УДК 512.643

А. Г. Мазко, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ПОСТРОЕНИЕ АНАЛОГОВ УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА ДЛЯ МАТРИЧНОГО ПОЛИНОМА*

We develop a method for localization of eigenvalues of a matrix polynomial. This method is related to a generalization and solution of the Lyapunov equation.

Розробляється методика локалізації власних значень матричного полінома, пов'язана з узагальненням і розв'язком рівняння Ляпунова.

1. Введение. В задачах анализа и синтеза линейных систем широко используется матричное уравнение Ляпунова $AX + XA^* = Y$. Инерция эрмитовых решений данного уравнения описывает расположение спектра матрицы A относительно мнимой оси и, в частности, условия устойчивости соответствующей системы [1, 2]. Аналогичные свойства имеют и некоторые другие матричные уравнения. Так, уравнения вида

$$\sum_{i,j} \gamma_{ij} A^i X A^{j*} = Y \tag{1}$$

используются при оценке расположения спектра матрицы относительно заданных алгебраических кривых (см., например, [3–6]). При изучении спектра линейного пучка матриц могут быть использованы более общие матричные уравнения [7].

Настоящая работа посвящена построению аналогов уравнения Ляпунова для матричного полинома и их использованию в задачах о локализации собственных значений. Матричные коэффициенты таких уравнений определяются с помощью интегралов типа Коши от логарифмической производной функции [7], а также на основе решений специальных систем расщепления спектра [8]. Основные результаты работы формулируются в виде обобщения теорем Ляпунова, Островского – Шнайдера и др.

2. Постановка задачи. Пусть $F(\lambda)$ — матрица-функция размера $\nu \times \nu$, однозначно определенная и аналитическая в области Λ, а f — однозначная аналитическая функция двух переменных в $\Lambda \times \overline{\Lambda}$, причем $f(\lambda, \overline{\mu}) \equiv \equiv \bar{f}(\mu, \overline{\lambda})$, $(\lambda, \overline{\mu}) \in \Lambda \times \overline{\Lambda}$. Выделим некоторую часть спектра $\sigma_0 \subseteq \sigma(F)$, состоящую из n нулей функции $\det F(\lambda) \not\equiv 0$, и определим в комплексной плоскости множества

$$\Lambda^+ = \{\lambda : f(\lambda, \overline{\lambda}) > 0\}, \quad \Lambda^- = \{\lambda : f(\lambda, \overline{\lambda}) < 0\}, \quad \Lambda^0 = \{\lambda : f(\lambda, \overline{\lambda}) = 0\}.$$

В качестве σ_0 может быть подмножество собственных значений, охваченных некоторым замкнутым контуром $\gamma \subset \Lambda$. Если $F(\lambda)$ — матричный полином степени s, то подмножество σ_0 мы будем также определять с помощью проекторов некоторой матрицы размеров $\nu s \times \nu s$.

Требуется оценить числа n^+, n^- и n^0, равные количествам точек σ_0, принадлежащих соответственно Λ^+, Λ^- и Λ^0. В частности, нас интересуют критерии включения $\sigma_0 \subset \Lambda^+$. Данная задача является естественным обобщением проблемы Рауса – Гурвица о расположении корней характеристического полинома автономной системы относительно мнимой оси [1].

3. Методы исследования задачи. Исследуем задачу на основе построения и изучения линейных матричных уравнений (аналогов уравнения Ляпунова) вида

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного комитета Украины по вопросам науки и технологий.

$$M_f X = Y, \tag{2}$$

где X и Y — эрмитовы матрицы, M_f — некоторый линейный оператор. Если подмножество спектра σ_0 отделяется замкнутым контуром γ, то в уравнении (2) используем оператор

$$M_f X = -\frac{1}{4\pi^2} \oint_\gamma \oint_{\bar\gamma} f(\lambda, \bar\mu) D_\lambda X D_\mu^* \, d\lambda \, d\bar\mu, \tag{3}$$

где $D_\lambda = F'(\lambda) F^{-1}(\lambda)$ [7]. При этом общее количество точек σ_0 можно определить в виде [9]

$$n = \operatorname{tr} \Delta, \quad \Delta = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma D_\lambda \, d\lambda.$$

Оператор $MX = \Delta X \Delta^*$, совпадающий с M_f при $f \equiv 1$, будем использовать при описании матричных семейств, из которых выбираются решения X и правые части Y уравнения (2).

Отметим, что выражение (3) сводится к виду (1) при условиях

$$F(\lambda) = A - \lambda I, \quad \sigma_0(F) = \sigma(A), \quad f(\lambda, \mu) = \sum_{i,j} \gamma_{ij} \lambda^i \mu^j.$$

Например, функции $f(\lambda, \mu) = \lambda + \mu$ соответствует оператор Ляпунова $AX + XA^*$. Операторы типа M_f в случае $D_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$ изучались в [10].

3.1. Пусть сначала $F(\lambda) = A + \lambda B$ — линейный пучок матриц. Тогда существуют невырожденные матрицы P и Q такие, что

$$P F(\lambda) Q = \left[\begin{array}{c:c} J - \lambda I & 0 \\ \hdashline 0 & I - \lambda N \end{array}\right], \quad J = \begin{bmatrix} J_0 & 0 \\ 0 & J_1 \end{bmatrix},$$

где J_0 — блок жордановой матрицы J, отвечающий подмножеству спектра σ_0, N — нильпотентная матрица, I — единичная матрица подходящих размеров [1]. Вычисляя интегралы типа Коши в (3), имеем

$$M_f X = \sum_{t,\tau=1}^{\alpha} \sum_{i,j=1}^{m_t, m_\tau} f_{ij}(\lambda_t, \bar\lambda_\tau) F_{ti} X F_{\tau j}^*, \tag{4}$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_\alpha$ — все попарно различные точки подмножества σ_0,

$$f_{ij}(\lambda_t, \bar\lambda_\tau) = \frac{\partial^{i+j-2}}{\partial \lambda_t^{i-1} \partial \bar\lambda_\tau^{j-1}} f(\lambda_t, \bar\lambda_\tau),$$

$$F_{ti} = \Delta e_{ti}(\theta) = P^{-1} \begin{bmatrix} J_{ti} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P,$$

$$\Delta = BZ = P^{-1} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P, \quad \theta = -AZ = P^{-1} \begin{bmatrix} J_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P,$$

$$Z = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma F(\lambda)^{-1} d\lambda = -Q \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P,$$

$J_{ti} = e_{ti}(J_0)$ — компоненты матрицы J_0. При этом Δ является проектором матрицы θ, а интеграл Z удовлетворяет системе [11]

$$AZB = BZA, \quad Z = ZBZ. \tag{5}$$

Приведем спектральные свойства оператора M_f, вытекающие из разложения (4) и используемые при изучении уравнения (2) [10, 12].

Если ω — собственное значение оператора M_f, то либо $\omega = 0$, либо $\omega = f(\lambda_t, \bar{\lambda}_\tau)$. Если $\mathcal{L}(\omega) \neq \varnothing$ — множество пар индексов (t, τ), для которых $f(\lambda_t, \bar{\lambda}_\tau) = \omega$, то матрица W является собственным вектором оператора M_f, отвечающим собственному значению ω, в том и только в том случае, когда для некоторых $C_{t\tau}$ выполнены соотношения

$$W = \sum_{\mathcal{L}(\omega)} F_{t1} C_{t\tau} F_{\tau 1}^* \neq 0, \quad \sum_{i,j} f_{ij}(\lambda_t, \bar{\lambda}_\tau) F_{ti} C_{t\tau} F_{\tau j}^* = 0,$$

где $(t, \tau) \in \mathcal{L}(\omega)$, $i + j > 2$. В данном утверждении можно положить $W = W^* \geq 0$ при условии, что $C_{t\tau}$ — блоки неотрицательно определенной матрицы, а множество $\mathcal{L}(\omega)$ состоит лишь из тех пар (t, τ), для которых $f(\lambda_t, \bar{\lambda}_\tau) = f(\lambda_t, \bar{\lambda}_t) = f(\lambda_\tau, \bar{\lambda}_\tau) = \omega$. Собственные векторы оператора M_f, отвечающие собственному значению ω, можно определить также с помощью соотношений

$$W = \sum_{\mathcal{L}(\omega)} V_t C_{t\tau} V_\tau^*, \quad W = \sum_{\mathcal{L}(\omega)} F_{tm_t} C_{t\tau} F_{\tau m_\tau}^*,$$

где V_t — матрицы, составленные из собственных векторов пучка $F(\lambda)$.

Отметим также, что если M_{f_1}, M_{f_2} — операторы вида (4), то они коммутируют, причем $M_{f_1} M_{f_2} = M_{f_1 f_2}$. Более того, если g — функция k переменных, однозначная и аналитическая в окрестности множества $\sigma(M_{f_1}) \times \ldots \times \sigma(M_{f_k})$, то $M\, g(M_{f_1}, \ldots, M_{f_k}) = M_{g(f_1 \ldots f_k)}$.

Изучим свойства эрмитовых решений матричного уравнения (2). Определим с помощью оператора $MX = \Delta X \Delta^*$ семейства матриц

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{pq} &= \{ X \colon i^+(\hat{X}) = p,\ i^-(\hat{X}) = q \}, \\ \mathcal{Y}_{pq} &= \{ Y \colon i^+(Y) = p,\ i^-(Y) = q \}, \end{aligned} \tag{6}$$

где $\hat{X} = MX$, $Y = M\hat{Y} \in \operatorname{Im} M$, $i^{\pm}(\cdot)$ — индексы инерции эрмитовой матрицы, равные количествам ее положительных и отрицательных собственных значений с учетом кратностей. В (6) выделим семейства $\mathcal{X}_{n0}$ и $\mathcal{Y}_{n0}$. Если Δ — невырожденная матрица, то $\mathcal{X}_{n0}$ и $\mathcal{Y}_{n0}$ совпадают и состоят из всех положительно определенных матриц порядка ν.

Образуем блочную матрицу размера $m \times m$ вида

$$\Gamma_f \begin{pmatrix} m_1 & \ldots & m_\alpha \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_\alpha \end{pmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \ldots & \Gamma_{1\alpha} \\ \Gamma_{\alpha 1} & \ldots & \Gamma_{\alpha\alpha} \end{bmatrix}, \quad \Gamma_{t\tau} = \| f_{ij}(\lambda_t, \bar{\lambda}_\tau) \|_{i,j=1}^{m_t, m_\tau}, \tag{7}$$

где $f_{ij}(\lambda, \mu)$ — частные производные функции f, определенные в (4).

Лемма 1. *Включение* $M_f \mathcal{X}_{n0} \subseteq \mathcal{Y}_{n0}$ *эквивалентно условиям*

$$\Gamma_f \begin{pmatrix} m_1 & \ldots & m_\alpha \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_\alpha \end{pmatrix} \geq 0, \quad \sigma_0 \subset \Lambda^+.$$

Лемма 2. *Для любой матрицы* $Y \in \mathcal{Y}_{n0}$ *уравнение* (2) *имеет решение* $X \in \mathcal{X}_{n0}$ *в том и только в том случае, когда*

$$\Gamma_\varphi\begin{pmatrix} m_1 & \dots & m_\alpha \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_\alpha \end{pmatrix} \geq 0, \tag{8}$$

где $\Gamma_\varphi(\cdot)$ *— матрица вида* (7), *построенная для функции* $\varphi = 1/f$. *Если матрица* (7) *имеет лишь одно положительное собственное значение, то неравенство* (8) *эквивалентно включению* $\sigma_0 \subset \Lambda^+$.

Лемма 3. *Если функция* f *удовлетворяет условиям*

$$\mu_1, \dots, \mu_m \in \Sigma_0 \Rightarrow i^{\pm}\left(\Gamma_f\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \mu_1 & \dots & \mu_m \end{pmatrix}\right) \leq r^{\pm}, \tag{9}$$

где Σ_0 *— некоторая окрестность множества* σ_0, *то выполнены неравенства*

$$i^{\pm}\left(\Gamma_f\begin{pmatrix} m_1 & \dots & m_\alpha \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_\alpha \end{pmatrix}\right) \leq r^{\pm}. \tag{10}$$

Для выполнения неравенства (8) *достаточно, чтобы функция* φ *удовлетворяла условию*

$$\mu_1, \dots, \mu_m \in \Sigma_0 \Rightarrow \Gamma_\varphi\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \mu_1 & \dots & \mu_m \end{pmatrix} \geq 0. \tag{11}$$

В условиях (9) и (11) используются $m \times m$-мерные матрицы вида

$$\Gamma_f\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \mu_1 & \dots & \mu_m \end{pmatrix} = \| f(\mu_t, \bar{\mu}_\tau) \|_1^m, \quad \Gamma_\varphi\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \mu_1 & \dots & \mu_m \end{pmatrix} = \left\| 1/f(\mu_t, \bar{\mu}_\tau) \right\|_1^m.$$

Доказательство лемм 1 и 2 основано на соотношениях (4) и результатах работ [6, 12]. Доказательство леммы 3 осуществляется путем построения матрицы конгруэнтных преобразований K такой, что

$$K\,\Gamma_f\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ \mu_{11} & \dots & \mu_{1m_1} & \dots & \mu_{\alpha 1} & \dots & \mu_{\alpha m_\alpha} \end{pmatrix} K^* \to \Gamma_f\begin{pmatrix} m_1 & \dots & m_\alpha \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_\alpha \end{pmatrix}, \tag{12}$$

где $\mu_{ti} \to \mu_{t1} = \lambda_t$, $\mu_{ti} \in \Sigma_0$. В частности, можно положить

$$K = \begin{pmatrix} K_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & K_\alpha \end{pmatrix}, \quad K_t = \begin{pmatrix} k_{t1}^{(1)} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ k_{t1}^{(m_t)} & \dots & k_{tm_t}^{(m_t)} \end{pmatrix},$$

$$k_{tp}^{(i)} = (-1)^{i-p} C_{i-1}^{i-p} \delta_t^{1-i},$$

где $\delta_t = \mu_{t2} - \mu_{t1} = \dots = \mu_{tm_t} - \mu_{tm_t - 1}$, $\delta_t \to 0$, $t = 1, \dots, \alpha$. При этом неравенства (10) следуют из (9), (12) и закона инерции.

Теорема 1. *Если для некоторой матрицы* $Y \in \mathcal{Y}_{n0}$ *уравнение* (2) *имеет решение* $X \in \mathcal{X}_{p0}$, *то подмножество спектра* σ_0 *расположено в области* Λ^+. *Обратно, при условии* $\sigma_0 \subset \Lambda^+$ *существуют матрицы* $X \in \mathcal{X}_{n0}$ *и* $Y \in \mathcal{Y}_{n0}$, *удовлетворяющие уравнению* (2). *Если* $\sigma_0 \subset \Lambda^+$ *и функция* $\varphi = 1/f$ *удовлетворяет условиям* (11), *то для любой матрицы* $Y \in \mathcal{Y}_{n0}$ *уравнение* (2) *имеет решение* $X \in \mathcal{X}_{n0}$.

Теорема 2. *Если для некоторой матрицы* $Y \in \mathcal{Y}_{n0}$ *уравнение* (2) *имеет решение* $X \in \mathcal{X}_{pq}$, *то* $n^0 = 0$. *При этом, если функция* f *удовлетворяет условиям* (9) *при* $r^{\pm} = 1$, *то выполнены равенства*

$$n^+ = p, \quad n^- = q, \quad p + q = n. \tag{13}$$

Если же $n^0 = 0$, *то существуют матрицы* $X \in \mathcal{X}_{pq}$ *и* $Y \in \mathcal{Y}_{n0}$, *удовлетворяющие уравнению* (2), *и выполнены равенства* (13).

Теорема 3. *Если уравнение* (2) *при* $Y = 0$ *имеет решение* $X \in \lambda_{i\,\nu}$, *то выполнена оценка* $n^0 \geq p$. *В частности, при* $X \in \mathcal{X}_{n0}$ *все точки* σ_0 *расположены на кривой* Λ^0. *Обратно, если* $n^0 \neq 0$, *то уравнение* (2) *при* $Y = 0$ *имеет решение* $X \in \mathcal{X}_{p0}$ *для любого* p *из интервала* $0 \leq p \leq \xi$, *где* ξ — *сумма геометрических кратностей собственных значений* $\lambda_t \in \sigma_0 \bigcap \Lambda^0$.

Доказательство теорем 1 – 3 вытекает из лемм 1 – 3, соотношений (4) и аналогичных результатов о локализации спектра матрицы [6, 12].

***Примечание* 1.** В условии (11) $\Sigma_0 \subseteq \Lambda^+$. В частности, при $\Sigma_0 = \Lambda^+$ данное условие описывает некоторый класс функций f, используемых в теореме 1 (см. также [4, 6]). В условиях (9) теоремы 2 можно положить $\Sigma_0 = \Lambda^+ \bigcup \Lambda^-$. Если функция f представлена в виде

$$f(\lambda, \overline{\mu}) = \sum_{i,j} \gamma_{ij} f_i(\lambda) \overline{f_j(\mu)}, \tag{14}$$

то условия (9) и (11) можно установить при соответствующих ограничениях $i^{\pm}(\Gamma) \leq r^{\pm}$ и $i^+(\Gamma) = 1$, где Γ — эрмитова матрица, составленная из коэффициентов γ_{ij} разложения (14).

***Примечание* 2.** Формулы (4), (6) и подмножество спектра σ_0 в теоремах 1 – 3 можно определить для любого решения Z системы (5). В качестве Z могут выступать также решения более общей системы

$$BZA = BZAZB, \quad BZB = BZBZB.$$

3.2. Пусть $S(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + \ldots + \lambda^s A_s$ — матричный полином, спектр которого состоит из h собственных значений с учетом кратностей. Построим оператор (3) для функции (14) и линейного пучка

$$F(\lambda) = A + \lambda B,$$

$$A = \begin{bmatrix} A_0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -I & \ldots & 0 \\ \hdashline 0 & \ldots & \ldots & -I \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} A_1 & I & \ldots & 0 \\ A_{s-1} & 0 & \ldots & I \\ \hdashline A_s & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix},$$

спектр которого совпадает с $\sigma(S)$. Выражение (4) приводится к виду

$$M_f X = \sum_{i,j} \gamma_{ij} F_i X F_j^*, \tag{15}$$

где

$$F_i = \Delta f_i(\theta), \quad \Delta = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \ldots & \Delta_{1s} \\ \hdashline \Delta_{s1} & \ldots & \Delta_{ss} \end{bmatrix}, \quad \theta = \begin{bmatrix} \theta_{11} & \ldots & \theta_{1s} \\ \hdashline \theta_{s1} & \ldots & \theta_{ss} \end{bmatrix},$$

$$\Delta_{pq} = \begin{cases} -\sum_{j=0}^{p-1} A_j Z_{q-p+j}, & p < q, \\ \sum_{j=p}^{s} A_j Z_{q-p+j}, & p \geq q, \end{cases} \qquad \theta_{pq} = \begin{cases} -\sum_{j=0}^{p-1} A_j Z_{q-p+j+1}, & p \leq q, \\ \sum_{j=p}^{s} A_j Z_{q-p+j+1}, & p > q. \end{cases}$$

Последние соотношения зависят от s интегралов

$$Z_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \lambda^{k-1} S^{-1}(\lambda) d\lambda, \quad k = 1, 2, \ldots, s. \tag{16}$$

Лемма 4. *Семейство интегралов* (16) *является решением системы* $2s$ *матричных алгебраических уравнений*

$$\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=p+1}^{s}\left(A_i Z_{i+j-p} A_j - A_j Z_{i+j-p} A_i\right) = 0, \quad p = 0, \ldots, s-1,$$
$$Z_q = \sum_{i=q}^{s}\sum_{j=i}^{s} Z_i A_j Z_{q+j-i} - \sum_{i=0}^{q-1}\sum_{j=-1}^{i-1} Z_i A_j Z_{q+j-i}, \quad q = 1, \ldots, s, \tag{17}$$

где $Z_0 = A_{-1} = 0$.

Лемма 5. *Пусть* $Z_1, \ldots, Z_s$ — *нетривиальное решение системы* (17). *Тогда* Δ *является проектором ранга* $n \le h$ *матрицы* θ *и, по крайней мере,* n *собственных значений матрицы* θ *с учетом кратностей принадлежат спектру матричного полинома* $S(\lambda)$. *При этом, если* $\lambda \in \sigma(\theta)$, *то либо* $\lambda \in \sigma_0 \subseteq \sigma(S)$, *либо* $\lambda = 0$.

Доказательство лемм 4 и 5 проводится путем сведения системы (5) к виду (17) с учетом блочной структуры матриц A и B. Матрицы $Z_1, \ldots, Z_s$, удовлетворяющие системе (17), в частности, интегралы (16), составляют первую блочную строку матрицы Z. Остальные блоки матрицы Z выражаются через $Z_1, \ldots, Z_s$. Общее решение системы (5) определяется с помощью соотношений [11]

$$Z = -Q\begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P, \quad G^2 = G,\ GJ = JG,$$

где P и Q — матрицы преобразования пучка $F(\lambda)$ к канонической форме, G — произвольный проектор матрицы J, $\sigma(J) = \sigma(F)$. Если $\operatorname{rang} G = n \ne 0$, то для некоторой матрицы T выполнены соотношения

$$G = T\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}T^{-1}, \quad T^{-1}JT = \begin{bmatrix} J_0 & 0 \\ 0 & J_1 \end{bmatrix},$$

где I — единичная матрица порядка n, J_0 — блок размера $n \times n$, отвечающий подмножеству спектра σ_0. Если $\sigma(J_0)\bigcap\sigma(J_1) = \varnothing$, то матрица Z представляется в интегральной форме (см. п. 3.1).

Согласно лемме 5 каждому ненулевому решению системы (17) соответствует некоторая часть спектра σ_0 матричного полинома $S(\lambda)$, которая определяется n собственными значениями матрицы θ, причем $n = \operatorname{rang}\Delta$. Если Δ имеет максимальный ранг h, то σ_0 представляет весь спектр $\sigma(S)$.

На основе изложенного сформулируем следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть оператор* M_f *в уравнении* (2) *построен в виде* (15) *для любого нетривиального решения* $Z_1, \ldots, Z_s$ *системы* (17) *и функции* (14). *Тогда для подмножества спектра* $\sigma_0 \subseteq \sigma(S)$ *матричного полинома* $S(\lambda)$, *определяемого* n *собственными значениями матрицы* θ, *выполнены все утверждения лемм* 1 – 3 *и теорем* 1 – 3.

Отметим, что для квадратичного пучка $S(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2$ матрицы Δ и θ в утверждениях леммы 5 и теоремы 4 имеют вид

$$\Delta = \begin{bmatrix} A_1 Z_1 + A_2 Z_2 & -A_0 Z_1 \\ A_2 Z_1 & A_2 Z_2 \end{bmatrix}, \quad \theta = \begin{bmatrix} -A_0 Z_1 & -A_0 Z_2 \\ A_2 Z_2 & -A_0 Z_1 - A_1 Z_2 \end{bmatrix},$$

где Z_1 и Z_2 — решения системы четырех матричных уравнений

$$A_0Z_1A_1 - A_1Z_1A_0 = A_2Z_2A_0 - A_0Z_2A_2,$$
$$A_0Z_1A_2 - A_2Z_1A_0 = A_2Z_2A_1 - A_1Z_2A_2,$$
$$Z_1 = Z_1A_1Z_1 + Z_1A_2Z_2 + Z_2A_2Z_1,$$
$$Z_2 = Z_2A_2Z_2 - Z_1A_0Z_1.$$

3.3. Пусть $F(\lambda)$ — матрица-функция размера $\nu\times\nu$, допускающая правильную факторизацию

$$F(\lambda) = U(\lambda)V(\lambda), \quad \sigma(U)\cap\sigma(V)=\varnothing, \quad U(\lambda) = A + \lambda B, \quad \sigma(U) = \sigma_0, \tag{18}$$

где σ_0 — подмножество спектра $\sigma(F)$, состоящее из $n\le\nu$ собственных значений и охваченное контуром γ. Рассмотрим уравнение (2) и множества матриц (6) для оператора (3).

Согласно [7] операторы M_f и M можно привести к виду

$$M_fX = L\hat{M}_f\left(RXR^*\right)L^*, \quad MX = LRXR^*L^*, \tag{19}$$

где L и R — некоторые матрицы размеров $\nu\times n$ и $n\times\nu$ соответственно, $\hat{M}_f$ — оператор типа M_f, построенный для линейного пучка $F_0(\lambda) = J_0 - \lambda I$ со спектром $\sigma_0=\sigma(J_0)$. При этом $\Delta = LR$.

Учитывая соотношения (19) и закон инерции, сформулируем следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть оператор M_f в уравнении* (2) *построен в виде* (3) *при условиях* (18) *и* $\operatorname{rang}\Delta = n\le\nu$. *Тогда для подмножества спектра $\sigma_0\subseteq\sigma(F)$, состоящего из n собственных значений матрицы-функции $F(\lambda)$, выполнены все утверждения лемм* $1-3$ *и теорем* $1-3$.

Отметим, что операторы типа M_f могут быть приведены к виду (4) без использования разложений (14) и (18). При этом матрицы F_{ti} определяются коэффициентами главной части лорановского разложения логарифмической производной D_λ в окрестности полюса $\lambda_t\in\sigma_0$ порядка m_t.

1. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 532 с.
2. *Ostrowsky O., Schneider H.* Some theorems on the inertia of general matrices // J. Math. Anal. and Appl. – 1962. – **4**. – P. 72 – 84.
3. *Hill R. D.* Inertia theory for simultaneously triangulable complex matrices // Linear Algebra and Its Appl. – 1969. – **2**. – P. 131 – 142.
4. *Gutman S., Chojnowski F.* Root-Clustering Criteria (II); Linear Matrix Equations // IMA J. Math. Contr. and Inf. – 1989. – **6**. – P. 269 – 300.
5. *Харитонов В. Л.* Задача распределения корней характеристического полинома автономной системы // Автоматика и телемеханика. – 1981. – № 5. – С. 42 – 47.
6. *Мазко А. Г.* Трансформации и инерция решений линейных матричных уравнений // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 1. – С. 60 – 68.
7. *Мазко А. Г.* Распределение спектра регулярного пучка матриц относительно плоских кривых // Укр. мат. журн. – 1986. – **38**, № 1. – С. 127 – 131.
8. *Мазко А. Г.* Отщепление и локализация спектра матричного полинома // Докл. НАН Украины. – 1994. – № 10. – С. 15 – 19.
9. *Келдыш М. В.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // Докл. АН СССР. – 1961. – **77**, № 1. – С. 11 – 14.
10. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 534 с.
11. *Мазко А. Г.* К задаче распределения спектра регулярного пучка матриц // Прямые методы в задачах динамики и устойчивости многомерных систем. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1986. – С. 99 – 110.
12. *Мазко А. Г.* Обобщенное уравнение Ляпунова для регулярного пучка матриц // Математические методы исследования прикладных задач динамики тел, несущих жидкость. – Киев: Ин-т математики АН Украины, 1992. – С. 67 – 76.

Получено 22.09.93