УДК 517.983

М. І. Березовський, канд. фіз.-мат. наук,
С. С. Лінчук, канд. фіз.-мат. наук (Чернівец. ун-т)

ОПИС ОПЕРАТОРІВ ТА ІЗОМОРФІЗМІВ ПРОСТОРУ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ, ПЕРЕСТАВНИХ З ОПЕРАТОРОМ МНОЖЕННЯ

The description of operators and isomorphisms of the space $C[a, b]$ which commute with the operator of multiplication by a continuous and strictly piecewise monotone function is given.

Одержано опис операторів та ізоморфізмів простору $C[a, b]$, переставних з оператором множення на неперервну і строго кусково монотонну функцію.

1. Нехай q — неперервна дійснозначна функція на відрізку $[a, b]$. Тоді рівністю

$$(Qf)(t) = q(t)f(t), \quad t \in [a, b], \tag{1}$$

в $C[a, b]$ визначається лінійний обмежений оператор (л. о. о.) Q. Він називається оператором множення на функцію q. У даній роботі одержано зображення всіх л. о. о. та ізоморфізмів, що діють у просторі $C[a, b]$ і комутують з оператором множення на кусково монотонну функцію $q \in C[a, b]$. Зауважимо, що для випадку простору $L_2[a, b]$ подібні питання досліджено в працях [1–3]. Як і в роботах [1–3], неперервну функцію q вважаємо кусково строго монотонною на $[a, b]$, це означає існування такого скінченного розбиття $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ відрізка $[a, b]$, що на кожному з підвідрізків $[t_{j-1}, t_j]$ функція q строго монотонна. Нехай при цьому $y_0 < y_1 < \ldots < y_m$, $m \le n$, — впорядковані за зростанням числа $q(t_0), q(t_1), \ldots, q(t_n)$ (мінімакси функції q). Покладемо $D_j = q^{-1}((y_{j-1}, y_j))$ і вважатимемо, що множина D_j є диз'юнктивним об'єднанням складових інтервалів $I_1^j, I_2^j, \ldots, I_{n(j)}^j$, $j = \overline{1, m}$. Позначимо $D = \bigcup_{j=1}^m D_j$, а $X = [a, b] \backslash D$. Зрозуміло, що множина $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_h\}$, де $x_0 = a$, $x_h = b$, $x_i < x_{i+1}$, складається з кінців системи інтервалів $\{I_i^j : j = \overline{1, m},\ i = \overline{1, n(j)}\}$.

Визначимо тепер на множині D гомеоморфізм p за таким правилом: якщо $x \in I_i^j$, то $px := p(x)$ належить $I^j_{(i+1)(\mathrm{mod}\, n(j))}$ і таке, що $q(px) = q(x)$, $j = \overline{1, m}$. Звідси випливає, що p відображає множину D_j на себе і при цьому виконуються тотожності $p^{n(j)}x = x$, $x \in D_j$, $j = \overline{1, m}$, а система степенів $\{e, p, p^2, \ldots, p^{n(j)-1}\}$ утворює циклічну групу перетворень відкритої множини D_j на себе порядку n_j. Якщо через N позначити найменше спільне кратне чисел $\{n_1, n_2, \ldots, n_m\}$, то для всіх x із множини D виконується тотожність $p^N x = x$, а отже, система степенів $\{e, p, p^2, \ldots, p^{N-1}\}$ — це циклічна група перетворень відкритої множини D на себе порядку N.

2. Якщо A — л. о. о. у просторі $C[a, b]$ і $s \in [a, b]$, то $\Phi_s(f) = (Af)(s)$, $f \in C[a, b]$, — лінійний обмежений функціонал в $C[a, b]$, а тому згідно з теоремою Ріса існує така функція $g_s(t) \equiv K(s, t)$ обмеженої варіації (зміни), неперервна справа і нормована умовою $g_s(a) = 0$ $(\forall\, s)$, що

$$(Af)(s) = \int_a^b f(t)\, d_t K(s, t), \quad f \in C[a, b]. \tag{2}$$

Якщо при цьому оператор A переставний з Q, тобто для довільної функції

$f \in C[a, b]$ і для довільного $s \in [a, b]$ $(AQf)(s) = (QAf)(s)$, то, переписуючи останню рівність з урахуванням (2), одержуємо

$$\int_a^b f(t)[q(t) - q(s)]\, d_t K(s, t) = 0, \quad \forall f \in C[a, b], \quad \forall s \in [a, b]. \tag{3}$$

Для $s \in D_j$ функція $\varphi_s(t) = q(t) - q(s)$ має на множині D таку (і тільки) множину нулів $\tau(s) = \{s, ps, \ldots, p^{n(j)-1}s\}$, кожен з яких лежить лише в множині D_j, а тому при $t \in [a, b] \setminus \overline{D_j}$ функція $\varphi_s(t)$ відмінна від нуля. Якою б не була функція f, неперервна на $[s, ps]$ і рівна нулю на кінцях цього відрізка, її можна продовжити до неперервної на $[a, b]$ і рівної нулю поза $[s, ps]$. Із (3) маємо $\int_s^{ps} f(t)\varphi_s(t)d_t g_s(t) = 0$. Оскільки при $t \in (s, ps)$ $\varphi_s(t) \neq 0$, то $g_s(t)$ — стала на інтервалі (s, ps). Аналогічно міркуючи, ми приходимо до висновку, що функція $g_s(t)$ є сталою на довільному проміжку множини $[a, b] \setminus \tau(s)$, тобто вона може мати стрибки лише в точках множини $\tau(s)$. Звідси випливає

$$(Af)(s) = \sum_{\nu=0}^{n(j)-1} a_\nu^{(j)}(s) f(p^\nu s), \quad s \in D_j, \quad f \in C[a, b]. \tag{4}$$

Властивості функцій $a_\nu^{(j)}(s)$ описуються лемами 1–3.

Лема 1. *Функції* $a_\nu^{(j)}(s)$, $\nu = \overline{0, n(j)-1}$, *розкладу* (4) *неперервні і обмежені на* D_j, $j = \overline{1, m}$, *для кожного л. о. о. у просторі* $C[a, b]$, *переставного з* Q.

Доведення. Якщо A — л. о. о. простору $C[a, b]$, переставний з оператором Q, то для нього справедливе зображення (4). Нехай I — довільний із складових інтервалів відкритої множини D_j, а k — довільний номер $k = \overline{0, n(j)-1}$. Розглянемо інтервал $I' = p^k(I)$ та функцію f, неперервну на $[a, b]$, рівну нулю поза інтервалом I' і відмінну від нуля на I'. Тоді для довільного $s \in I$: $p^\nu s \in I'$ при $\nu = k$ і $p^\nu s \overline{\in} I'$ при $\nu \neq k$. Отже, маємо

$$(Af)(s) = a_k^{(j)}(s) f(p^k s), \quad s \in I \quad (p^k s \in I'). \tag{5}$$

Оскільки $(Af)(s)$ неперервна на $[a, b]$, а $f(p^k s)$ неперервна і відмінна від нуля при $s \in I$, то $a_k^{(j)}(s)$ неперервна на I. На основі довільності вибраного складового інтервалу I та довільності номера k одержуємо неперервність $a_k^{(j)}(s)$, $k = \overline{0, n(j)-1}$, на D_j, $j = \overline{1, m}$. Покажемо тепер обмеженість функцій $a_k^{(j)}(s)$ на D_j. Дійсно, якщо функція $a_k^{(j)}(s)$ буде необмеженою на I, то вона буде необмеженою в околі якогось з його кінців. Тоді існуватиме монотонна послідовність $(s_i) \subset I$, яка збігається до одного з кінців цього інтервалу, така, що $|a_k^{(j)}(s_i)| \to +\infty$ при $i \to +\infty$. Тоді $|a_k^{(j)}(s_i)|^{-1/2} \to 0$ при $i \to +\infty$. Оскільки $p^k s_i =: s_i' \in I'$ і (s_i') монотонно прямує до одного з кінців інтервалу I', то, вибравши f так, щоб вона дорівнювала нулю поза I', дорівнювала $|a_k^{(j)}(s_i)|^{-1/2}$ в точках $s_i' = p^k s_i$ і була неперервною на $[a, b]$, одержимо

$$|(Af)(s_i)| = |a_k^{(j)}(s_i) f(p^k s_i)| = |a_k^{(j)}(s_i)|\,|f(s_i')| \to +\infty$$

при $i \to +\infty$, що неможливо, тому що $(Af)(s)$ неперервна на $[a, b]$. Це доводить лему 1.

Розглянемо систему $h+1$ функцій з властивостями

$$f_i(t) \subset C[a, b] \quad (i = \overline{0, h}), \quad f_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = \overline{0, h}. \tag{6}$$

У термінах цієї системи справедлива така лема.

Лема 2. *Нехай* $\{ a_\nu^{(j)}(s) : \nu = \overline{0, n(j)-1}, \ s \in D_j, \ j = \overline{1, m} \}$ *— довільна фіксована система функцій, що задовольняє умови леми* 1. *Для того щоб праві частини формули* (4) *як функції на* D *продовжувалися з* D *до неперервних функцій на* $[a, b]$ *для кожної функції* f *із* $C[a, b]$, *необхідно і достатньо, щоб вони продовжувалися для деякої скінченної системи функцій* (6).

Доведення. Є потреба в доведенні лише достатності умов леми. Нехай f — довільна функція з $C[a, b]$. Розглянемо допоміжну функцію $f^*(t) = f(t) - \sum_{i=0}^{h} f(x_i) f_i(t)$. Вона неперервна на $[a, b]$ і має нульові значення в точках множини X, тому при підстановці f^* в (4) одержуємо функцію на D, котра має нульові граничні значення в точках множини X, а тому продовжується до неперервної функції на $[a, b]$. Записуючи функцію f у вигляді $f(t) = f^*(t) + \sum_{i=0}^{h} f(x_i) f_i(t)$, бачимо, що коли праві частини (4) продовжуються до неперервних функцій на $[a, b]$ для системи (6), то таке продовження справедливе і для функції f.

Лема 3. *Нехай* $\{ a_\nu^{(j)}(s) : \nu = \overline{0, n(j)-1}, \ s \in D_j, \ j = \overline{1, m} \}$ *— довільна фіксована система функцій, що задовольняє умови леми* 1. *Для того щоб праві частини формули* (4) *як функції на* D *продовжувалися з* D *до неперервних функцій на* $[a, b]$ *для кожної* f *із* $C[a, b]$, *необхідно і достатньо, щоб праві частини* (4) *продовжувалися до неперервних функцій на* $[a, b]$ *для деякого набору функцій* $\{ g_i(t) : i = \overline{0, h} \}$ *з властивостями*

$$g_i(t) \in C[a, b], \quad i = \overline{0, h}; \quad d = \det\left(\left\| g_i(x_j) \right\|_{i,j=0}^{h} \right) \neq 0. \tag{7}$$

Доведення. Нехай існує система типу (7), для якої праві частини (4) продовжуються до неперевних на $[a, b]$ функцій. Розглянемо систему функцій

$$f_k(t) = \frac{1}{d} \det\left(\left\| g_i(\xi_{jk}(t)) \right\|_{i,j=0}^{h} \right), \quad k = \overline{0, h}, \tag{8}$$

де

$$\xi_{jk}(t) = \begin{cases} t, & j = k, \\ x_j, & j \neq k. \end{cases}$$

Звідси видно, що система (8) є системою типу (6), котра лінійно виражається через функції системи (7), а тому для них праві частини (4) продовжуються до неперервних функцій на $[a, b]$. На основі леми 2 одержуємо доведення леми 3. Як підсумок цих досліджень справедлива така теорема.

Теорема 1. *Якщо* q *— неперервна і кусково монотонна на відрізку* $[a, b]$ *функція, то існує такий гомеоморфізм* p *відкритої множини* $D \subset [a, b]$ *(котра одержується з відрізка* $[a, b]$ *шляхом вилучення повного* q*-прообраза множини всіх екстремальних значень функції* q *на* $[a, b]$*) на себе, існують такі* $m \in \mathbb{N}$ *і* h, $h + 1 = \operatorname{card} X \in \mathbb{N}$, $X = [a, b] \setminus D$, *що лінійний і обмежений оператор* A *є переставним з оператором множення* Q *тоді і тільки тоді, коли існують такі системи функцій* $\{ a_\nu^{(j)}(s) : \nu = \overline{0, n(j)-1} \}$, *неперервні і обмежені на* D_j, $j = \overline{1, m}$, *що для кожної функції* f *із* $C[a, b]$ *і для кожної точки* $s \in D_j$ *виконуються рівності* (4) *і, крім того, для деякої системи* $h + 1$ *неперервних на* $[a, b]$ *функцій, звуження яких на множину* X *є лінійно незалежною системою, праві частини рівності* (4) *продовжуються до неперервних на* $[a, b]$ *функцій.*

Необхідність умов цієї теореми була встановлена вище, а при безпосередній перевірці їх достатності слід мати на увазі тотожність $q(px) \equiv q(x)$.

3. Вивчимо тепер умови неперервної оборотності переставних з Q лінійних обмежених операторів простору $C[a, b]$. З цією метою розглянемо рівняння

$$(Af)(t) = g(t),\ t \in [a, b],\ \{f, g\} \subset C[a, b], \tag{9}$$

де g — задана, а f — шукана функції в $C[a, b]$. Звужуючи по черзі рівність (9) на D_j, $j = \overline{1, m}$, і враховуючи (4), одержуємо m окремих рівнянь вигляду

$$\sum_{\nu=0}^{n(j)-1} a_\nu^{(j)}(t) f(p^\nu t) = g(t), \quad t \in D_j, \quad j = \overline{1, m}. \tag{10}$$

Виписуючи кожне з цих рівнянь в точках $\{t, pt, p^2 t, \ldots, p^{n(j)-1} t\} \subset D_j$, маємо m окремих систем на окремих множинах D_j:

$$\sum_{\nu=0}^{n(j)-1} a_\nu^{(j)}(p^\mu t) f(p^{\nu+\mu} t) = g(p^\mu t), \quad \mu = \overline{0, n(j)-1}, \quad (t \in D_j,\ j = \overline{1, m}).$$

Продовжуючи при кожному фіксованому j функції $a_\nu^{(j)}(t)$ $n(j)$-періодично за нижнім індексом в обидві сторони множини цілих чисел, роблячи зсув у сумуванні і здійснюючи відповідне перепозначення індексів сумування, одержуємо m сепаратних систем рівнянь вигляду

$$\sum_{\nu=0}^{n(j)-1} a_{\nu-\mu}^{(j)}(p^\mu t) f(p^\nu t) = g(p^\mu t), \quad \mu = \overline{0, n(j)-1}, \quad t \in D_j,\ j = \overline{1, m}. \tag{11}$$

Вводячи до розгляду матриці

$$\mathbb{A}_j(t) = \left\| a_{\nu-\mu}^{(j)}(p^\mu t) \right\|_{\mu, \nu=0}^{n(j)-1}, \quad t \in D_j, \quad j = \overline{1, m},$$

та вектори

$$\vec{f}_j(t) = [f(t), f(pt), \ldots, f(p^{n(j)-1} t)]^T, \quad t \in D_j, \quad j = \overline{1, m},$$

можна переписати систему (11) в матричній формі

$$\mathbb{A}_j(t) \vec{f}_j(t) = \vec{g}_j(t), \quad t \in D_j, \quad j = \overline{1, m}. \tag{12}$$

Рівняння (9) та (12) рівносильні на відповідному D_j, $j = \overline{1, m}$.

Якщо через $\{Q\}'$ позначити комутант оператора Q в просторі $C[a, b]$, тобто множину всіх л. о. о. в $C[a, b]$, переставних з Q, то ця множина є алгеброю [4]. Якщо при цьому операторам $\{A, B\} \subset \{Q\}'$ на множині D_j відповідають матриці $\mathbb{A}_j(t)$ та $\mathbb{B}_j(t)$, то операторам $\alpha A + \beta B$ і AB відповідають на D_j матриці $\alpha \mathbb{A}_j(t) + \beta \mathbb{B}_j(t)$ і $\mathbb{A}_j(t) \mathbb{B}_j(t)$. Це означає, що відповідність $\{Q\}' \ni A \mapsto \mathbb{A}_j(t)$, $t \in D_j$, $j = \overline{1, m}$, лінійна і мультиплікативна. Крім того, вона ін'єктивна, бо правими частинами виразу (4) A-образ функції f визначається всюди на $[a, b]$ за винятком скінченної системи точок, в яких він довизначається за неперервністю $(Af)(t)$. З другого боку, оскільки одиничному оператору відповідають одиничні матриці на кожному D_j, то для взаємно обернених операторів A і B із $\{Q\}'$ матричні добутки $\mathbb{A}_j(t) \mathbb{B}_j(t)$ є одиничними матрицями порядку $n(j)$ на D_j, $j = \overline{1, m}$. Добуток їх детермінантів тотожно дорівнює одиниці. Кожен множник у цьому добутку є неперервною і обмеженою на D_j функцією. Звідси випливає, що ці множники є відокремленими від нуля функціями на D_j, $j = \overline{1, m}$. Таким чином, знайдеться таке $\delta > 0$, що

$$|\det \mathbb{A}_j(t)| \geq \delta > 0 \quad \forall\, t \in D_j, \quad j = \overline{1, m}. \tag{13}$$

Покажемо, що умова (13) є не тільки необхідною для оборотності $A \in \{Q\}'$, але й достатньою. Нехай для оператора $A \in \{Q\}'$ виконуються умови (13). Тоді кожна матриця $\mathbb{A}_j(t)$ оборотна на D_j, $j = \overline{1, m}$. Якщо $\mathbb{B}_j(t) = (\mathbb{A}_j(t))^{-1}$, то елементи $b_{\nu-\mu}^{(j)}(t)$ неперервні та обмежені на D_j, $j=\overline{1,m}$. Крім того, для довільної функції $f\in C[a,b]$ якщо

$$g(t) = \sum_{\nu=0}^{n(j)-1} a_\nu^{(j)}(t)f(p^\nu t), \quad t\in D_j, \quad j=\overline{1,m},$$

то

$$f(t) = \sum_{\nu=0}^{n(j)-1} b_\nu^{(j)}(t)g(p^\nu t), \quad t\in D_j, \quad j=\overline{1,m}. \tag{14}$$

За лемою 3 для того щоб правими частинами формули (14) визначався л. о. о. простору $C[a,b]$, необхідно і достатньо, щоб для деякої системи функцій $\{g_i(t)\colon i=\overline{0,h}\}\subset C[a.\,b]$, що задовольняє умову (7), праві частини (14) як функції на D продовжувалися до функцій, неперервних на $[a,b]$. Розглянемо замість системи $\{g_i(t)\colon i=\overline{0,h}\}$ A-образи системи (6) і доведемо, що одержана система задовольняє умови леми 3. Дійсно, якщо б для системи функцій $g_i(t)=(Af_i)(t)$, $i=\overline{0,h}$, був рівним нулю визначник $\det\left(\left\|\left(Af_i(x_j)\right)\right\|_{i,j=0}^{h}\right)$, то однорідна система рівнянь відносно $\{\alpha_i\colon i=\overline{0,h}\}$

$$\sum_{i=0}^{h}\alpha_i(Af_i)(x_j) = 0$$

мала б деякий нетривіальний розв'язок $\{\hat\alpha_i\colon i=\overline{0,h}\}$. Тоді неперервна на $[a,b]$ функція $g(t)=\sum_{i=0}^{h}\hat\alpha_i(Af_i)(t)$ мала б нульові значення в точках x_j, $j=\overline{0,h}$. Розглянемо функцію $f(t)=\sum_{i=0}^{h}\hat\alpha_i(t)(f_i)(t)$ із $C[a,b]$. Для неї маємо $(Af)(t)=g(t)$. Якщо $t\in D_j$, то $f(t)$ виражається через $g(t)$ за формулою (14). Тому функція f має нульові граничні значення в точках множини $X=\{x_0,x_1,\ldots,x_h\}$, що неможливо, оскільки за властивістю функцій (6) $f(x_j)=\hat\alpha_j$, $j=\overline{0,h}$. Одержана суперечність доводить висловлене твердження. Отже, доведена така теорема.

Теорема 2. *Для того щоб оператор A був ізоморфізмом простору $C[a,b]$, переставним з оператором множення Q, необхідно і достатньо, щоб він мав зображення у вигляді* (4), *де функції* $\{a_\nu^{(j)}(t)\colon j=\overline{1,m},\ \nu=\overline{0,n(j)-1}\}$ *задовольняють умови теореми* 1, *і існувало б позитивне число* $\delta>0$ *таке, що*

$$\left|\det\left(\left\|a_{\nu-\mu}^{(j)}(p^\mu t)\right\|_{\mu,\nu=0}^{n(j)-1}\right)\right| \ge \delta > 0 \quad (\forall\, t\in D_j,\ \forall\, j,\ j=\overline{1,m}).$$

Зауваження. Якщо ввести до розгляду на множині D функції

$$a_k(t) = \begin{cases} a_k^{(j)}(t) & \text{при } t\in D_j,\ k=\overline{0,n(j)-1}, \\ 0 & \text{при } t\in D_j,\ k=\overline{n(j),N-1} \end{cases} \quad \left(j=\overline{1,m}\right),$$

то зображення (4) можна записати однією рівністю [1]:

$$(Af)(t) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k(t)f\left(p^k t\right), \quad t\in D, \quad f\in C[a,b].$$

1. *Nasr A. H.* The commutant of a multiplication operation // J. Math. Phys. – 1982. – **23**, № 12. – P. 2268–2270.
2. *Березовский Н. И., Линчук С. С.* Описание обратимых элементов коммутанта оператора умножения в пространстве суммируемых с квадратом функций. – Черновцы: Черновиц. ун-т, 1991. – 13 с. – (Деп. в УкрНИИНТИ; № 207-Ук91).
3. *Березовский Н. И., Линчук С. С.* О коммутанте оператора умножения и условиях обращения его элементов // Укр. мат. журн. – 1993, – **45**, № 1. – С. 21–25.
4. *Наймарк М. А.* Нормированные кольца. – М.: Гостехтеоретиздат, 1956. – 488 с.

Одержано 25.06.93