УДК 517.98

І. Г Ізвєков, канд. фіз.-мат. наук (Київ. політехн. ін-т)

ФОРМУЛА КОТЕЛЬНИКОВА – ШЕННОНА ДЛЯ ПЕРЕТВОРЕНЬ ФУР'Є РОЗПОДІЛІВ З КОМПАКТНИМИ НОСІЯМИ

For the Fourier transforms of finite distributions, an analog of the well-known Kotel'nikov formula is established.

Для переворень Фур'є фінітних розподілів встановлюється аналог відомої формули Котельникова.

В теорії перетворень Фур'є відома теорема Котельникова [1, с. 575]: якщо $f(x)$ — сумовна функція, перетворення Фур'є якої має фінітний носій у відрізку $[-a; a]$, то

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\pi k}{a}\right) \sin c\left\{a\left(t - \frac{\pi k}{a}\right)\right\}, \quad x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

$(\sin cu = \sin u / u)$. Згідно з (1) для відтворення значень функції $f(x)$ в довільній точці досить задати її значення в точках вигляду $\pi k / a$ (відліковні значення). В цій статті одержано формулу, згідно з якою для відтворення функції $\hat{F}(\lambda)$, що є перетворенням Фур'є фінітного функціоналу (розподілу), досить задати зліченну множину відліковних значень та скінчене число похідних у точці нуль.

Простір основних функцій $\mathcal{D}$ складається з усіх нескінченно диференційовних функцій $\varphi(x)$, які задані на $\mathbb{R}$ та мають компактний носій. У цьому просторі визначається стандартна топологія [2]. Лінійні неперервні функціонали над $\mathcal{D}$ називають розподілами. Символ $\langle F, \varphi \rangle$ означає дію розподілу F на основну функцію φ.

Згідно з відомим означенням розподіл F дорівнює нулю в області $\Omega \subset \mathbb{R}$, якщо $\langle F, \varphi \rangle = 0$ для довільної основної функції φ, носій якої належить Ω. При цьому множина $\mathbb{R} / \Omega$. називається носієм F. Фінітним називається розподіл з компактним носієм. Для кожного фінітного розподілу мають зміст вирази $\langle F, \varphi \rangle$, де φ — довільна нескінченно диференційовна функція; більш точно, кожен фінітний розподіл неперервно продовжується на простір $\mathcal{E}$ всіх нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій [2, с. 60]. Множину всіх фінітних розподілів будемо позначати $\mathcal{E}'$.

Відомо [2, с. 85], що довільний функціонал $F \in \mathcal{E}'$ можна подати у вигляді

$$\langle F, \varphi \rangle = \sum_{j=0}^{p} \int_{\mathbb{R}} q_j(x) \overline{\varphi^{(j)}(x)}\, dx, \quad \varphi \in \mathcal{E}, \tag{2}$$

де $q_j(x)$, $j = 0, 1, \ldots, p$, — фінітні квадратично інтегровні функції, причому для довільного околу носія F функції q_j можна вибрати так, щоб їхні носії належали цьому околу. Найменше з чисел p, при яких можливо зображення вигляду (2), називається порядком сингулярності розподілу F.

Якщо $F \in \mathcal{E}'$, то функція $\hat{F}(\lambda) = \left\langle F, e^{2\pi i \lambda x} \right\rangle$ $(\lambda \in \mathbb{R})$, називається перетворенням Фур'є розподілу F. Клас всіх таких функцій описується теоремою Пелі – Вінера [3, с. 211]. Зокрема, $\hat{F}(\lambda)$ — ціла функція і $|\hat{F}(z)| \le C(1 + |z|)^p \times$ $\times\, e^{a|\operatorname{Im} z|}$ $(z \in \mathbb{C})$ при деяких $C, p, a > 0$.

Нехай F — розподіл з носієм в інтервалі $(-a; a)$ та порядком сингулярності p, $\hat{F}(\lambda)$ — перетворення Фур'є цього розподілу.

Теорема. *Для всіх* $\lambda \in \mathbb{R}$ *справедлива рівність*

$$\hat{F}(\lambda) = e^{-2\pi i\lambda a} M_p G(\lambda) +$$

$$+ \lambda^{p+1} \left\{ \frac{G^{(p+1)}(0)}{(p+1)!} \sin c(2\pi a\lambda) + \sum_{k \neq 1} (-1)^k R_p G\left(\frac{k}{2a}\right)\left(\frac{2a}{k}\right)^{p+1} \sin c\, [\pi(k - 2a\lambda)] \right\}, \tag{3}$$

де

$$G(\lambda) = \hat{F}(\lambda) e^{2\pi i\lambda a}, \quad M_p G(\lambda) = \sum_{j=0}^{p} G^{(j)}(0)\frac{\lambda^j}{j!}, \quad R_p G(\lambda) = G(\lambda) - M_p G(\lambda).$$

Доведення. Оскільки носій F належить $(-a; a)$, то, користуючись зображенням (2), можна записати

$$\hat{F}(\lambda) = \sum_{j=0}^{p} \frac{\lambda^j}{j!} \int_{-a}^{a} f_j(x) e^{-2\pi i\lambda x}\, dx, \tag{4}$$

де $f_j(x)$ $(j = 0, 1, \ldots, p)$ — квадратично інтегровні функції з носіями в $(-a; a)$. Інтегруючи частинами перший доданок у правій частині рівності (4), одержуємо

$$\hat{F}(\lambda) = e^{-2\pi i\lambda a} \int_{-a}^{a} f_0(x)\, dx + 2\pi i\lambda \int_{-a}^{a} \left(\int_{-a}^{x} f_0(t)\, dt \right) e^{-2\pi i\lambda x}\, dx +$$

$$+ \sum_{j=1}^{p} \frac{\lambda^j}{j!} \int_{-a}^{a} f_j(x) e^{-2\pi i\lambda x}\, dx.$$

Очевидно,

$$\int_{-a}^{a} f_0(x) dx = \hat{F}(0) = G(0),$$

тому

$$\hat{F}(\lambda) = G(0) e^{-2\pi i\lambda a} + \lambda \int_{-a}^{a} \tilde{f}_1(x) e^{-2\pi i\lambda x}\, dx + \sum_{j=2}^{p} \frac{\lambda^j}{j!} \int_{-a}^{a} f_j(x) e^{-2\pi i\lambda x}\, dx,$$

де

$$\tilde{f}_1(x) = f_1(x) + 2\pi i \int_{-a}^{x} f_0(t)\, dt.$$

Інтегруючи далі частинами, маємо

$$\hat{F}(\lambda) = G(0) e^{-2\pi i\lambda a} + \lambda e^{-2\pi i\lambda a} \int_{-a}^{a} f_1(x) dx +$$

$$+ \frac{\lambda^2}{2!} \int_{-a}^{a} \tilde{f}_2(x) e^{-2\pi i\lambda x}\, dx + \sum_{j=3}^{p} \frac{\lambda^j}{j!} \int_{-a}^{a} f_j(x) e^{-2\pi i\lambda x}\, dx \quad ,$$

де

$$\tilde{f}_2(x) = f_2(x) + 4\pi i \int_{-a}^{x} \tilde{f}_1(t)\,dt.$$

Зауважуючи, що $\int_{-a}^{a} f_1(x)\,dx = G'(0)$ та продовжуючи інтегрування частинами, одержуємо

$$\hat{F}(\lambda) = e^{-2\pi i\lambda a}\left(G(0) + G'(0)\lambda + \ldots + G^{(p-1)}(0)\frac{\lambda^{p-1}}{(p-1)!}\right) +$$

$$+\frac{\lambda^p}{p!}\int_{-a}^{a}\tilde{f}_p(x)e^{-2\pi i\lambda x}\,dx = e^{-2\pi i\lambda a}M_p\,G(\lambda) + \lambda^{p+1}\int_{-a}^{a}h(x)\,e^{-2\pi i\lambda x}dx, \qquad (5)$$

де функція $h(x)$ абсолютно неперервна на $[-a; a]$. Розкладемо її в ряд Фур'є на $[-a; a]$:

$$h(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{i\pi k x/a},$$

де

$$c_k = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} h(x)e^{-i\pi k x/a}\,dx \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

З рівності (5) випливає

$$c_0 = \frac{G^{(p+1)}(0)}{2a(p+1)!},$$

$$c_k = \frac{1}{2a}\left[G(\lambda) - M_pG(\lambda)\right]e^{-2\pi i\lambda a}\lambda^{-p-1}\Big|_{\lambda=k/2a} = \frac{(-1)^k}{2a}R_pG\left(\frac{k}{2a}\right)\left(\frac{2a}{k}\right)^{p+1}.$$

Значить,

$$h(x) = \frac{1}{2a}\left(\frac{G^{(p+1)}(0)}{(p+1)!} + \sum_{k\neq 1}(-1)^k R_pG\left(\frac{k}{2a}\right)\left(\frac{2a}{k}\right)^{p+1}e^{i\pi k x/a}\right).$$

Підставимо цей ряд замість $h(x)$ у (5):

$$\hat{F}(\lambda) = e^{-2\pi i\lambda a}M_pG(\lambda) + \frac{1}{2a}\lambda^{p+1}\left\{\frac{G^{(p+1)}(0)}{(p+1)!}\int_{-a}^{a}e^{-2\pi i\lambda x}\,dx + \right.$$

$$\left. + \sum_{k\neq 1}(-1)^k R_p\,G\left(\frac{k}{2a}\right)\left(\frac{2a}{k}\right)^{p+1}\int_{-a}^{a}e^{2\pi i x(k/2a-\lambda)}\,dx\right\},$$

і після підраховування всіх інтервалів у правій частині останньої рівності одержимо (3). Теорему доведено.

Наслідком формули (3) є той факт, що всі значення фуниції $\hat{F}(\lambda)$ відновлюються за відліковними значеннями $\hat{F}(k/2a)$ та значеннями $\hat{F}^{(j)}(0)$, $j = 1, 2, \ldots, p+1$.

1. *Зорич В. А.* Математический анализ, ч. 2. – М.: Наука, 1984. – 640 с.
2. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965.– 328 с.
3. *Рудин У.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1975. – 448 с.

Одержано 29.06.93