УДК 517.5

М. М. Шеремета, д-р фіз.-мат. наук (Львів. ун-т)

ПРО РАДІУСИ ОДНОЛИСТОСТІ ПОХІДНИХ ГЕЛЬФОНДА – ЛЕОНТЬЄВА

Let $0<R\le+\infty$, $A(R)$ be the class of functions

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}f_kz^k,$$

which are analytic in $\{z\colon |z|<R\}$, and let

$$l(z)=\sum_{k=0}^{\infty}l_kz^k,\quad l_k>0,$$

be a formal power series. We prove that if $l_k^2/l_{k+1}l_{k-1}$ is a nonincreasing sequence, $f\in A(R)$, and $|f_k/f_{k+1}|\nearrow R$ $(k\to\infty)$, $0<R\le+\infty$, then (ρ_n), the sequence of radii of univalence of the Gel'fond–Leont'ev derivatives

$$D_l^nf(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{l_kf_{k+n}}{l_{k+n}}z^k$$

satisfies the relation

$$\rho_n\asymp\frac{l_{n+2}}{l_{n+1}}\left|\frac{f_{n+1}}{f_{n+2}}\right|.$$

The case where the condition $|f_k/f_{k+1}|\nearrow R$, $k\to\infty$, is not satisfied is also considered.

Нехай $0<R\le+\infty$, $A(R)$ — клас аналітичних в $\{z\colon |z|<R\}$ функцій

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}f_kz^k,\quad \text{а}\quad l(z)=\sum_{k=0}^{\infty}l_kz^k,\quad l_k>0,$$

— формальный степеневий ряд. Доведено, що коли $l_k^2/l_{k+1}l_{k-1}$ — незростаюча послідовність, $f\in A(R)$ і $|f_k/f_{k+1}|\nearrow R$, $k\to\infty$, $0<R\le+\infty$, то послідовність (ρ_n) радіусів однолистості похідних Гельфонда–Леонтьєва

$$D_l^nf(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{l_kf_{k+n}}{l_{k+n}}z^k$$

задовольняє співвідношення

$$\rho_n\asymp\frac{l_{n+2}}{l_{n+1}}\left|\frac{f_{n+1}}{f_{n+2}}\right|.$$

Вивчається також випадок, коли умова $|f_k/f_{k+1}|\nearrow R$, $k\to\infty$, не виконується.

Нехай $0<R\le+\infty$, $A(R)$ — клас аналітичних в крузі $\{z\colon |z|<R\}$ функцій

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}f_kz^k,$$

а $A^+(R)=\{f\in A(R)\colon f_k>0,\ k\in\mathbb{Z}_+\}$. Запис $l\in A^+(0)$ означатиме, що $\sum_{k=0}^{\infty}l_kz^k$ — формальний степеневий ряд з додатними коефіцієнтами, так що $A^+(R)\subset A^+(0)$ для всіх $R\in[0,+\infty]$. Для $f\in A(R)$, $0<R\le+\infty$, і $l\in A^+(0)$ формальний, взагалі кажучи, степеневий ряд

$$D_l^n f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{l_k}{l_{k+n}} f_{k+n} z^k$$

будемо називати n-тою похідною Гельфонда – Леонтьєва (функції f відносно функції l). При цьому можемо вважати, що $l_0 = 1$. Якщо

$$l(z) = e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k,$$

то $D_l^n f(z) = f^{(n)}(z)$ є звичайною n-тою похідною функції f.

При означенні радіуса однолистості ρ функції $f \in A(R)$ маємо на увазі таке: якщо $f'(0) = 0$, то вважаємо $\rho = 0$, а якщо $f'(0) \neq 0$, то ρ — радіус найбільшого круга з центром у точці $z = 0$, в якому функція f є однолистою.

Асимптотична поведінка послідовності радіусів однолистості звичайних похідних функції $f \in A(R)$, $0 < R \leq +\infty$, вивчалась багатьма авторами. Найвагоміший вклад до розв'язання цієї проблеми зробили С. Шах і С. Трімбле [1–3]. Природною є задача про поведінку радіусів ρ_n однолистості похідних Гельфонда – Леонтьєва, її дослідженню присвячена дана стаття. Зауважимо, що ця задача розглядалась у статтях [4, 5], але при сильніших вимогах на функцію l. Наприклад, ці вимоги не задовольняє функція

$$l(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \exp\left\{-ak^2\right\} z^k, \quad a \in (0, +\infty),$$

яка, як буде показано нижче, є в певному розумінні екстремальною в дослідженнях поводження послідовності (ρ_n). Крім цього, в [4, 5] автори обмежились лише оцінками ρ_n знизу.

Нам будуть потрібні деякі леми.

Лема 1. *Якщо функція*

$$a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

однолиста в крузі $\{z: |z| < \rho\}$, *то* $|a_k| \rho^{k-1} \leq k |a_1|$ *для всіх* $k \in \mathbb{N}$.

Дійсно, функція

$$a^*(z) = \frac{1}{a_1 \rho} (a(\rho z) - a(0)) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k^* z^k,$$

де $a_k^* = a_k \rho^{k-1} / a_1$, є однолистою в крузі $\{z: |z| < 1\}$, і за доведеною в [6] гіпотезою Біបербаха $\left|a_k^*\right| \leq k$ для всіх $k \in \mathbb{N}$, звідки випливає потрібна нерівність.

Лема 2. *Якщо*

$$a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad \text{і} \quad \sum_{k=2}^{\infty} k \left|a_k\right| \rho^{k-1} \leq |a_1|,$$

то функція a *однолиста в крузі* $\{z: |z| < \rho\}$.

Дійсно, для функції a^* маємо

$$\sum_{k=2}^{\infty} k \left|a_k^*\right| \leq 1,$$

ому [1] вона однолиста в $\{z\colon |z|<1\}$, а отже, функція a однолиста в $\{z\colon$ $|<\rho\}$.

Для додатної послідовності $(l_m)_{m=0}^{\infty}$, чисел $k\in\mathbb{N}$ і $n\in\mathbb{Z}_+$ покладемо

$$\kappa_k = \frac{l_k^2}{l_{k+1}l_{k-1}}, \quad \eta_k = \eta_{k,n} = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{l_{k+1}l_{n+1}}{l_{k+n+1}l_1}\right).$$

Лема 3. *Якщо послідовність* (κ_k) *незростаюча, то і послідовність* (η_k) *зростаюча.*

Дійсно, для всіх $k\in\mathbb{N}$ маємо $\eta_{k+1}-\eta_k = \beta_k/k(k+1)$, де

$$\beta_k = k\ln\frac{l_{k+2}}{l_{k+n+2}} - (k+1)\ln\frac{l_{k+1}}{l_{k+n+1}} - \ln\frac{l_{n+1}}{l_1}.$$

скільки

$$\beta_{k+1}-\beta_k = (k+1)\ln\frac{l_{k+3}}{l_{k+n+3}} - (k+2)\ln\frac{l_{k+2}}{l_{k+n+2}} +$$

$$+ (k+1)\ln\frac{l_{k+1}}{l_{k+n+1}} - k\ln\frac{l_{k+2}}{l_{k+n+2}} =$$

$$= (k+1)\left\{\ln\frac{l_{k+3}}{l_{k+n+3}} - 2\ln\frac{l_{k+2}}{l_{k+n+2}} + \ln\frac{l_{k+1}}{l_{k+n+1}}\right\} =$$

$$= (k+1)\left\{\ln\frac{l_{k+n+2}^2}{l_{k+n+3}l_{k+n+1}} - \ln\frac{l_{k+2}^2}{l_{k+3}l_{k+1}}\right\} =$$

$$= (k+1)\{\ln\kappa_{k+n+2} - \ln\kappa_{k+2}\} \le 0,$$

$$\beta_{k+1} \le \beta_k \le \ldots \le \beta_1 = \ln\frac{l_3}{l_{n+3}} - 2\ln\frac{l_2}{l_{n+2}} + \ln\frac{l_1}{l_{n+1}} =$$

$$= \ln\frac{l_{n+2}^2}{l_{n+1}l_{n+3}} - \ln\frac{l_2^2}{l_3 l_1} = \ln\kappa_{n+2} - \ln\kappa_2 \le 0$$

отже, послідовність (η_k) незростаюча.

Дослідження поведінки послідовності (ρ_n) радіусів однолистості похідних ельфонда – Леонтьєва $D_l^n f$ почнемо з такої теореми.

Теорема 1. *Нехай* $l\in A^+(0)$ *і послідовність* (κ_k) *незростаюча, а функ-ія* $f\in A(R)$, $0<R\le+\infty$, *така, що* $|f_k/f_{k+1}| = r_k \nearrow R$, $k\to\infty$. *Тоді*

$$\rho_n \asymp \frac{l_{n+2}}{l_{n+1}}\left|\frac{f_{n+1}}{f_{n+2}}\right|.$$

Доведення. Застосовуючи лему 1 до $D_l^n f$, маємо

$$\frac{l_k}{l_1}\,\frac{l_{n+1}}{l_{n+k}}\left|\frac{f_{k+1}}{f_{1+n}}\right|\rho_n^{k-1} \le k \tag{1}$$

для всіх $k \in \mathbb{N}$ і $n \in \mathbb{Z}_+$. Зокрема, при $k = 2$ звідси випливає

$$\rho_n \le 2\,\frac{l_1}{l_2}\,\frac{l_{n+2}}{l_{n+1}}\left|\frac{f_{n+1}}{f_{n+2}}\right|. \tag{2}$$

Позначимо тепер

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(k+1)\frac{l_{k+1}l_{n+1}}{l_1 l_{n+k+1}}\left|\frac{f_{k+n+1}}{f_{n+1}}\right|x^k.$$

Оскільки $|f_k/f_{k+1}| = r_k \nearrow R \quad (k \to \infty)$, то

$$\left|\frac{f_{n+k+1}}{f_{n+1}}\right| = \frac{1}{r_{n+1}\ldots r_{n+k}} \le \left(\frac{1}{r_{n+1}}\right)^k = \left|\frac{f_{n+2}}{f_{n+1}}\right|^k,$$

а за лемою 3

$$\frac{l_{k+1}l_{n+1}}{l_1 l_{n+k+1}} = \exp\{k\eta_{k,n}\} \le \exp\{k\eta_{1,n}\} = \left(\frac{l_2 l_{n+1}}{l_1 l_{n+2}}\right)^k.$$

Тому

$$\varphi_n(x) \le \psi_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(k+1)\left(\frac{x}{r_{n+1}}e^{\eta_{1,n}}\right)^k = \left(1 - \frac{x}{r_{n+1}}e^{\eta_{1,n}}\right)^{-2} - 1$$

при умові, що $x \in [0, r_{n+1}e^{-\eta_{1,n}})$. Легко бачити, що $\psi_n(x_n) = 1$, де

$$x_n = \left((\sqrt{2}-1)/\sqrt{2}\right)r_{n+1}\exp\{-\eta_{1,n}\}.$$

Але тоді $\varphi_n(x_n) \le 1$, тобто

$$\sum_{k=2}^{\infty}k\,\frac{l_k l_{n+1}}{l_1 l_{n+k}}\left|\frac{f_{n+k}}{f_{n+1}}\right|x_n^{k-1} \le 1,$$

і, застосовуючи лему 2 до функції $D_l^n f$, бачимо, що вона є однолистою в крузі $\{z\colon |z| < x_n\}$. Звідси випливає, що $\rho_n \ge x_n$ і, отже,

$$\rho_n \ge \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\,\frac{l_1}{l_2}\,\frac{l_{n+2}}{l_{n+1}}\left|\frac{f_{n+1}}{f_{n+2}}\right|. \tag{3}$$

З нерівностей (2) і (3) випливає потрібне співвідношення, яке, до речі, у випадку, коли $0 < R < +\infty$, можна записати у вигляді $\rho_n \asymp l_{n+2}/l_{n+1}$. Теорема доведена.

З умови незростання послідовності (κ_k) випливає, що $(1/k^2)\ln(1/l_k) \le \le Q < +\infty$ для всіх $k \in \mathbb{N}$, оскільки

$$\frac{l_k}{l_{k+1}} = \kappa_k\,\frac{l_{k-1}}{l_k} = \ldots = \frac{1}{l_1}\prod_{j=1}^{k}\kappa_j$$

і

$$\ln\frac{1}{l_{k+1}} = \ln\frac{1}{l_k} + \ln\frac{1}{l_1} + \sum_{j=1}^{k}\ln\kappa_j \le$$

$$\le \ln\frac{1}{l_k} + \ln\frac{1}{l_1} + k\ln\kappa_1 \le \ldots \le (k+1)\ln\frac{1}{l_1} + \frac{k(k+1)}{2}\ln\kappa_1 .$$

Тому, якщо

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k^2}\ln\frac{1}{l_k} = +\infty, \tag{4}$$

то послідовність (κ_k) не є зростаючою. У цьому випадку може не виконуватись також і співвідношення, встановлене теоремою 1. Фактично, справедливе таке твердження.

Твердження 1. *Якщо послідовність* (l_k) *задовольняє умову* (4), *то існує* $n\in\mathbb{N}$ *таке, що* $\rho_n = 0$ *для кожної функції* $f\in A(R)$, $0<R<+\infty$, *такої, що* $|f_k/f_{k+1}|\nearrow R$, $k\to\infty$.

Дійсно, з нерівності (1) випливає

$$\rho_n^{k+1} \le k\left|\frac{f_{k+n+1}}{f_{k+n}}\right|^{k-1}\frac{l_1}{l_{n+1}}\exp\{-(n+k)^2\alpha(k+n) + k^2\alpha(k)\},$$

де $\alpha(k) = (1/k^2)\ln(1/l_k)\to+\infty$, $k\to\infty$, звідки

$$\rho_n \le (1+o(1))R\exp\left\{-\frac{2kn\alpha(k+n) - k^2(\alpha(k+n)-\alpha(k))}{k-1}\right\}$$

при $k\to\infty$. Залишилося показати, що існує $n\in\mathbb{N}$ таке, що для всіх $k\in\mathbb{N}$ виконується нерівність $\alpha(k+n)\ge\alpha(k)$.

Припустимо від супротивного, що для кожного $n\in\mathbb{N}$ існує $k_n\in\mathbb{N}$ таке, що $\alpha(k_n)>\alpha(n+k_n)$. Покладемо $n_1 = 1$ і $n_{j+1} = n_j + k_{n_j}$, $j\in\mathbb{N}$. Тоді $n_j\to\to\infty$, $j\to\infty$, і

$$\alpha(1) > \alpha(1+k_1) = \alpha(n_2) > \alpha\left(n_2+k_{n_2}\right) > \ldots > \alpha(n_j),$$

тобто

$$\varliminf_{k\to\infty}\alpha(k) < \alpha(1),$$

що не можливо.

У зв'язку з твердженням 1 виникають два питання: 1) чи можна в ньому умову (4) замінити умовою

$$\varlimsup_{k\to\infty}\frac{1}{k^2}\ln\frac{1}{l_k} = +\infty\,?$$

2) чи справедливе воно для випадку $R=+\infty$? На перше питання відповісти не вдалось, а на друге питання відповідь полягає в тому, що в твердженні 1 умову $0<R<+\infty$ замінити умовою $R=+\infty$, взагалі кажучи, не можна. Це видно при $l_k = \exp\{-k^3\}$ з доведення наступного факту.

Твердження 2. *Для кожної функції* $l\in A^+(\infty)$ *існує функція* $f\in A(\infty)$ *така, що* $\rho_n\ge\rho>0$ *для всіх* $n\in\mathbb{Z}_+$.

Дійсно, візьмемо $f_k = l_k$ для всіх $k\in\mathbb{Z}_+$ (у випадку, коли $l_k = \exp\{-k^3\}$, маємо $|f_k/f_{k+1}|\nearrow+\infty$, $k\to\infty$). Тоді функція φ_n з доведення теореми 1 набуває вигляду

$$\varphi_n(x) = \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(k+1)\frac{l_{k+1}}{l_1}x^k.$$

Оскільки $\varphi \in A^+(\infty)$, $\varphi(0) = 0$ і $\varphi(x)\uparrow +\infty$, $x \to +\infty$, то існує $\rho \in (0, +\infty)$ таке, що $\varphi(\rho) = 1$. Тому, як при доведенні теореми 1, застосовуючи лему 1 до $D_l^n f$, бачимо, що $\rho_n \geq \rho$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Проте справедливе і таке твердження.

Твердження 3. *Для кожної трансцендентної цілої функції f існує функція $l \in A^+(\infty)$ така, що $\rho_n = 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.*

Дійсно, оскільки $\sqrt[k]{|f_k|} \to 0$, $k \to \infty$, і f — трансцендентна функція, то існує зростаюча послідовність (k_j) натуральних чисел така, що $\ln|f_{k_j}| = -k_j\alpha(k_j)$, де $\alpha(x) \nearrow +\infty$, $x \to +\infty$. Нехай β — додатна неперервна зростаюча до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функція така, що $\beta(k_j) - \beta(k_j - 1) = 2\alpha(k_j)$, $j \in \mathbb{N}$. Покладемо $l_k = \exp\{-k\beta(k)\}$. Тоді з нерівності (1) для $k = k_j - n$ і $j \geq j_0$ маємо

$$\rho_n \leq \exp\left\{\frac{-k_j\beta(k_j) + (k_j - n)\beta(k_j - n) + k_j\alpha(k_j)}{k_j - n - 1} + o(1)\right\} \leq$$

$$\leq \exp\left\{-\frac{k_j}{k_j - n - 1}\Big(\beta(k_j) - \beta(k_j - 1) - \alpha(k_j)\Big) + o(1)\right\} =$$

$$= \exp\{-(1 + o(1))\alpha(k_j)\} \to 0, \quad j \to \infty,$$

тобто $\rho_n = 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Твердження 4. *Нехай функція $f \in A(R)$, $0 < R \leq +\infty$, така, що $|f_k/f_{k+1}| \nearrow R$, $k \to \infty$, а $(1/k^2)\ln(1/l_k) = p \equiv \mathrm{const} > 0$. Тоді*

$$\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} \leq \rho_n e^{2pn}\left|\frac{f_{n+2}}{f_{n+1}}\right| \leq 2.$$

Дійсно, в даному випадку $\kappa_k = \exp(2p)$ для всіх $k \in \mathbb{N}$ і справедливість цього твердження випливає з (2) і (3).

Умови неспадання послідовності $(|f_k/f_{k+1}|)$ і незростання послідовності (κ_k) при доведенні теореми 1 і твердження 4 використовувалися тільки для того, щоб довести нерівність (3). Їх, взагалі кажучи, усунути не можна. Щодо умови незростання послідовності (κ_k), то це видно з твердження 1 у випадку виконання умови (4). Проте її не можна усунути й у випадку, коли $(1/k^2)\ln(1/l_k) = O(1)$, $k \to \infty$. Дійсно, нехай

$$f(z) = e^z = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}z^k, \quad \text{а} \quad l(z) = \sum_{k=0}^{\infty} l_k z^k,$$

де $l_k = \exp\{-k^2\}$ при $k = 2m$ і $l_k = \exp\{-2k^2\}$ при $k = 2m+1$, $m \in \mathbb{Z}_+$. Очевидно, $f \in A^+(\infty)$ і $l \in A^+(\infty)$. Легко бачити, що

$$|f_k/f_{k+1}| = k + 1 \uparrow +\infty, \quad f_k^2/f_{k+1}f_{k-1} = (k+1)/k \downarrow 1,$$

а

$$l_k/l_{k+1} = \exp\{k^2+4k+2\}, \quad l_k^2/l_{k+1}l_{k-1} = \exp\{2k^2+4\} \quad \text{при} \quad k=2m,$$

$$l_k/l_{k+1} = \exp\{-k^2+2k+1\},$$

$$l_k^2/l_{k+1}l_{k-1} = \exp\{-2k^2+2\} \quad \text{при} \quad k=2m+1.$$

Для радіуса ρ_n однолистості функції $D_l^n f$ з нерівності (1) при $k=3$ маємо

$$\rho_n^2 \le 3\ \frac{f_{n+1}}{f_{n+3}}\ \frac{l_{n+3}}{l_{n+1}}\ \frac{l_1}{l_3}, \tag{5}$$

звідки при $n=2m$ випливає, що $\rho_n \le \sqrt{3(n+3)(n+2)}\exp\{-4n\}$, а в той же час

$$(l_{n+2}/l_{n+1})(f_{n+1}/f_{n+2}) = (n+2)\exp\{n^2-2\} \ne O(\rho_n), \quad n\to\infty.$$

Аналогічно, для радіуса ρ_n^* однолистості функції $D_f^n l$ маємо оцінку (5) з l_j замість f_j, звідки при $n=2m+1$ випливає

$$\rho_n^* \le \sqrt{18/(n+1)(n+2)}\ \exp\{2n+4\}$$

і

$$(f_{n+2}/f_{n+1})(l_{n+1}/l_{n+2}) = (1/(n+2))\exp\{n^2+6n+7\} \ne O(\rho_n^*), \quad n\to\infty.$$

Перейдемо до розгляду випадку, коли f — довільна функція з $A(R)$. Тут доведеться розрізняти випадки $0<R<+\infty$ і $R=+\infty$.

Нехай спочатку f — ціла функція, а ω — додатна неперервна зростаюча до $+\infty$ на $[0,+\infty)$ функція. Нехай $\mu_f(r) = \max\{|f_k|r^k : k\in\mathbb{Z}_+\}$ — максимальний член, а $\nu_f(r) = \max\{k: |f_k|r^k=\mu_f(r)\}$ — центральний індекс функції f. Покладемо

$$\varlimsup_{r\to\infty}\ \frac{1}{r}\ \omega(\nu_f(r)) = \frac{\gamma}{\delta}.$$

Теорема 2. *Нехай* $f\in A(R)$, $0<R\le+\infty$, *і* $l\in A^+(0)$. *Тоді для радіусів* ρ_n *однолистості функцій* $D_l^n f$ *маємо*:

1) *якщо* $R=+\infty$ *і* $\delta>0$, *то*

$$\varliminf_{n\to\infty}\ \frac{\rho_n l_{n+1}}{\omega(n+2)l_{n+2}} \le \frac{\gamma}{\delta}; \tag{6}$$

2) *якщо* $0<R<+\infty$ *і* f *має на колі* $\{z: |z|=R\}$ *принаймні одну особливу точку, то*

$$\varliminf_{n\to\infty}\ \frac{\rho_n l_{n+1}}{l_{n+2}} \le \frac{2Rl_1}{l_2}. \tag{7}$$

Доведення. Нехай $R=+\infty$, $\delta>0$, і (n_p) — зростаюча послідовність натуральних чисел така, що $\nu_f\left(r_{n_p}\right) = n_p$ при деякому $r_{n_p}\in(0,+\infty)$, тобто (n_p) — послідовність значень, які приймає центральний індекс, а (r_{n_p}) — відповідна послідовність точок стрибка цієї функції. Тоді для кожного $\delta_1\in(0,\delta)$ і всіх $p\ge p_0(\delta_1)$ виконуються співвідношення

$$\omega(n_p) = \omega\big(\nu_f(r_{n_p})\big) \ge \delta_1 r_{n_p},$$

$$|f_m| r_{n_p}^m \le \left|f_{\nu_f(r_{n_p})}\right| r_{n_p}^{\nu_f(r_{n_p})} = \left|f_{n_p}\right| r_{n_p}^{n_p}.$$

Тому, якщо в нерівності (2) візьмемо $n = n_p - 2$, то

$$\rho_{n_p-2} \le 2\,\frac{l_1}{l_2}\,\frac{l_{n_p}}{l_{n_p-1}}\, r_{n_p} \le \frac{2l_1}{\delta_1 l_2}\,\frac{l_{n_p}}{l_{n_p-1}}\,\omega(n_p),$$

звідки

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\rho_n l_{n+1}}{\omega(n+2) l_{n+2}} \le \overline{\lim}_{p\to\infty} \frac{\rho_{n_p-2} l_{n_p-1}}{\omega(n_p) l_{n_p}} \le \frac{2l_1}{\delta_1 l_2},$$

тобто з огляду на довільність δ_1 маємо (6).

Доведемо (7). Оскільки f має на $\{z: |z| = R\}$ особливу точку, то $f_k \ne 0$ для нескінченної кількості значень k. Якщо при цьому $f_j = 0$ для нескінченного числа значень j, то з (2) випливає, що $\rho_n = 0$ для нескінченного числа значень n, і нерівність (7) очевидна. Тому можемо вважати, що $f_k \ne 0$, $k \ge k_0$. Тоді для кожного $R_1 > R$ існує послідовність (n_j) натуральних чисел така, що $(n_j) \uparrow \infty$ і $|f_{n_j+1}/f_{n_j+2}| < R_1$ для всіх $j \in \mathbb{N}$. Дійсно, якщо б існувало $R_1 > R$ таке, що $|f_{n+1}/f_{n+2}| \ge R_1$ для всіх $n \ge n_0(R_1)$, то тоді $|f_n| \le c / R_1^n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, $c \equiv \text{const}$, і отже,

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n|} \le \frac{1}{R_1},$$

що не можливо. Для послідовності (n_j) з нерівності (2) маємо $\rho_{n_j} l_{n_j+1} / l_{n_j+2} < 2 l_1 R_1 / l_2$, і з огляду на довільність R_1 звідси випливає (7).

Теорема 3. *Нехай функція* $l \in A^+(0)$ *така, що послідовність* (κ_k) *незростаюча. Тоді*:

1) *якщо* f — *трансцендентна ціла функція і* $\gamma < +\infty$, *то*

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\rho_n l_{n+1}}{\omega(n+1) l_{n+2}} \ge \frac{(\sqrt{2}-1) l_1}{\delta l_2 \sqrt{2}}; \tag{8}$$

2) *якщо* f — *аналітична в крузі* $\{z: |z| < R < +\infty\}$ *функція і на колі* $\{z: |z| = R\}$ *має принаймні одну особливу точку, то*

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\rho_n l_{n+1}}{l_{n+2}} \ge \frac{(\sqrt{2}-1) R l_1}{l_2 \sqrt{2}}. \tag{9}$$

Доведення. Нехай f — трансцендентна ціла функція, $\gamma < +\infty$, а (n_p) — послідовність значень, які приймає функція $\nu_f(r)$. Тоді для кожного $\gamma_1 > \gamma$ і для всіх $p \ge p_0(\gamma_1)$ маємо $\omega(n_p) \le \gamma_1 r_{n_p}$ і $\left|f_{n_p+k}\right| \le \left|f_{n_p}\right| r_{n_p}^{-k}$ для всіх $k \in \mathbb{N}$. Тому для функції φ_n, як при доведенні теореми 1, маємо

$$\varphi_{n_p-1}(x) \le \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)\left(\frac{x e^{\eta_1}}{r_{n_p}}\right)^k = \left(1 - \frac{x e^{\eta_1}}{r_{n_p}}\right)^{-2} - 1$$

при умові, що $x \in \left[0, r_{n_p} e^{-\eta_1}\right)$, де $\eta_1 = \ln\left(l_2 l_{n_p} / l_{n_p+1} l_1\right)$. Звідси, як при доведенні теореми 1, можемо зробити висновок, що

$$\rho_{n_p-1} \geq \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} r_{n_p} \frac{l_1 l_{n_p+1}}{l_2 l_{n_p}} \geq \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \frac{l_1}{\gamma_1 l_2} \omega(n_p) \frac{l_{n_p+1}}{l_{n_p}}.$$

Тому

$$\varlimsup_{n \to \infty} \frac{\rho_n l_{n+1}}{\omega(n+1) l_{n+2}} \geq \varlimsup_{p \to \infty} \frac{\rho_{n_p-1} l_{n_p}}{\omega(n_p) l_{n_p+1}} \geq \frac{(\sqrt{2}-1) l_1}{\gamma_1 l_2 \sqrt{2}}.$$

Доведемо (9). Нехай $0 < r < R$. Оскільки $f_k \neq 0$ для нескінченної кількості значень k і

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_n| r^n < +\infty,$$

то існує зростаюча послідовність (n_j) натуральних чисел така, що $|f_{n_j}| r^{n_j} \geq \geq |f_{n_j+k}| r^{n_j+k}$ для всіх $k \in \mathbb{N}$, тобто $|f_{n_j+k}/f_{n_j}| \leq r^k$ для всіх $k \in \mathbb{N}$. Звідси, як і вище (чи при доведенні теореми 1), випливає

$$\rho_{n_j-1} \geq \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \frac{l_1 l_{n_j+1}}{l_2 l_{n_j}} r,$$

і, завдяки довільності r, маємо (9).

Для $f \in A(\infty)$ і $R \in [0, +\infty)$ позначимо $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$ і покладемо

$$\rho_\omega(f) = \varlimsup_{r \to \infty} \frac{\omega(\ln M_f(r))}{r}.$$

***Наслідок* 1.** *Якщо f — трансцендентна ціла функція, $\rho_\omega(f) < \infty$ і (κ_k) — незростаюча послідовність, то виконується* (8) *з* $\gamma = e\rho_\omega(f)$.

Дійсно, за нерівністю Коші $\ln \mu_f(r) \leq \ln M_f(r)$, а

$$\ln \mu_f(er) = \ln \mu_f(r) + \int_r^{er} \frac{\nu_f(t)}{t} dt \geq \nu_f(r).$$

Тому $\gamma \leq e\rho_\omega(f)$, і за теоремою 1 маємо нерівність (8) з $e\rho_\omega(f)$ замість γ.

***Наслідок* 2.** *Якщо f — трансцендентна ціла функція і (κ_k) — незростаюча послідовність, то*

$$\varlimsup_{n \to \infty} \frac{\rho_n l_{n+1}}{l_{n+2}} = +\infty. \tag{10}$$

Дійсно, покладемо $\Phi(x) = \ln M_f(x)$ і $\omega(x) = \Phi^{-1}(x)$ при $x \geq x_0$. Тоді $\rho_\omega(f) = 1$ і виконується (8) з e замість γ. Оскільки $\omega(x) \uparrow +\infty$, $x \to +\infty$, то з (8) випливає (10).

З наслідку 2 випливає, що коли (κ_k) — незростаюча послідовність, $f \in \in A(\infty)$ і $\rho_n = O(l_{n+2}/l_{n+1})$, $n \to \infty$, то f — многочлен. При конкретному виборі функції l це твердження можна уточнити. Має, наприклад, місце таке твердження.

Твердження 5. *Нехай*

$$l(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \exp\left\{-pk^2\right\} z^k,$$

а f — ціла функція така, що

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\ \frac{1}{r} \exp\left\{2p\,\nu_f(r)\right\} = \gamma < \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\, e^{2p}.$$

Якщо f має в крузі $\{z: |z| < 1\}$ скінченну кількість однолистих похідних Гельфонда – Леонтьєва, то f — многочлен.

Дійсно, якщо б f була трансцендентною функцією, то при $\beta(x) = \exp\{2px\}$ з (8) ми мали б нерівність

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \rho_n \geq \frac{\sqrt{2}-1}{\gamma\sqrt{2}}\, e^{2p} > 1,$$

з якої випливає існування нескінченної кількості однолистих в $\{z: |z| < 1\}$ похідних Гельфонда – Леонтьєва.

1. *Shah S. M., Trimble S. Y.* Univalent functions with univalent derivatives. II // Trans. Amer. Math. Soc. – 1969. – **144**. – P. 313 – 320.
2. *Shah S. M., Trimble S. Y.* Univalence of derivatives of functions defined by gap power series // J. London Math. Soc. (2). – 1975. – **9**. – P. 501 – 512.
3. *Shah S. M., Trimble S. Y.* Univalence of derivatives of functions defined by gap power series. II // J. Math. Anal. and Appl. – 1976. – **56**. – P. 28 – 40.
4. *Kapoor G. P., Juneja O. P., Patel J.* Univalence of Gelfond – Leont'ev derivatives of analytic functions // Bull. math. Soc. sci. math. RSR. – 1989. – **33**, № 1. – P. 25 – 34.
5. *Kapoor G. P., Patel J.* Univalence of Gelfond – Leont'ev derivatives of functions defined by gap power series // Rend. mat. e appl. – 1986. – **6**, № 4. – P. 491 – 502.
6. Branges Luis de. A proof of the Bieberbach conjecture // Acta Math. – 1985. – **154**, № 1 – 2. P. 137 – 152.

Получено 01.03.93