УДК 517.5

В. В. Волчков, канд. физ.-мат. наук(Донец. ун-т)

ОБ ОДНОМ РАВЕНСТВЕ, ЭКВИВАЛЕНТНОМ ГИПОТЕЗЕ РИМАНА

We prove that the Riemann hypothesis on zeros of the zeta function $\zeta(s)$ is equivalent to the equality

$$\int_0^\infty \frac{1-12t^2}{\left(1+4t^2\right)^3}dt \int_{1/2}^\infty \ln|\zeta(\sigma+it)|d\sigma = \pi\frac{3-\gamma}{32},$$

where

$$\gamma = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \ln N\right)$$

is the Euler constant.

Доведено, що гіпотеза Рімана про нулі дзета-функції $\zeta(s)$ эквівалентна рівності

$$\int_0^\infty \frac{1-12t^2}{\left(1+4t^2\right)^3}dt \int_{1/2}^\infty \ln|\zeta(\sigma+it)|d\sigma = \pi\frac{3-\gamma}{32},$$

де

$$\gamma = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \ln N\right)$$

— стала Ейлера.

В настоящее время известен ряд утверждений, эквивалентных гипотезе Римана о нулях дзета-функции $\zeta(s)$ (см., например, [1, с. 379]). Однако все они, как правило, представляют собой оценки некоторых величин, связанных с арифметическими функциями. В данной работе доказана следующая теорема.

Теорема. *Гипотеза Римана эквивалентна равенству*

$$\int_0^\infty \frac{1-12t^2}{\left(1+4t^2\right)^3}dt \int_{1/2}^\infty \ln|\zeta(\sigma+it)|d\sigma = \pi\frac{3-\lambda}{32},$$

где

$$\lambda = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \ln N\right)$$

— постоянная Эйлера.

Доказательство. Как обычно, $\rho = \beta + i\gamma$ обозначает нули $\zeta(s)$ в критической полосе. Известно (см. например, [2, с. 92]), что

$$\sum_{\gamma>0} f_\gamma(\beta) = \frac{\lambda}{4} + \frac{1}{2} + \frac{\ln 4\pi}{4}, \quad f_\gamma(\beta) = \frac{\beta}{\beta^2+\gamma^2}. \tag{1}$$

В силу выпуклости $f_\gamma(x)$ на $[0,1]$ имеем $f_\gamma(\beta)+f_\gamma(1-\beta) \le 2f_\gamma(1/2)$, причем равенство выполнено только при $\beta = 1/2$. В силу симметрии нулей ρ относительно критической прямой отсюда и из (1) получаем, что гипотеза Римана эквивалентна равенству

$$\sum_{\gamma>0} f_\gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\lambda}{4} + \frac{1}{2} + \frac{\ln 4\pi}{4}.$$

Осталось вычислить сумму слева, которую обозначим через A. Имеем

$$A = \int_0^\infty f_x(1/2)\,dN(x),$$

где $N(x)$ — число нулей $\zeta(s)$ в области $0 \le \sigma \le 1$, $0 \le t \le x$ $(s = \sigma + it)$. Интегрируя по частям с учетом оценки $N(x) = O(x \ln x)$ при больших x [1, с. 211] получаем

$$A = \int_0^\infty N(x) g(x)\,dx,$$

где $g(x) = 16x/(1+4x^2)^2$. Известно (см., например, [1, с. 210]), что

$$N(x) = 1 - (x \ln \pi / 2\pi) + \operatorname{Im} \ln \Gamma(1/4 + ix/2)/\pi + S(x),$$

где $S(x) = (\Delta_L \arg \zeta(s))/\pi$ — приращение аргумента $\zeta(s)$ вдоль ломаной с вершинами $s = 2$, $s = 2 + ix$, $s = (1/2) + ix$. Поэтому $A = 2 - \ln \pi / 4 + I_1 + \operatorname{Im} I_2 / \pi$, где

$$I_1 = \int_0^\infty S(x) g(x)\,dx, \quad I_2 = \int_0^\infty \ln \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{ix}{2}\right) g(x)\,dx.$$

Интеграл I_2 легко вычисляется с помощью интегрирования по частям с использованием формулы

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = -\lambda - \frac{1}{s} - \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{n+s} - \frac{1}{n}\right).$$

Получаем $I_2 = (-\lambda/4) - (\ln 2/2)$. Далее, интегрируя I_1 по частям, с учетом оценки [1, с. 220]

$$S_1(x) = \int_0^x S(t)\,dt = O(\ln x)$$

получаем

$$I_1 = -\int_0^\infty S_1(x)\,dg(x).$$

В результате с учетом равенства

$$S_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_{1/2}^\infty \left(\ln|\zeta(\sigma + it)| - \ln|\zeta(\sigma)|\right) d\sigma$$

из полученных соотношений имеем утверждение теоремы.

1. *Титчмарш Е. К.* Теория дзета-функции Римана. – М.: Изд-во иностр. лит.,1953. – 407 с.
2. *Дэвенпорт Г.*, Мультипликативная теория чисел. – М.: Наука, 1971. – 199 с.

Одержано 20.04.93