по полиномам Лагерра $e_j(u) = e_j^{(\beta)}(u)$, $\beta = k/2$, (см. (9)). В частности,

$$e_0(u) = 1,\quad e_1(u) = \left(\frac{k}{2}-u\right)\sqrt{\frac{2}{k}}. \tag{16}$$

Если $G(u)$, $u\in\mathbb{R}^1$, — такая функция, что $MG^2\left(\xi\left(\vec{0}\right)\right) < \infty$, то в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R}^1, p(u)\,du)$ можно получить следующее разложение:

$$G(u) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i e_i(u),$$
$$C_i = \int\limits_0^{\infty} G(u)e_i(u)p(u)\,du,\quad i = 0, 1, 2, \ldots . \tag{17}$$

Из (16) и (17) следует, что два первых коэффициента разложения функции $G(u) = \exp\{-u/2\mu\}$ по полиномам Лагерра имеют вид

$$C_0 = MG(\xi(\vec{x})) = \left(1+\frac{1}{2\mu}\right)^{-k/2}, \tag{18}$$

$$C_1 = \int\limits_0^{\infty}\exp\left(-\frac{u}{2\mu}\right)e_i(u)p(u)\,du = \frac{\sqrt{k/2}}{2\mu}\left(1+\frac{1}{2\mu}\right)^{-k/2+1}, \tag{19}$$

Отсюда в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$ можно получить следующее разложение:

$$\exp\left(-\frac{\xi(\vec{x})}{2\mu}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i e_i\left(\xi(\vec{x})\right)$$

и

$$\vec{I}_1(t) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i\vec{\eta}_i(\vec{a},t),$$

где

$$\eta_i(\vec{a},t) = \int\limits_{\mathbb{D}_t}\frac{\vec{a}\sqrt{t}-\vec{y}}{t}\,\frac{\exp\left\{-|\vec{a}\sqrt{t}-\vec{y}|^2/4\mu t\right\}}{(4\pi\mu t)^{n/2}}\,e_i(\xi(\vec{y}))\,d\vec{y}.$$

Заметим, что, используя формулу (15), корреляционную матрицу вектора $\vec{I}_1(t)$ можно записать в следующем виде:

$$D\vec{I}_1(t) = \mathbf{\Sigma} = \sum_{m=0}^{\infty} C_m^2 \mathbf{\Sigma}_m,$$

где $\mathbf{\Sigma}_m = \left(\sigma^2_{m,i,j}(t)\right)_{1\le i,\, j\le n}$, и

$$\sigma^2_{m,i,j}(t) = \int\limits_{\mathbb{D}_t}\int\limits_{\mathbb{D}_t} \frac{a_i\sqrt{t} - y_{1i}}{t}\,\frac{a_j\sqrt{t} - y_{2j}}{t}\, g\left(\vec{a}\sqrt{t} - \vec{y}_1, t\right) g\left(\vec{a}\sqrt{t} - \vec{y}_2, t\right) \times$$

$$\times B^{2m}\left(\left|\vec{y}_1 - \vec{y}_2\right|\right) d\vec{y}_1\, d\vec{y}_2 .$$

Используя замену переменных $\left(\vec{y}_i - \vec{a}\sqrt{t}\right)/\sqrt{2\mu t} = \vec{w}_i$, $i = 1, 2$, получаем

$$\sigma^2_{m,i,j}(t) = \int\limits_{\tilde{\mathbb{D}}_t}\int\limits_{\tilde{\mathbb{D}}_t} \frac{2\mu}{t}\, w_{1i} w_{2j}\, \varphi_n\left(\vec{w}_1\right) \varphi_n\left(\vec{w}_2\right) B^{2m}\left(\sqrt{2\mu t}\,\left|\vec{w}_1 - \vec{w}_2\right|\right) d\vec{w}_1\, d\vec{w}_2 ,$$

где $\tilde{\mathbb{D}}_t = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \left|\vec{x} + \vec{a}/\sqrt{2\mu}\right| \le \sqrt{t/2\mu}\right\}$.

Из условия A при $0 < \alpha < n/m$ и $t \to \infty$

$$\sigma^2_{m,i,j}(t) \sim \frac{L^{2m}\left(\sqrt{t}\right)}{t^{1+m\alpha}}\,(2\mu)^{1-m\alpha} \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{w_{1i} w_{2j}\, \varphi_n\left(\vec{w}_1\right) \varphi_n\left(\vec{w}_2\right)}{\left|\vec{w}_1 - \vec{w}_2\right|^{2m\alpha}}\, d\vec{w}_1\, d\vec{w}_2 =$$

$$= L(m, \alpha, t)(2\mu)^{1-m\alpha} c_2(m, \alpha),$$

где $L(m, \alpha, t) = L^{2m}\left(\sqrt{t}\right) t^{-1-m\alpha}$ и

$$c_2(m, \alpha) = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{w_{1i} w_{2j}\, \varphi_n\left(\vec{w}_1\right) \varphi_n\left(\vec{w}_2\right)}{\left|\vec{w}_1 - \vec{w}_2\right|^{2m\alpha}}\, d\vec{w}_1\, d\vec{w}_2 .$$

Очевидно,

$$\lim_{t\to\infty} M\vec{I}_1(t) = M\vec{I}\left(\vec{a}\sqrt{t}, t\right) = \vec{0}, \quad \lim_{t\to\infty} C_0 \vec{\eta}_0(\vec{a}, t) = \vec{0}.$$

Поэтому можно написать

$$\vec{I}_1(t) = C_1 \vec{\eta}_1(\vec{a}, t) + \vec{R}(t), \quad \vec{R}(t) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{C_k}{k!}\, \vec{\eta}_k(\vec{a}, t).$$

Тогда

$$\frac{\vec{I}_1(t)}{C_1\sqrt{L(1, \alpha, t)}} = \frac{\vec{\eta}_1(\vec{a}, t)}{\sqrt{L(1, \alpha, t)}} + \frac{\vec{R}(t)}{C_1\sqrt{L(1, \alpha, t)}} .$$

Используя такую же схему доказательства, как в теореме 1 работы [6], можно показать, что $\vec{R}(t)\big/C_1\sqrt{L(1, \alpha, t)} \xrightarrow{P} \vec{0}$, $\vec{I}_2(t)\big/C_1\sqrt{L(1, \alpha, t)} \xrightarrow{P} \vec{0}$ при $t \to \infty$ и $J\left(\vec{a}\sqrt{t}, t\right) \xrightarrow{P} MJ\left(\vec{a}\sqrt{t}, t\right) = C_0$. Тогда, используя лемму Слуцкого, получаем, что при $t \to \infty$

$$L^{-1}\left(\sqrt{t}\right) t^{(1+\alpha)/2}\, \vec{u}\left(\vec{a}\sqrt{t}, t\right) \xrightarrow{D} L^{-1}\left(\sqrt{t}\right) t^{(1+\alpha)/2}\, \frac{C_1}{C_0}\, \vec{\eta}_1(\vec{a}, t) =$$

$$= L^{-1}\left(\sqrt{t}\right) t^{(1+\alpha)/2}\, \frac{C_1}{C_0} \int\limits_{\mathbb{D}_t} \frac{\vec{a}\sqrt{t} - \vec{y}}{t}\, g\left(\vec{a}\sqrt{t} - \vec{y}, t\right) e_1\left(\xi(\vec{y})\right) d\vec{y} =$$

$$= L^{-1}(\sqrt{t})\, t^{(1+\alpha)/2} \frac{C_1}{C_0} \frac{1}{\sqrt{2k}} \sum_{i=1}^{k} \int_{\mathbb{D}_t} \frac{\vec{a}\sqrt{t}-\vec{y}}{t}\, g(\vec{a}\sqrt{t}-\vec{y},t)\left(1-\eta_i^2(\vec{y})\right) d\vec{y} =$$

$$= \frac{C_1}{C_0} \frac{1}{\sqrt{2k}} \sum_{i=1}^{k} \left[-\frac{t^{(1+\alpha)/2}}{L(\sqrt{t})} \int_{\mathbb{D}_t} \frac{\vec{a}\sqrt{t}-\vec{y}}{t}\, g(\vec{a}\sqrt{t}-\vec{y},t)\left(\eta_i^2(\vec{y})-1\right) d\vec{y} \right].$$

В работе [6] доказано, что при условиях А и Б конечномерные распределения случайного поля

$$-\frac{t^{(1+\alpha)/2}}{L(\sqrt{t})} \int_{\mathbb{D}_t} \frac{\vec{a}\sqrt{t}-\vec{y}}{t}\, g(\vec{a}\sqrt{t}-\vec{y},t)\left(\eta_i^2(\vec{y})-1\right) d\vec{y}$$

слабо сходятся при $t \to \infty$ к конечномерным распределениям поля

$$\frac{2\mu\alpha}{C_1(n,\alpha)\left|S(1)\right|}\, \vec{Y}(\vec{a}), \quad \vec{a} \in \mathbb{R}^n.$$

Используя (18), (19) и метод Крамера – Уолда, завершаем доказательство теоремы.

1. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. – М.: Мир, 1977. – 622 с.
2. *Rosenblatt M.* Remark on the Burgers equation // J. Math. Phys. – 1968. – **9**. – P. 1129 – 1136.
3. *Булинский А. В., Молчанов С. А.* Асимптотическая гауссовость решения уравнения Бюргерса со случайными начальными данными // Теория вероятностей и ее применения. – 1991. – **36**, № 2. – С. 217 – 235.
4. *Giraitis L., Molchanow S. A., Surgailis D.* Long memory shot noises and limit theorems with applications to Burger's equations. New direction in time series analysis. Pt. II // IMA Volumes Math. and Appl. – 1993. – **46**. – P. 153 – 171.
5. *Leonenko N., Orsingher E.* Limit theorems for solutions of Burgers equation with Gaussian and non-Gaussian initial conditions. – Rome, 1991. – 22 p. – (Preprint / Univ. of Rome. 01).
6. *Леоненко Н. Н., Орсингер Э., Рыбасов К. В.* Предельные распределения решений многомерного уравнения Бюргерса со случайными начальными данными. I, II // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 7. – С. 870 – 877 ; № 8. – С. 1003 – 1010.
7. *Dobrushin R. L., Major P.* Noncentral limit theorems for nonlinear functionals of Gaussian fields // Z. Wahrscheinlich. Verw. Gebiete. – 1979. – **50**. – P. 1 – 28.
8. *Ivanov A. V., Leonenko N. N.* Statistical analysis of random fields. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1989. – 224 p.
9. *Major P.* Multiple Wiener – Ito integrals // Lect. Notes Math. – 1981. – **849**. – 127 p.
10. *Sinai Ya. G.* Two results concerning asymptotic behaviour of solutions of the Burgers equations with force // J. Statist. Phys. – 1991. – **64**. – P. 1 – 12.
11. *Taqqu M. S.* Convergence of integrated processes of arbitrary Hermite rang // Z. Wahrscheinlich. Verw. Gebiete. – 1979. – **50**, № 1. – P. 55 – 83.
12. *Гурбатов С. Н., Малахов А. Н., Саичев А. И.* Нелинейные случайные волны в средах без дисперсий. – М.: Наука, 1990. – 216 с.
13. *Леоненко Н. Н., Оленко А. Я.* Тауберовы и абелевы теоремы для корреляционной функции однородного изотропного случайного поля // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 12. – С. 1652 – 1664.
14. *Оленко А. Я.* Некоторые вопросы корреляционной и спектральной теории случайных полей: Автореф. дисс. ... канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1991. – 18 с.
15. Bateman H., Erdelyi A. Higher transcendental functions. Vol. 2. – New York: McGraw-Hill, 1953. – 450 p.
16. *Berman S. M.* High level sojours for strongly dependent Gaussian processes // Z. Wahrscheinlich. Verw. Gebiete. – 1979. – **50**. – P. 223 – 236.
17. *Lancaster H. O.* The structure of bivariate distributions // Ann. Math. Statist. – 1958. – **29**. – P. 719 – 736; Correction // Ibid. – 1964. – **35**. – P.1988.
18. *Wicksell S. D.* On correlation functions of type III // Biometrika. – 1933. – **25**. – P. 121 – 133.

Получено 20.04.93