УДК 517.5

О. С. Грецький, канд. фіз.-мат. наук (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО $\mathbb{C}$-ДИФЕРЕНЦІЙОВНІСТЬ ВІДОБРАЖЕНЬ ГІЛЬБЕРТОВИХ ПРОСТОРІВ

The process of differentiation is studied for a certain class of maps of regions of a Hilbert space. The concept of $\mathbb{C}\,Cl$-differentiability of a map at a point is introduced and sufficient conditions for $\mathbb{C}\,Cl$-differentiability are established.

Досліджується процес диференціювання для певного класу відображень областей гільбертового простору. Вводиться поняття та одержано достатні умови $\mathbb{C}\,Cl$-диференційовності відображення в точці.

Для характеристики диференціальних властивостей відображення областей гільбертового простору замість сукупності похідних чисел, як це робиться в одновимірному випадку, використовується сукупність неперервних операторів, що певним чином пов'язана з цим відображенням (множина похідних операторів відображення) [1].

У даній статті розглядаються відображення f, які діють з області D гільбертового простору H у гільбертів простір H_1, та є диференційовними вздовж деякого щільного у H лінеалу G. Похідна $f'(a)$, $a \in D$, вважається замкненим $\mathbb{R}$-лінійним оператором. Необхідно визначити, за яких додаткових умов $f'(a)$ є $\mathbb{C}$-лінійним оператором, а отже, f є у деякому ослабленому сенсі моногенним відображенням. Наведені умови $\mathbb{C}$-диференційовності відображень пов'язані з незалежністю від (нескінченновимірного) напрямку дійсних або уявних частин похідних операторів, або їх операторних модулів.

Нехай H — комплексний гільбертовий простір; $O(H)$ — сукупність всіх ортонормованих базисів $\varepsilon = \{e_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, де $\mathfrak{A}$ — множина індексів довільної потужності. Кожний такий базис назвемо репером. Зафіксуємо всюди щільний лінеал G простору H. Далі він набуватиме властивостей, необхідних для проведення дослідження; $O(H, G) := \{\varepsilon \mid \varepsilon \in O(H) \wedge \varepsilon \subset G\}$.

***Означення* 1.** *Сім'я послідовностей*

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}(\varepsilon),\ \tilde{\varepsilon} = \left\{\left\{z_\alpha^k\right\}_{k=1}^{\infty}\right\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}, \quad z_\alpha^k \neq a \quad \forall\, \alpha, k$$

називається репером послідовностей у точці a *з дотичним репером* $\varepsilon \in O(H, G)$, *якщо виконані такі умови:*

а) $$\lim_{k \to \infty} z_\alpha^k = a \ \ \forall\, \alpha \in \mathfrak{A};$$

б) $$\frac{z_\alpha^k - a}{\left\| z_\alpha^k - a \right\|} \in G \ \ \forall\, \alpha, k;$$

в) $$\lim_{k \to \infty} \frac{z_\alpha^k - a}{\left\| z_\alpha^k - a \right\|} = e_\alpha \ \ \forall\, \alpha.$$

Нехай H, H_1 — комлексні гільбертові простори, $f\colon D \to H_1$ — відображення області $D \subset H$ та $\tilde{\varepsilon} = \left\{\left\{z_\alpha^k\right\}_{k=1}^{\infty}\right\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ — такий репер послідовностей у точці $a \in D$ з дотичним репером $\varepsilon = \{e_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}} \in O(H)$, що $z_\alpha^k \in D \ \ \forall\, \alpha, k$.

***Означення* 2.** *У точці* a *існує похідний опратор* $L(f, \tilde{\varepsilon}, a)$ *відображення* f *вздовж репера послідовностей* $\tilde{\varepsilon}$, *якщо:*

а) $\varepsilon = \{e_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}} \subset \operatorname{dom} L(f, \tilde{\varepsilon}, a)$;

б) $\operatorname{dom} L(f, \tilde{\varepsilon}, a) = H$;

в) $\forall\, \alpha \in \mathfrak{A}$ існують границі

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f(z_\alpha^k) - f(a)}{\|z_\alpha^k - a\|} = \zeta_\alpha \in H_1;$$

г) $L(f, \tilde{\varepsilon}, a)$ — $\mathbb{C}$-*лінійний замкнений оператор, що відповідає умовам*

$$L(f, \tilde{\varepsilon}, a)e_\alpha = \zeta_\alpha \quad \forall\, \alpha \in \mathfrak{A},$$

$$\mathcal{R}(f, a) := \{\tilde{\varepsilon} \mid \tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}(\varepsilon) \wedge \varepsilon \in O(H, G) \wedge \operatorname{dom} L(f, \tilde{\varepsilon}, a) \supset G\},$$

$$\mathcal{P}(f, a) := \{L(f, \tilde{\varepsilon}, a) \mid \tilde{\varepsilon} \in \mathcal{R}(f, a)\}.$$

Через $\mathcal{R}(f, a)$ позначимо множину всіх реперів послідовностей $\tilde{\varepsilon}$ відображення f у точці a (з різними дотичними реперами $\varepsilon \in O(H, G)$), а через $\mathcal{P}(f, a)$ — множину похідних операторів відображення f у точці a.

Означення 3. *Відображення* $f\colon D \to H_1$, *де* $H \supset D$ — *область, назвемо* $\mathbb{R}Cl$-*диференційовним* ($\mathbb{C}Cl$-*диференційовним*) *у точці* $a \in D$, *якщо існує оператор* $f'(a)|_G \in Cl_{\mathbb{R}}(H, H_1)$ ($f'(a)|_G \in Cl_{\mathbb{C}}(H, H_1)$), *де* $Cl_{\mathbb{R}}(H, H_1)$ — *клас* $\mathbb{R}$-*лінійних замкнених операторів з* H *в* H_1, *і* $G \subset \operatorname{dom} f'(a)$ *такий, що*

$$\lim_{\substack{z\to\infty \\ z-a\in G}} \frac{f(z) - f(a) - f'(a)(z-a)}{\|z-a\|} = 0.$$

Клас таких відображень позначимо $F\mathbb{R}Cl(G, \{a\})$ або ж $F\mathbb{C}Cl(G, \{a\})$.

Для довільного репера $\varepsilon \in O(H, G)$ позначимо через $E(\varepsilon)$ замкнену дійсну лінійну оболонку множини ε, а множину всіх дійсних підпросторів $E(\varepsilon) \subset H$, де $\varepsilon \in O(H, G)$, позначимо через $\mathcal{K}(H, G)$. Очевидно, якщо $E = E(\varepsilon) \in \mathcal{K}(H, G)$, то $E \oplus iE = H$.

Кожному підпростору $E \in \mathcal{K}(H, G)$ поставимо у відповідність $\mathbb{R}$-лінійний оператор спряження $J_E\colon H \to H$, визначений тиаким чином: $H \ni z = z' + + iz''$, де $z', z'' \in E$, $J_E := z' - iz''$.

Лема 1. *Якщо* $L|_G \in Cl_{\mathbb{R}}(H, H_1)$, $E \in \mathcal{K}(H, G)$, $G \subset \operatorname{dom} L$ *і* G *інваріантний відносно оператора* J_E, *то вірне твердження*

$$\exists\, A|_G,\ B_E|_G \in Cl_{\mathbb{C}}(H, H_1) \quad [L|_G = A|_G + B_E J_E|_G], \tag{1}$$

де

$$Az = \frac{Lz - iLiz}{2}, \quad B_E z = \frac{iLJ_E z - LiJ_E z}{2i} \quad \forall\, z \in G.$$

Доведення. Доведемо спочатку замкненість оператора $B_E|_G$. Для цього достатньо показати замкненість оператора $LJ_E|_G$ (як $\mathbb{R}$-лінійного). Нехай $\{x_n\}$ — довільна послідовність елементів з G, збіжна до деякого елемента x, а послідовність $\{LJ_E|_G(x_n)\}$ — до деякого елемента $z \in H_1$. Доведемо, що $x \in G$ та $LJ_E|_G x = z$. Якщо $y_n := J_E|_G(x_n)$, то $y := \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Із замкненості оператора $L|_G$ та неперервності J_E випливає

$$z = \lim_{n\to\infty} LJ_E|_G(x_n) = L\Big(\lim_{n\to\infty} J_E|_G x_n\Big) = L|_G y \Rightarrow y \in G \Rightarrow G \ni J_E y =$$

$$= \lim_{n\to\infty} J_E y_n = \lim_{n\to\infty} J_E^2 x_n = \lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Далі, $\forall\, z \in G$

$$(A + B_E J_E)z = \frac{Lz - iLiz}{2} + \frac{\left(iLJ_E^2 z - LiJ_E^2 z\right)}{2i} =$$

$$= \frac{Lz}{2} - \frac{iLiz}{2} + \frac{iLiz}{2} + \frac{Lz}{2} = Lz.$$

Лему доведено.

Надалі зафіксуємо репер ε_0, всюди щільний лінеал G буде $J := J_{E_0(\varepsilon_0)}$-інваріантним, і всі операторні рівності розглядатимуться на G.

Означення 4. *Нехай* $E_1,\ E_0 \in \mathcal{K}(H, G)$, $H \ni z = z' + iz''$, $z', z'' \in E_1$; *тоді*

$$T_{E_1} z := T_{E_1, E_0} z := J_{E_0} z' + iJ_{E_0} z''.$$

Легко переконатися, що для відображення $f\colon D \to H_1$, $\mathbb{R}Cl$-диференційовного у точці $a \in D$, для довільного репера ε з $O(H, G)$ та довільного репера послідовностей $\tilde{\varepsilon} = \left\{\left\{z_\alpha^k\right\}_{k=1}^{\infty}\right\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ у точці a з дотичним репером ε існує похідний оператор $L(f, \tilde{\varepsilon}, a)$ відображення f у точці a вздовж $\tilde{\varepsilon}$ та відповідне зображення множини $\mathcal{P}(f, a)$: $L_E(f, a) := L(f, \tilde{\varepsilon}, a) = f_z(a) + f_{\bar{z}}(a) T_E$, де $E = E(\varepsilon)$, і

$$\forall\, x \in G \quad f_z(a)x = \frac{f'(a)x - if'(a)ix}{2}, \quad f_{\bar{z}}(a)x = \frac{if'(a)Jx - f'(a)iJx}{2i}.$$

Якщо $E \in \mathcal{K}(H, G)$ і $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in O(H, G)$ такі, що $\varepsilon_1 \subset E, \varepsilon_2 \subset E$, то для довільних реперів послідовностей $\tilde{\varepsilon}_1, \tilde{\varepsilon}_2$ у точці a з дотичними реперами $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ відповідно похідні оператори $L(f, \tilde{\varepsilon}_1, a)$ і $L(f, \tilde{\varepsilon}_2, a)$ рівні. Тому $L_E(f, a)$ назвемо похідним оператором відображення f у точці a вздовж E.

Дослідимо достатні умови $\mathbb{C}Cl$-диференційовності відображення $f\colon D \to H_1$ у точці a за умови, що відображення $\mathbb{R}Cl$-диференційовне у точці a.

Означення 5. *Вважатимемо, що замкнений лінійний оператор* $L\colon H \to H$ *зображається у вигляді декартового розкладу операторів на лінеалі* G: $L := \operatorname{Re} L + i \operatorname{Im} L$, *де* $\operatorname{Re} L := (L + L^*)/2$, $\operatorname{Im} L := (L - L^*)/2i$, *якщо* $G \subseteq \operatorname{dom} L \cap \operatorname{dom} L^*$.

Теорема 1. *Нехай* D — *область у* $H, f\colon D \to H$ — *відображення,* $\mathbb{R}Cl$-*диференційовне у точці* $a \in D$, *де* H — *комплексний сепарабельний гільбертів простір. Якщо дійсні або уявні частини всіх похідних операторів* $L_E \in \mathcal{P}(f, a)$ *рівні на* G *якомусь оператору* Q, *та лінеал* G *інваріантний відносно сім'ї операторів* J_E *і*

$$\operatorname{dom}\left(f_z^*(a) + T_E^* f_{\bar{z}}^*(a)\right) \supseteq G \quad \forall\, E \in \mathcal{K}(H, G),$$

то відображення f $\mathbb{C}Cl$-*диференційовне у точці* a.

Доведення. За умовою теореми $\operatorname{Re} L_E = Q$ не залежить від $E \in \mathcal{K}(H, G)$. Тоді

$$2Q = L_E + L_E^* \supseteq f_z(a) + f_{\bar{z}}(a) T_E + f_z^*(a) + T_E^* f_{\bar{z}}^*(a). \tag{2}$$

Оскільки згідно з [1, с. 177] $T_{iE} = -T_E$, то, підставляючи у (2) iE замість E, маємо

$$2Q = L_E + L_E^* \supseteq f_z(a) - f_{\bar z}(a)T_E + f_z^*(a) - T_E^* f_{\bar z}^*(a). \tag{3}$$

Як наслідок, з (2) та (3) випливає $f_{\bar z}(a)T_E + T_E^* f_{\bar z}^*(a) = 0 \ \ \forall\, E \in \mathcal{K}(H, G)$, а отже, $\mathrm{Re}\,(T_E z,\ f_{\bar z}^*(a)z) = 0 \ \ \forall\, z \in G,\ \forall\, E \in \mathcal{K}(H, G)$, де $\mathrm{Re}\,(\cdot, \cdot)$ — дійсний скалярний добуток у дійсному гільбертовому просторі $H_{\mathbb{R}}$, одержаний як звуження поля скалярів простору $(H_{\mathbb{C}}, (\cdot, \cdot))$. (Звідси випливає, що коли $\mathrm{Re}\,(z, \zeta) = 0 \ \ \forall\, \zeta \in H$, тоді $z = 0$.)

Доведемо спочатку, що для довільного $0 \neq x \in G$ множина $\{\, T_E x\}_{E \in \mathcal{K}(H, G)}$ всюди щільна у сфері радіуса $r = \|x\|$, а отже, є тотальною у H. Аналіз леми 3 [1, с. 185–186] показує, що достатньо розглянути випадок, коли $\|x\| = 1$, Jy та x $\mathbb{C}$-лінійно незалежні, та $Jy \in H \setminus G$, тобто $y \in H \setminus G$. Візьмемо такий елемент $y_\varepsilon \in G$, що $\|y_\varepsilon\| = 1$, $\|y - y_\varepsilon\| < \varepsilon$, і x та Jy_ε $\mathbb{C}$-лінійно незалежні. Потім побудуємо ортогональні вектори e_1 та e_2, за допомогою лінійної комбінації яких потрібним чином зобразиться вектор x:

$$e_1 = (\eta + i)x + (\eta + i)Jy_\varepsilon, \ e_2 = x + Jy_\varepsilon;$$

$$\eta = \frac{\mathrm{Im}(x, Jy_\varepsilon)}{1 + \mathrm{Re}(x, Jy_\varepsilon)}, \ x = (e_1 - (\eta - i)e_2)/2i.$$

Далі доповнимо множину елементів $\{e_1, e_2\}$ до деякого базису у H: $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$. За лемою 2 [2, с. 106] існує система околів радіусу δ_i: $O_{\delta_i}(e_i) = \{\, s \mid \|s - e_i\| < \delta_i\}$ така, що наступна імплікація істинна: $\forall\, i \ \ (i \in \mathbb{N}) \ \ \forall\, s_i\, (s_i \in H) \ \ [\, \|e_i - s_i\| < \delta_i] \Rightarrow \{\, s_i\}$ — базис у H.

Отже, можна одержати базис у H, елементи якого належать до лінеалу G, при цьому e_1 та e_2 залишаться без змін. Застосуємо до одержаної системи процес ортогоналізації Шмідта. Результат цієї процедури — ортонормований базис $\varepsilon' = \{e_i'\}_{i=1}^{\infty}$, що лежить у лінеалі G.

Позначимо через E' замкнену дійсну лінійну оболонку ε': $E' := \overline{\mathcal{L}_{\mathbb{R}}\{\varepsilon'\}}$.

Отже, маємо

$$E' \in \mathcal{K}(H, G), \quad T_{E'}x = T_{E'}\left(\frac{e_1 - (\eta - i)e_2}{2i}\right) = y_\varepsilon.$$

Всюди щільність множини $\{T_E x\}_{E \in \mathcal{K}(H, G)}$ в одиничній сфері, а разом з тим і її тотальність в H, доведена.

Оскільки для довільного фіксованого $z \in G$ множина $\{\, T_E z\}_{E \in \mathcal{K}(H, G)}$ тотальна в H, то $f_{\bar z}^*(a) = 0$. Враховуючи, що для довільного щільно визначеного замкненого оператора A виконується $\mathrm{Ker}\,(A) = \mathrm{Im}\,(A^*)^{\perp}$ [3, с. 41], маємо $f_{\bar z}(a) = 0$.

Отже, відображення f $\mathbb{C}Cl$-диференційовне у точці a. Теорему доведено.

Нехай T — щільно визначений замкнений оператор, який діє з гільбертова простору H в інший гільбертів простір H_1. Тоді існує полярний розклад оператора T [4, с. 420]: $T = UR$, $\mathrm{dom}\, T = \mathrm{dom}\, R$. Тут оператор U частково ізометричний із вихідною множиною $\overline{\mathrm{Im}\,(R)}$ та фінальною множиною $\overline{\mathrm{Im}\,(T)}$; $U^* U u = u$ для всіх $u \in \overline{\mathrm{Im}\,(R)}$, тобто U є проектор на $\overline{\mathrm{Im}\,(R)}$; $R = (T^* T)^{1/2}$ — невід'ємний самоспряжений оператор, який називається операторним модулем T.

Нехай $f\colon D \to H$ — відображення області $D \subset H$, $\mathbb{R}Cl$-диференційовне у точці a. Для кожного оператора $L_E \in \mathcal{P}(f, a)$, $E \in \mathcal{K}(H, G)$, запишемо полярний розклад: $L_E = U_E R_E$.

Означення 6. *Вважатимемо, що відображення* $f\colon D \to H$ *у точці* $a \in D$ *має сталий оператор розтягу* R, *якщо* $R_E = R \quad \forall\, E \in \mathcal{K}(H, G)$, *де* $R \in Cl_{\mathbb{C}}(H)$ *і* $\operatorname{dom} R \supseteq G$.

Введемо позначення:

$$\widehat{L_E^* L_E} \ := \ f_z^*(a) f_z(a) \ + \ T_E^* f_{\bar z}^*(a) f_{\bar z}(a) T_E \ + \ f_z^*(a) f_{\bar z}(a) T_E \ + \ T_E^* f_{\bar z}^*(a) f_z(a).$$

Теорема 2. *Нехай* $f\colon D \to H$ *— відображення області* $D \subset H$, $\mathbb{R}Cl$*-диференційовне у точці* a, *що має у цій точці сталий оператор розтягу* R. *Крім того, лінеал* G *інваріантний відносно сім'ї операторів* J_E *і* $\operatorname{dom} \widehat{L_E^* L_E} \supseteq$ $\supseteq G \quad \forall\, E \in \mathcal{K}(H, G)$. *Тоді, якщо* $f_z(a)$ *має щільну область значень у* H, *то відображення* f $\mathbb{C}Cl$*-диференційовне у точці* a.

Доведення. Виходячи з попереднього, можемо записати

$$L_E \ = \ U_E R \ = f_z(a) \ + \ f_{\bar z}(a) T_E, \quad L_E^* \ = \ R U_E^* \ \supseteq \ f_z^* \ + \ T_E^* f_{\bar z}^*(a),$$

$$R^2 \ = \ L_E^* L_E \ \supseteq \ \widehat{L_E^* L_E}. \tag{4}$$

Позначимо $Q := R^2 - f_z^*(a) f_z(a)$. Тоді $\forall\, z \in G$ та $\forall\, E \in \mathcal{K}(H, G)$ із (4) маємо

$$2\operatorname{Re}\big(f_z^*(a) f_{\bar z}(a) T_E z, z\big) \ + \ \| f_{\bar z}(a) T_E z \|^2 \ = \ (Qz, z). \tag{5}$$

Підставляючи у (5) iE замість E, одержуємо як наслідок

$$\operatorname{Re}\big(f_z^*(a) f_{\bar z}(a) T_E z, z\big) \ = \ 0 \quad \forall\, E \in \mathcal{K}(H, G),$$

$$T_E z \ = \ y \to z \ = \ T_E^{-1} y \ = \ T_{J(E)} y \Rightarrow \operatorname{Re}\big(f_z^*(a) f_{\bar z}(a) y, T_{J(E)} y\big) \ = \ 0 \ \ \forall\, E \in \mathcal{K}(H, G).$$

З того, що $J(\mathcal{K}(H, G)) = \mathcal{K}(H, G)$, випливає

$$\operatorname{Re}\big(f_z^*(a) f_{\bar z}(a) y, T_E y\big) \ = \ 0 \quad \forall\, E \in \mathcal{K}(H, G). \tag{6}$$

Оскільки множина векторів $\{T_E y\}_{E \in \mathcal{K}(H, G)}$ є тотальною у H (див. теорему 1), з (6) маємо

$$f_z^*(a) f_{\bar z}(a) \ = \ 0. \tag{7}$$

Беручи до уваги умову, накладену на область значень оператора $f_z(a)$ та його щільну визначеність, на основі [4, с. 213] одержуємо

$$\operatorname{Ker}\big(f_z^*(a)\big) \ = \ \operatorname{Im}(f_z(a))^{\perp} \ = \ 0$$

Тоді з (7) випливає $f_{\bar z}(a) = 0$. Теорему доведено.

1. *Бондарь А. В.* Локальные геометрические характеристики голоморфных изображений. – Киев: Наук. думка, 1992. – 220 с.
2. *Крейн М., Мильман Д., Рутман М.* Об одном свойстве базиса в пространстве Banach'a // Зап. науч.-исслед. ин-та математики и механики Харьк. ун-та и Харьк. мат. о-ва. – 1939. – **16**. – С. 106 – 108.
3. *Лянце В. Э., Сторож О. Г.* Методы теории неограниченных операторов. – Киев: Наук. думка, 1983. – 210 с.
4. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. – М: Мир, 1972. – 740 с.

Одержано 18.01.93